PARTIE I LEMME DE BEZOUT DANS $\mathbb{K}[X]$.

Q1 $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au vecteur nul et vérifiant $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall S \in \mathcal{S},\ PS \in \mathcal{S}\quad (*)$.

a) On pose $s_0 = \mathrm{Min}\{\deg S, S \in \mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\}$. S_0 est un élément de $\mathcal{S}$ tel que $\deg S_0 = s_0$.

Justifier l'existence de s_0 et S_0.

On note $\mathcal{S}'$ l'ensemble des multiples de S_0. Montrer que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

Soit P un élément de $\mathcal{S}$. Montrer que le reste R dans la division de P par S_0 appartient encore à $\mathcal{S}$. En déduire alors que $R = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et que $P \in \mathcal{S}'$

Ainsi $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de S_0.

b) Utiliser ce qui précède pour montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire ou normalisé S_1 de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble des multiples de S_1.

Au choix Q2 (et on admet le résultat de Q2') ou Q2' (en s'inspirant de Q2 ...)

Q2 Dans cette question on suppose que A et B sont deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ dont les seuls diviseurs communs sont les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 0, c'est à dire les polynômes constants et non nuls. On dit alors que A et B sont premiers entre eux.

On se propose de montrer qu'il existe deux éléments U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

On pose $\mathcal{R} = \{AP + BQ,\ (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2\}$.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ qui contient A et B et qui vérifie la propriété $(*)$.

b) Soit R_1 l'unique polynôme unitaire ou normalisé R_1 de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{R}$ soit l'ensemble des multiples de R_1.

Montrer, en utilisant les hypothèses sur A et B que $R_1 = 1$. En déduire qu'il existe deux éléments U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

c) **Facultatif** Soit (U_2, V_2) un couple d'éléments de $\mathbb{K}[X]$.

Montrer que $AU_2 + BV_2 = 1$ si et seulement si il existe un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $U_2 = U + QB$ et $V_2 = V - AQ$.

d) **Facultatif** On suppose que A et B ne sont pas tous les deux constants. Montrer qu'il existe un couple (U_1, V_1) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ et un seul tel que : $AU_1 + BV_1 = 1$, $\deg U_1 < \deg B$ et $\deg V_1 < \deg A$.

Q2' r est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et A_1, A_2, ..., A_r sont r éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

On suppose encore que l'ensemble des diviseurs communs à A_1, A_2, ..., A_r est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 0. On dit alors que A_1, A_2, ..., A_r sont premiers entre eux.

Montrer qu'il existe r polynômes U_1, U_2, ..., U_r de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{r} A_k\, U_k = 1$.

Q3 Soit α un élément de $\mathbb{K}$ et p un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que si P est un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ n'ayant pas α comme racine, P et $(X - \alpha)^p$ sont premiers entre eux.

PARTIE II LEMME DES NOYAUX.

Il ne sera toléré aucune confusion entre polynômes et polynômes d'endomorphismes ou entre endomorphismes et vecteurs.

Dans cette partie f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Q1 Dans cette question on suppose que A et B sont deux éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux.

U et V sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Ainsi $\mathrm{Id}_E = A(f) \circ U(f) + B(f) \circ V(f) = U(f) \circ A(f) + V(f) \circ B(f)$. Alors :

- $\forall x \in E,\ x = A(f)\big(U(f)(x)\big) + B(f)\big(V(f)(x)\big)$ (1)
- $\forall x \in E,\ x = U(f)\big(A(f)(x)\big) + V(f)\big(B(f)(x)\big)$ (2).

On pose $F = \operatorname{Ker} A(f)$, $G = \operatorname{Ker} B(f)$ et $H = \operatorname{Ker}(AB)(f) = \operatorname{Ker}\big(A(f) \circ B(f)\big) = \operatorname{Ker}\big(B(f) \circ A(f)\big)$.

On se propose de montrer que $H = F \oplus G$.

a) Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ et que F (resp. G) est contenu dans H.

b) Utiliser (1) pour montrer que $H \subset F + G$. Conclure.

Q2 r un élément de $\mathbb{N}^*$. λ_1, λ_2, ..., λ_r sont r éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$. p_1, p_2, ..., p_r sont r éléments non nuls de $\mathbb{N}^*$.

On pose pour tout élément k de $[\![1, r]\!]$, $G_k = \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{p_k}$ et $P_k = (X - \lambda_1)^{p_1} (X - \lambda_2)^{p_2} \cdots (X - \lambda_k)^{p_k}$.

Montrer que pour tout élément k de $[\![1, r]\!]$, $\operatorname{Ker} P_k(f) = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_k$.

Q3 **Facultatif** r est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. S_1, S_2, ..., S_r sont r éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ **deux à deux** premiers entre eux.

Montrer que $\operatorname{Ker}(S_1 S_2 \cdots S_r)(f) = \operatorname{Ker} S_1(f) \oplus \operatorname{Ker} S_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} S_r(f)$.

PARTIE III SOUS-ESPACES STABLES PAR UN ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE.

Dans cette partie f est un endomorphisme **diagonalisable** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n non nulle.

On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres (distinctes) de f et $F_1, F_2, \ldots, F_r$ les sous-espaces propres de f respectivement associés. Rappelons que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Q0 Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$

a) λ un élément de $\mathbb{K}$ et x un élément de E tel que $f(x) = \lambda x$. Montrer que $P(f)(x) = P(\lambda)\, x$.

b) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, F est stable par $P(f)$ (ceci est indépendant de a)).

Q1 $U = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$.

a) Dans ce a) on suppose $r \geqslant 2$.

