PARTIE I LEMME DE BEZOUT

Q1 a) $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel non réduit au vecteur nul donc $\mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ n'est pas vide. Alors $\{\deg S,\ S \in \mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Ainsi $\{\deg S, S \in \mathcal{S} - \{0_{\mathbb{K}[X]}\}\}$ possède un plus petit élément s_0.

Par conséquent il existe un élément S_0 de $\mathcal{S} \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tel que $\deg S_0 = s_0$.

Montrons que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de S_0.

→ $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$, $QS_0 \in \mathcal{S}$ car $S_0 \in \mathcal{S}$ donc l'ensemble des multiples de S_0 est contenu dans $\mathcal{S}$.

→ Réciproquement soit P un élément de $\mathcal{S}$. Montrons que P est un multiple de S_0.

La division de P par S_0 ($S_0 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$) montre l'existence de (Q,R) dans $\mathbb{K}[X]^2$ tel que : $P = QS_0 + R$ et $\deg R < \deg S_0$.

Supposons $R \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $S_0 \in \mathcal{S}$ donc $QS_0 \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel donc $R = P - QS_0$ appartient à $\mathcal{S}$ comme différence de deux éléments de $\mathcal{S}$.

$R \in \mathcal{S}$ et $R \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ ainsi $\deg R \geqslant s_0$ par définition de s_0.

Alors $s_0 \leq \deg R < \deg S_0 = s_0$. Ceci est impossible.

Alors $R = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Donc $P = QS_0$. P est un multiple de S_0.

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de S_0.

b) Soit a_0 le coefficient du terme de plus haut degré de S_0. Posons $S_1 = \frac{1}{a_0} S_0$.

Alors S_1 est un polynôme normalisé ou unitaire de $\mathbb{K}[X]$.

De plus comme $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de S_0, $\mathcal{S}$ est également l'ensemble des multiples de S_1 ($\frac{1}{a_0} \in \mathbb{K}$!).

Soit $\hat{S}_1$ un second élément unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble des multiples de $\hat{S}_1$.

$S_1 \in \mathcal{S}$ donc $\exists\, Q \in \mathbb{K}[X]$, $S_1 = Q\hat{S}_1$. $\hat{S}_1 \in \mathcal{S}$ donc $\exists W \in \mathbb{K}[X]$, $\hat{S}_1 = WS_1$

Alors $S_1 = Q\hat{S}_1 = QWS_1$. $(1 - QW)S_1 = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $S_1 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. $QW = 1$.

φ et W sont deux polynômes constants et non nuls. $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$, $W = \lambda$.
Alors $\hat{S}_1 = \lambda S_1$. Or $\hat{S}_1$ et S_1 sont unitaires donc nécessairement $\lambda = 1$. $\hat{S}_1 = S_1$.

<u>Il existe un polynôme unitaire ou nul, S_1 de $\mathbb{K}[X]$ et un seul tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble des multiples de S_1.</u>

<u>Remarque</u>.. On dit que $\mathcal{S}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et nous venons de montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal. Donc $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

(Q2) <u>a)</u> • $A = A \times 1 + B \times 0_{\mathbb{K}[X]} \in \mathcal{R}$ et $B = A \times 0_{\mathbb{K}[X]} + B \times 1 \in \mathcal{R}$

<u>A et B sont deux éléments de $\mathcal{R}$</u>; en particulier <u>$\mathcal{R}$ n'est pas vide</u>.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $(S,T) \in \mathcal{R}^2$.

$\exists (P,\varphi) \in \mathbb{K}[X]^2$, $S = AP + B\varphi$. $\exists (\hat{P},\hat{\varphi}) \in \mathbb{K}[X]^2$, $T = A\hat{P} + B\hat{\varphi}$.

Alors $\lambda S + T = \lambda(AP + B\varphi) + (A\hat{P} + B\hat{\varphi}) = A(\lambda P + \hat{P}) + B(\lambda\varphi + \hat{\varphi})$.

Comme $\lambda P + \hat{P} \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda\varphi + \hat{\varphi} \in \mathbb{K}[X]$, <u>$\lambda S + T \in \mathcal{R}$.</u>

ceci achève de montrer que $\mathcal{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ qui contient A et B.

• Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ et $S \in \mathcal{R}$. $\exists (P,\varphi) \in \mathbb{K}[X]^2$, $S = AP + B\varphi$

$HS = A(PH) + B(\varphi H)$, $PH \in \mathbb{K}[X]$ et $\varphi H \in \mathbb{K}[X]$ donc $HS \in \mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ possède la propriété $(*)$.

<u>$\mathcal{R} = \{AP + B\varphi, (P,\varphi) \in \mathbb{K}[X]^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ contenant A et B et vérifiant $(*)$.</u>

<u>Remarque</u>.. $\mathcal{R}$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ car $A \in \mathcal{R}$ et $A \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On peut donc lui appliquer Q1.

<u>b)</u> $A \in \mathcal{R}$ et $B \in \mathcal{R}$. $\exists (P,\varphi) \in \mathbb{K}[X]^2$, $A = P R_1$ et $B = \varphi R_1$.

Ainsi R_1 divise A et B. Comme A et B sont premiers entre eux : R_1 est un polynôme constant.

Comme R_1 est unitaire : <u>$R_1 = 1$.</u>

$1 = R_1 \in \mathcal{R}$ ainsi <u>$\exists (U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$, $AU + BV = 1$.</u>

c) • Supposons qu'il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $U_2=U+QB$ et $V_2=V-AQ$.
$AU_2+BV_2=A(U+QB)+B(V-AQ)=AU+BV=1$.

• Réciproquement supposons que $AU_2+BV_2=1$.
Alors $AU_2+BV_2=AU+BV$; $A(U_2-U)=B(V-V_2)$.

B divise $B(V-V_2)$ donc B divise $A(U_2-U)$. Montrons alors que B divise U_2-U. C'est clair si B est constant car $B\neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Supposons B non constant.
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$! Ainsi pouvons-nous supposer que tous les polynômes considérés sont dans $\mathbb{C}[X]$. B n'étant pas constant, B est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

$\exists c\in\mathbb{C}^*, \exists r\in\mathbb{N}^*, \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{C}^r, \exists(n_1,n_2,\dots,n_r)\in(\mathbb{N}^*)^r$ tq

$B=c\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{n_\ell}$ avec $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ deux à deux distincts.

B divise $A(U_2-U)$ donc $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ sont des racines de $A(U_2-U)$ d'ordre de multiplicité respectif au moins $n_1,n_2,\dots,n_r$.

Soit $\ell\in[\![1,r]\!]$. Supposons que α_ℓ soit racine de A. Alors $(X-\alpha_\ell)$ divise A et B dans $\mathbb{C}[X]$.

1er cas.. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Alors $X-\alpha_\ell$ divise A et B et $X-\alpha_\ell$ n'est pas de degré 0. Ceci contredit l'hypothèse A et B premiers entre eux.

2e cas.. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ a) $\alpha_\ell\in\mathbb{R}$. On obtient de la même manière une contradiction.

b) $\alpha_\ell\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Comme $A\in\mathbb{R}[X]$ et $B\in\mathbb{R}[X]$, $\overline{\alpha_\ell}$ est encore une racine de A et B. Ainsi $(X-\alpha_\ell)(X-\overline{\alpha_\ell})$ divise A et B et est clairement un élément de $\mathbb{R}[X]$ ($(X-\alpha_\ell)(X-\overline{\alpha_\ell})=X^2-2\mathrm{Re}(\alpha_\ell)X+|\alpha_\ell|^2$) qui n'est pas de degré 0. Ceci contredit le fait que A et B sont premiers entre eux.

$\forall \ell\in[\![1,r]\!],\ A(\alpha_\ell)\neq 0$. Soit $\ell\in[\![1,r]\!]$.

α_ℓ est une racine de $A(U_2-U)$ d'ordre au moins n_ℓ et α_ℓ n'est pas racine de A. Ainsi α_ℓ est racine d'ordre au moins n_ℓ de U_2-U et ceci pour tout ℓ dans $[\![1,r]\!]$.
Comme $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ sont deux à deux distinct(e)s :

$\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{n_\ell}$ divise U_2-U donc B divise U_2-U ($c\neq 0$!).

$\exists \varphi \in \mathbb{K}[X],\ U_2 - U = \varphi B.$ $\quad U_2 = U + \varphi B.$

Or $A(U_2 - U) = B(V - V_2)$. Alors $A\varphi B = B(V - V_2)$. Comme B n'est pas $0_{\mathbb{K}[X]}$,

$A\varphi = V - V_2$; $\quad V_2 = V - A\varphi$.

$U_2 = U + \varphi B$ et $V_2 = V - A\varphi$.