Pour tout élément k de $[\![1, r]\!]$, U_k est le quotient de U par $X - \lambda_k$ et $L_k = \dfrac{1}{U_k(\lambda_k)}\, U_k$.

Soit $(k, j) \in [\![1, r]\!]^2$. Montrer que pour tout élément x de F_j : $L_k(f)(x) = \begin{cases} 0_E & \text{si} \quad k \neq j, \\ x & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$.

Préciser la nature et les éléments de l'endomorphisme $L_k(f)$.

b) Montrer que U est un polynôme annulateur de f scindé à racines simples (on pourra étudier $U(f)$ sur F_k).

Q2 Pour tout élément k de $[\![1, r]\!]$ on considère un sous-espace vectoriel F'_k de F_k. Montrer que $F = F'_1 + F'_2 \cdots + F'_r$ est stable par f. Notons que la somme qui définit F est clairement directe.

Q3 Réciproquement soit F un sous-espace de E stable par f.

a) Soit x un élément de F. Il existe $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_r,\ x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$.

Utiliser ce qui précède pour montrer que $\forall k \in [\![1, r]\!],\ x_k \in F$.

b) On pose $\forall k \in [\![1, r]\!],\ F'_k = F \cap F_k$. Montrer que $F = F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_r = F'_1 \oplus F'_2 \oplus \cdots \oplus F'_r$.

c) Conclure l'étude précédente.

d) On suppose que F n'est pas réduit au vecteur nul. Soit h l'endomorphisme de F définit par $\forall x \in\ F,\ h(x) = f(x)$. Montrer que h est diagonalisable (construire une base de vecteurs propres).

Q4 Soit g un second endomorphisme diagonalisable de E.

a) On suppose que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Utiliser alors d) pour montrer l'existence d'une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g.

b) Enoncer et démontrer une réciproque.

PARTIE IV POLYNÔME MINIMAL. DÉCOMPOSITION DE DUNFORD.

Dans cette partie f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n non nulle. On rappelle que f possède au moins un polynôme annulateur non nul.

Q1 On pose $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul qui vérifie $(*)$.

On note P_f l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{A}$ soit l'ensemble des multiples de P_f.

Q2 a) Soit λ une racine de P_f. On suppose que $f - \lambda\ \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E. Montrer alors que le quotient de P_f par $X - \lambda$ est encore un polynôme annulateur de f et en déduire une contradiction.

b) Montrer que le spectre de f est l'ensemble des zéros de P_f.

Q3 a) Montrer que P_f est scindé si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé.

b) Montrer que P_f est scindé à racines simples si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

c) Montrer que si f est diagonalisable alors P_f est scindé à racines simples (on pourra utiliser III Q1 b)).

Dans la suite, sauf mention du contraire, nous supposerons que P_f est scindé.

Observons qu'il en est ainsi si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Alors il existe un éléments r de $\mathbb{N}^*$, r éléments λ_1, λ_2, ..., λ_r de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et r éléments p_1, p_2, ..., p_r de $\mathbb{N}^*$ tels que : $P_f = (X - \lambda_1)^{p_1}(X - \lambda_2)^{p_2} \cdots (X - \lambda_r)^{p_r} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{p_i}$.

On pose pour tout élément k de $[\![1, r]\!]$, $G_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k\ \mathrm{Id}_E)^{p_k}$.

Q4 a) Montrer que $E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r$.

b) Montrer que pour tout élément k de $[\![1, r]\!]$, G_k n'est pas réduit au vecteur nul (utiliser Q2).

c) Montrer que si les racines de P_f sont simples, f est diagonalisable.

Ainsi f est diagonalisable si et seulement si P_f est scindé à racines simples ou si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

d) ici r est élément de $[\![2, +\infty[\![$. Pour tout élément k de $[\![1, r]\!]$, on note Q_k le quotient de P_f par $(X - \lambda_k)^{p_k}$.

Montrer qu'il existe r éléments U_1, U_2, ..., U_r de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $\sum_{i=1}^{r} Q_i\, U_i = 1$.

e) r appartient à $[\![2, +\infty[\![$ et k est un élément de $[\![1, r]\!]$. Montrer que $(Q_k\, U_k)(f)$ est la projection sur G_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} G_i$.

Dans la suite nous noterons q_k cette projection. Montrer que q_k commute avec f.

Si $r = 1$, on pose $q_1 = \mathrm{Id}_E$; q_1 commute avec f, q_1 est un polynôme de f et q_1 est la projection sur G_1 parallèlement à $\{0_E\}$.

On se propose de montrer qu'il existe un couple (d, v) d'endomorphismes de E et un seul tel que :

- $f = d + v$; • d est diagonalisable ; • v est nilpotent ; • $d \circ v = v \circ d$.

Q5 Existence On pose $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, q_i$ et $v = f - d$. Notons que $f = d + v$.

a) Soit k un élément de $[\![1, r]\!]$ et x un élément de G_k. Calculer $d(x)$.

Montrer que d est diagonalisable

b) Montrer que d et v sont des polynômes de f. Prouver alors que d et v commutent.

c) Soit k un élément de $[\![1, r]\!]$. Montrer que G_k est stable par v.

On considère alors l'endomorphisme v_k de G_k défini par $\forall x \in G_k,\ v_k(x) = v(x)$. Montrer que $v_k^{p_k} = 0_{\mathcal{L}(G_k)}$.

Montrer alors que v est nilpotent.

Q6 Unicité Soit (d', v') une seconde solution du problème.

a) Montrer que d' et v' commutent avec f.

b) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour d et pour d'. En déduire que $d - d'$ est diagonalisable.

c) Montrer que $v' - v$ est nilpotent.

d) Montrer que $d' = d$ et $v' = v$.