$\{(U_2, V_2) \in \mathbb{K}[X]^2 \mid AU_2 + BV_2 = 1\} = \{(U + \varphi B, V - A\varphi),\ \varphi \in \mathbb{K}[X]\}$.

d) • Divisons U par B. $\exists (\varphi, R) \in \mathbb{K}[X]^2$, $U = \varphi B + R$ avec $\deg R < \deg B$.

Posons $U_1 = R = U - \varphi B$ et $V_1 = V + \varphi A$. Nous supposons ici B non constant.

$U_1 \in \mathbb{K}[X]$, $V_1 \in \mathbb{K}[X]$, $\deg U_1 < \deg B$ et $AU_1 + BV_1 = AU - A\varphi B + BV + B\varphi A = AU + BV = 1$.

Ne reste plus qu'à montrer que $\deg V_1 < \deg A$.

$BV_1 = 1 - AU_1$; alors $\deg BV_1 \leq \deg AU_1$ car $AU_1 \neq 0$ ($AU_1 = 0 \Rightarrow BV_1 = 1 \Rightarrow B$ est constant)

Ainsi $\deg B + \deg V_1 \leq \deg A + \deg U_1 < \deg A + \deg B$ car $A \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $\deg U_1 < \deg B$

Si $V_1 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$: $\deg B + \deg V_1 < \deg A + \deg B$ donc $\deg V_1 < \deg A$

Si $V_1 = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors on a encore $\deg V_1 < \deg A$.

On procède de même si A n'est pas constant. Finalement :

Il existe un couple (U_1, V_1) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\begin{cases} AU_1 + BV_1 = 1 \\ \deg U_1 < \deg B \\ \deg V_1 < \deg A \end{cases}$.

• Montrons l'unicité de ce couple.

Soit $(\hat{U}_1, \hat{V}_1)$ une seconde solution.

$AU_1 + BV_1 = 1 = A\hat{U}_1 + B\hat{V}_1$. $\exists\ \varphi_1 \in \mathbb{K}[X]$, $U_1 = U + \varphi_1 B$ et $V_1 = V - A\varphi_1$.

$\exists\ \hat{\varphi}_1 \in \mathbb{K}[X]$, $\hat{U}_1 = U + \hat{\varphi}_1 B$ et $\hat{V}_1 = V - A\hat{\varphi}_1$.

Alors $U_1 - \hat{U}_1 = B(\varphi_1 - \hat{\varphi}_1)$ et $V_1 - \hat{V}_1 = A(\hat{\varphi}_1 - \varphi_1)$.

$\deg(U_1 - \hat{U}_1) < \deg B$ et $\deg(V_1 - \hat{V}_1) < \deg A$ ($\deg U_1 < \deg B$, $\deg \hat{U}_1 < \deg B$,

$\deg V_1 < \deg A$ et $\deg \hat{V}_1 < \deg A$).

Alors $\deg(B(\varphi_1 - \hat{\varphi}_1)) < \deg B$ et $\deg(A(\hat{\varphi}_1 - \varphi_1)) < \deg A$. Ce qui exige $\varphi_1 - \hat{\varphi}_1 = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Alors $\hat{U}_1 = U + \hat{\varphi}_1 B = U + \varphi_1 B = U_1$ et $\hat{V}_1 = V - A\hat{\varphi}_1 = V - A\varphi_1 = V_1$.

D'où l'unicité du couple (U_1, V_1).

$\exists ! (U_1, V_1) \in \mathbb{K}[X]^2$, $AU_1 + BV_1 = 1$, $\deg U_1 < \deg B$ et $\deg V_1 < \deg A$.

Q2' Esquisse de la démonstration.

On pose $R = \{ \sum_{k=1}^{r} A_k P_k \ , \ (P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r \}$.

- On montre que R est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, contenant $A_1, A_2, \dots, A_r$ et vérifiant (*).
- On applique Q1 et on obtient l'existence d'un unique polynôme unitaire R_1 de $\mathbb{K}[X]$ tel que R soit l'ensemble des multiples de R_1.
- $A_1, A_2, \dots, A_r$ sont dans R donc $\exists (Q_1, Q_2, \dots, Q_r) \in \mathbb{K}[X]^r$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $A_i = Q_i R_1$.

R_1 divise $A_1, A_2, \dots, A_r$ donc R_1 est constant car $A_1, A_2, \dots, A_r$ sont premiers entre eux. Comme R_1 est unitaire : $R_1 = 1$.

Ainsi $1 = R_1 \in R$ et : $\exists (U_1, U_2, \dots, U_r) \in \mathbb{K}[X]^r$, $\sum_{k=1}^{r} A_k U_k = 1$.

Q3 ⊙ Supposons qu'il existe un polynôme Q non constant de $\mathbb{K}[X]$ qui divise P et $(X-\alpha)^p$. Q admet au moins une racine β dans $\mathbb{C}$.

Alors β est une racine de $(X-\alpha)^p$ donc $\beta = \alpha$ et β est une racine de P.

Alors $P(\alpha) = 0$. Ceci contredit l'hypothèse.

Ainsi P et $(X-\alpha)^p$ sont premiers entre eux lorsque $p \in \mathbb{N}^*$ et lorsque α est un élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas une racine de P.

⊙ Notons que $0_{\mathbb{K}[X]}$ ne peut pas diviser P et $(X-\alpha)^p$.

PARTIE II LEMME DES NOYAUX

(Q1) a) Soit x un élément de $F \cap G$. $A(f)(x) = B(f)(x) = 0_E$.

$AU + BV = 1$; $1 = UA + VB$; $Id_E = U(f) \circ A(f) + V(f) \circ B(f)$.

Ainsi $x = (U(f) \circ A(f))(x) + (V(f) \circ B(f))(x) = U(f)(A(f)(x)) + V(f)(B(f)(x))$

$x = U(f)(0_E) + V(f)(0_E) = 0_E$. $\underline{\underline{F \cap G = \{0_E\}}}$. Donc $\underline{\underline{F + G = F \oplus G}}$.

Soit $x \in F$. $A(f)(x) = 0_E$. $(AB)(f)(x) = (BA)(f)(x) = B(f)(A(f)(x)) = B(f)(0_E) = 0_E$.

Alors $x \in \mathrm{Ker}\,(AB)(f)$; $x \in H$.

Donc $\underline{\underline{F \subset H}}$. On montre de même que : $\underline{\underline{G \subset H}}$.

H étant un sous-espace vectoriel : $\underline{\underline{F + G \subset H}}$.

b) Soit $x \in H$. $x = Id_E(x) = ((AU + BV)(f))(x) = (AU)(f)(x) + (BV)(f)(x)$.

Posons $y = (BV)(f)(x)$ et $z = (AU)(f)(x)$. $x = y + z$.

$A(f)(y) = A(f)((BV)(f)(x)) = (A(f) \circ (BV)(f))(x) = (ABV)(f)(x)$

$A(f)(y) = (VAB)(f)(x) = (V(f) \circ (AB)(f))(x) = V(f)((AB)(f)(x)) \underset{\uparrow}{=} V(f)(0_E) = 0_E$

Ainsi $y \in \mathrm{Ker}\, A(f) = F$. $x \in H = \mathrm{Ker}\,(AB)(f)$.

On montre de même que $z \in \mathrm{Ker}\, B(f) = G$.

Alors $x = y + z \in F + G$. Finalement : $\underline{\underline{H \subset F + G}}$.

Par conséquent $\underline{\underline{H = F + G = F \oplus G}}$. $\underline{\underline{\mathrm{Ker}\, AB(f) = \mathrm{Ker}\, A(f) \oplus \mathrm{Ker}\, B(f)}}$.

(Q2) Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{Ker}\, P_k(f) = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_k$

→ C'est clair pour $k = 1$.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $[\![1, r-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$P_{k+1} = P_k\, (X - \lambda_{k+1})^{p_{k+1}}$

Ce P_ℓ n'est pas nul, $\lambda_{\ell+1}$ n'est pas racine de P_ℓ et $p_{\ell+1} \in \mathbb{N}^*$.

Alors I Q3 montre que P_ℓ et $(X-\lambda_{\ell+1})^{p_{\ell+1}}$ sont premiers entre eux.

II Q1 permet de dire que : $\operatorname{Ker}\left(P_\ell (X-\lambda_{\ell+1})^{p_{\ell+1}}\right)(f) = \operatorname{Ker} P_\ell(f) \oplus \operatorname{Ker}(f-\lambda_{\ell+1}\mathrm{Id}_E)^{p_{\ell+1}}$

Ainsi $\operatorname{Ker} P_{\ell+1}(f) = \operatorname{Ker} P_\ell(f) \oplus G_{\ell+1}$.

Or par hypothèse de récurrence $\operatorname{Ker} P_\ell(f) = G_1 \oplus \cdots \oplus G_\ell$.

Alors $\operatorname{Ker} P_{\ell+1}(f) = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_{\ell+1}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall k \in [\![1,r]\!]$, $\operatorname{Ker} P_k(f) = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r = \bigoplus_{i=1}^{k} G_i = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}$.

En particulier $\operatorname{Ker} P_r(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}$.

(Q3) Montrons par récurrence que :

$\forall k \in [\![1,r]\!]$, $\operatorname{Ker}(S_1 \cdots S_k)(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} S_i(f)$.

→ C'est clair pour $k=1$

→ Supposons l'égalité vraie pour ℓ dans $[\![1,r-1]\!]$ et montrons la pour $\ell+1$.

Posons $P = S_1 S_2 \cdots S_\ell$ et montrons que P et $S_{\ell+1}$ sont premiers entre eux.

Soit Q un diviseur de P et $S_{\ell+1}$ de degré différent de 0. $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ car $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors $\deg Q \geq 1$

Soit α une racine de Q dans $\mathbb{C}$. α est racine de $P = S_1 \cdots S_\ell$ et de $S_{\ell+1}$.

$\exists i \in [\![1,\ell]\!]$ tel que α soit racine de S_i. α est racine de S_i et $S_{\ell+1}$.

1er Cas.. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors $X-\alpha$ est un diviseur de degré 1 de S_i et $S_{\ell+1}$ qui sont premiers entre eux !!

2e Cas.. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a) $\alpha \in \mathbb{R}$ .. même chose que plus haut.

b) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors $\bar{\alpha}$ est encore racine de S_i et $S_{\ell+1}$.

$(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ est un élément de degré 2 de $\mathbb{R}[X] = \mathbb{K}[X]$ qui divise S_i et $S_{\ell+1}$!!

Finalement $P = S_1 \cdots S_\ell$ et $S_{\ell+1}$ sont premiers entre eux. Alors $\operatorname{Ker}(P S_{\ell+1})(f) = \operatorname{Ker} P(f) \oplus \operatorname{Ker} S_{\ell+1}(f)$

L'hypothèse de récurrence donne alors $\operatorname{Ker}(P S_{\ell+1})(f) = \operatorname{Ker} S_1(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} S_\ell(f) \oplus \operatorname{Ker} S_{\ell+1}(f)$.

Ceci achève la récurrence. $\operatorname{Ker}(S_1 \cdots S_r)(f) = \operatorname{Ker} S_1(f) \oplus \operatorname{Ker} S_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} S_r(f)$.

Q0 $\exists r\in\mathbb{N}$, $\exists (a_0,a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{K}^{r+1}$, $P=\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell X^\ell$.

a) $\lambda\in\mathbb{K}$ et x est un élément de E tel que $f(x)=\lambda x$.

Une récurrence simple donne : $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $f^\ell(x)=\lambda^\ell x$.

Alors $P(f)(x)=\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell f^\ell(x)=\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell(\lambda^\ell x)=\left(\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell\lambda^\ell\right)x=P(\lambda)x$.

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ f(x)=\lambda x \Rightarrow P(f)(x)=P(\lambda)x.$$

b) Soit F un sous-espace de E stable par f. Soit $x\in F$.

Une récurrence simple donne $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $f^\ell(x)\in F$.

Alors $P(f)(x)=\sum_{\ell=0}^{r} a_\ell f^\ell(x)\in F$ car F est un sous-espace vectoriel.

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, F est aussi stable par $P(f)$.

Q1 a) Soit $\ell\in[\![1,r]\!]$. Les racines de V_ℓ sont $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{\ell-1},\lambda_{\ell+1},\dots,\lambda_r$.

Ainsi $\forall j\in[\![1,r]\!]-\{\ell\}$, $L_\ell(\lambda_j)=\dfrac{1}{V_\ell(\lambda_\ell)}V_\ell(\lambda_j)=0$.

De plus $L_\ell(\lambda_\ell)=\dfrac{1}{V_\ell(\lambda_\ell)}V_\ell(\lambda_\ell)=1$.

$$\forall(\ell,j)\in[\![1,r]\!]^2,\ L_\ell(\lambda_j)=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq\ell\\ 1 & \text{si } j=\ell\end{cases}.$$

Soit $(\ell,j)\in[\![1,r]\!]^2$. Soit $x\in F_j$. $f(x)=\lambda_j x$.

Alors $L_\ell(f)(x)=L_\ell(\lambda_j)x=\begin{cases}0_E & \text{si } j\neq\ell \text{ (ou } \ell\neq j)\\ x & \text{si } j=\ell \text{ (ou } \ell=j)\end{cases}$

$$\text{Alors } \forall(\ell,j)\in[\![1,r]\!]^2,\ \forall x\in F_j,\ L_\ell(f)(x)=\begin{cases}0_E & \text{si } \ell\neq j\\ x & \text{si } \ell=j\end{cases}.$$

$E=F_1\oplus\cdots\oplus F_r$. Soit $\ell\in[\![1,r]\!]$. F_ℓ et $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{r} F_j$ sont supplémentaires.

Notons h_ℓ la projection sur F_ℓ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{r} F_j$ et montrons que

$h_\ell=L_\ell(f)$

$\forall j\in[\![1,r]\!]-\{\ell\},\ \forall x\in F_j,\ h_\ell(x) = 0_E = L_\ell(f)(x)$

$\uparrow F_j \subset F_1+\dots+F_{\ell-1}+F_{\ell+1}+\dots+F_r$

$\forall x\in F_\ell,\ h_\ell(x)=x = L_\ell(f)(x)$.

$\forall j\in[\![1,r]\!],\ \forall x\in F_j,\ h_\ell(x)= L_\ell(f)(x)$.

Soit $x\in E$. $\exists(x_1,\dots,x_r)\in F_1\times\dots\times F_r$, $x=\sum_{j=1}^{r}x_j$. $h_\ell(x)=\sum_{j=1}^{r} h_\ell(x_j)=\sum_{j=1}^{r} L_\ell(f)(x_j)=L_\ell(f)(x)$.

Ainsi $h_\ell = L_\ell(f)$.

Pour tout $\ell\in[\![1,r]\!]$, $L_\ell(f)$ est le projecteur sur F_ℓ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{r} F_j$.

b) Par définition U est scindé à racines simples.

Montrons que $U(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Supposons $r\geqslant 2$.

Comme $E=F_1\oplus F_2\oplus\dots\oplus F_r$ il suffit de prouver que $\forall \ell\in[\![1,r]\!]$, $\forall x\in F_\ell$, $U(f)(x)=0_E$.

Soit $\ell\in[\![1,r]\!]$ et soit $x\in F_\ell$. $f(x)=\lambda_\ell x$. $(f-\lambda_\ell Id_E)(x)=0_E$.

Alors $U(f)(x)=\big(U_\ell(X-\lambda_\ell)\big)(f)(x)=\big(U_\ell(f)\circ(f-\lambda_\ell Id_E)\big)(x)$.

$U(f)(x)= U_\ell(f)\big((f-\lambda_\ell Id_E)(x)\big)=U_\ell(f)(0_E)=0_E$. Donc $U(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Si $r=1$, $E=F_1=\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 Id_E)=\mathrm{Ker}\,U(f)$; on a encore $U(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

U est un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.

Q2 Soit $x\in F$. $x\in F'_1+\dots+F'_r$. $\exists(x'_1,\dots,x'_r)\in F'_1\times\dots\times F'_r$, $x=x'_1+\dots+x'_r$.

$f(x)=f\left(\sum_{\ell=1}^{r} x'_\ell\right)=\sum_{\ell=1}^{r} f(x'_\ell)=\sum_{\ell=1}^{r}\lambda_\ell x'_\ell \in \sum_{\ell=1}^{r} F'_\ell = F$. F est stable par f.

$\uparrow F'_\ell\subset F_\ell$

Si pour tout ℓ dans $[\![1,r]\!]$, F'_ℓ est un sous-espace vectoriel de F_ℓ, $F=F'_1+\dots+F'_r$ est stable par f.

Q3 a) $x\in F$ et $x=x_1+\dots+x_r$ avec $(x_1,\dots,x_r)\in F_1\times\dots\times F_r$. Supposons $r\geqslant 2$.

Soit $\ell\in[\![1,r]\!]$. F est stable par $L_\ell(f)$ donc $L_\ell(f)(x)\in F$.

Or $L_\ell(f)(x)=\sum_{j=1}^{r} L_\ell(f)(x_j) = x_\ell$. Ainsi $x_\ell\in F$.

$\uparrow L_\ell(f)(x_j)=\begin{cases}0_E & \text{si } \ell\neq j\\ x_j & \text{si } \ell=j\end{cases}$ d'après Q1 a) nécessairement alors que $\forall \ell \in [\![1,r]\!]$, $x_\ell \in F \cap F_\ell$.

Donc $x \in \sum_{\ell=1}^{r} (F \cap F_\ell)$. Alors $F \subset \sum_{\ell=1}^{r} (F \cap F_\ell)$ ... c'est une évidence pour $r=1$ car $F_1 = E$.

b) $\forall \ell \in [\![1,r]\!]$, $F'_\ell = F \cap F_\ell$. a) montre alors que $F \subset \sum_{\ell=1}^{r} F'_\ell$.

Or $\forall \ell \in [\![1,r]\!]$, $F'_\ell = F \cap F_\ell \subset F$ et F est un sous-espace vectoriel donc $\sum_{\ell=1}^{r} F'_\ell \subset F$

Finalement $F = \sum_{\ell=1}^{r} F'_\ell$.

$F_1, F_2, \dots, F_r$ étant en somme directe il en est de même de $F \cap F_1, F \cap F_2, \dots, F \cap F_r$.

Donc $F'_1, F'_2, \dots, F'_r$ sont en somme directe.

Ainsi $F = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_r = F'_1 \oplus F'_2 \oplus \dots \oplus F'_r$.

Remarque pour tout k dans $[\![1,r]\!]$, F'_k est un sous-espace vectoriel de F_k.

c) Il résulte alors de Q2 et de Q3 b) que :

un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $F = F'_1 \oplus F'_2 \oplus \dots \oplus F'_r$ avec, pour tout ℓ dans $[\![1,r]\!]$, F'_ℓ sous-espace vectoriel de F_ℓ.

d) $F = \bigoplus_{\ell=1}^{r} (F \cap F_\ell)$. Posons $J = \{i \in [\![1,r]\!] \mid F \cap F_i \neq \{0_E\}\}$

$F = \bigoplus_{i \in J} (F \cap F_i)$. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $F \cap F_i$, pour tout i dans J.

Alors $\mathcal{B} = \text{``}\bigcup_{i \in J} \mathcal{B}_i\text{''}$ est une base de F.

Pour tout $i \in J$, $\mathcal{B}_i$ est constituée d'éléments non nuls de F_i donc de vecteurs propres de f ... et de h.

$\mathcal{B}$ est une base de F constituée de vecteurs propres de h.

Ainsi h est diagonalisable.

(Q4) a) Soit λ une valeur propre de g. Soit $x \in SEP(g,\lambda)$.

$g(x)=\lambda x$; $f(g(x))=\lambda f(x)$; $g(f(x))=\lambda f(x)$; $f(x) \in SEP(g,\lambda)$.

<u>Les sous-espaces propres de g sont stables par f.</u>

Soit $\mu_1,\dots,\mu_s$ les valeurs propres distinctes de g. Pour $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $G_i = SEP(g,\mu_i)$.

$E = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_s$ car g est diagonalisable.

Soit $i \in [\![1,s]\!]$. G_i est stable par f donc, d'après Q3 d) la restriction de f à G_i définit un endomorphisme diagonalisable de G_i.

Alors il existe une base $\widehat{\mathcal{B}}_i$ de G_i constituée de vecteurs propres de cette restriction donc de f.

Alors $\widehat{\mathcal{B}}_i$ est une base de G_i constituée de vecteurs propres pour f et pour g.

Comme $E = G_1 \oplus \dots \oplus G_s$, $\widehat{\mathcal{B}} =$ " $\widehat{\mathcal{B}}_1 \cup \widehat{\mathcal{B}}_2 \cup \dots \cup \widehat{\mathcal{B}}_s$ " est une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g.

<u>Il existe une base $\widehat{\mathcal{B}}$ de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g.</u>

b) Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E constituée de vecteurs propres pour f et g.

$M_{\mathcal{B}'}(f)$ et $M_{\mathcal{B}'}(g)$ sont diagonales donc $M_{\mathcal{B}'}(g)M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}(f)M_{\mathcal{B}'}(g)$.

Alors $M_{\mathcal{B}'}(g\circ f) = M_{\mathcal{B}'}(f\circ g)$ et ainsi <u>$g\circ f = f\circ g$.</u>

<u>Finalement $g\circ f = f\circ g$ si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f et pour g.</u>

PARTIE IV POLYNOME MINIMAL. DECOMPOSITION DE DUNFORD.

Q1 • $(Id_E, f, \dots, f^{n^2})$ est une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ de cardinal n^2+1.

Comme $\dim \mathcal{L}(E) = n^2+1$, cette famille est liée.

$\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{K}^{n^2+1}}$ et $\sum_{\ell=0}^{n^2} \lambda_\ell f^\ell = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $\sum_{\ell=0}^{n^2} \lambda_\ell X^\ell$ est un polynôme annulateur non nul de f.

Ainsi $\mathcal{A}_f$ possède un élément non nul. En particulier $\mathcal{A}_f$ n'est pas vide.

• $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (P, Q) \in \mathcal{A}_f^2$, $(\lambda P + Q)(f) = \lambda P(f) + Q(f) = \lambda\, 0_{\mathcal{L}(E)} + 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (P, Q) \in \mathcal{A}_f^2$, $\lambda P + Q \in \mathcal{A}_f$.

• $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall Q \in \mathcal{A}_f$, $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = P(f) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall Q \in \mathcal{A}_f$, $PQ \in \mathcal{A}_f$.

$\mathcal{A}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul qui vérifie $(*)$.

Ainsi $\exists ! P_f \in \mathbb{K}[X]$, P_f unitaire et $\mathcal{A}_f = \{Q P_f,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

Q2 a) Soit λ une racine de P_f. $\exists T \in \mathbb{K}[X]$, $P_f = (X - \lambda) T$.

Alors $0_{\mathcal{L}(E)} = P_f(f) = (f - \lambda Id_E) \circ T(f)$.

Supposons $f - \lambda Id_E$ bijectif. Alors $T(f) = (f - \lambda Id_E)^{-1} \circ \underbrace{(f - \lambda Id_E) \circ T(f)}_{= 0_{\mathcal{L}(E)}} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Ainsi $T \in \mathcal{A}_f$. Notons que T n'est pas nul car $P_f \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Alors $\exists S \in \mathbb{K}[X]$, $T = S P_f$ avec $S \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

$\deg P_f = \deg((X - \lambda) T) = 1 + \deg T = 1 + \deg(S P_f) = 1 + \deg S + \deg P_f < \deg P_f$!

$f - \lambda Id_E$ ne peut pas être bijectif. Comme $\dim E = n < +\infty$, $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif.

Alors λ est valeur propre de f. Ainsi $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid P_f(\lambda) = 0\} \subset Sp\, f$.

b) Nous venons de voir que $\{\lambda\in\mathbb{K} \mid P_f(\lambda)=0\} \subset Sp\, f$.

Or P_f est un polynôme annulateur de f donc $Sp\, f \subset \{\lambda\in\mathbb{K} \mid P_f(\lambda)=0\}$.

Ainsi <u>le spectre de f est l'ensemble des zéros de P_f.</u>

Q3 a) Si P_f est scindé alors f admet un polynôme annulateur scindé : P_f !

Réciproquement supposons que f admet un polynôme annulateur scindé P.

Alors P est un multiple de P_f. $\exists Q\in\mathbb{K}[X]$, $P = QP_f$.

$\exists c\in\mathbb{K}^*, \exists r\in\mathbb{N}^*, \exists (\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{K}^r, \exists (n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{N}^{*r}$, $P = c\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{n_\ell}$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ deux à deux distincts.

Soit $\ell\in[\![1,r]\!]$. α_ℓ est une racine de QP_f donc de Q ou de P_f.

Notons s_ℓ l'ordre de multiplicité de α_ℓ dans P_f en convenant que $s_\ell=0$ si α_ℓ n'est pas racine de P_f. Alors α_ℓ est racine d'ordre $n_\ell - s_\ell$ de Q (toujours avec la même convention).

Ainsi $\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{s_\ell}$ divise P_f et $\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{n_\ell-s_\ell}$ divise Q

$\exists (U,V)\in\mathbb{K}[X]^2$, $P_f = U\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{s_\ell}$ et $Q = V\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{n_\ell-s_\ell}$.

Alors $c\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell) = P = QP_f = U\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{n_\ell-s_\ell} \times V\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{s_\ell} = UV\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{n_\ell}$

Ainsi $c = UV$. Donc U et V sont des polynômes constants et non nuls.

$\exists c'\in\mathbb{K}^*$, $U = c'$. Alors $P_f = c'\prod_{\ell=1}^{r}(X-\alpha_\ell)^{s_\ell}$. P_f est scindé.

Finalement <u>P_f est scindé si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé.</u>

b) Supposons que P_f est scindé à racines simples. Alors f possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Réciproquement supposons que f possède un polynôme annulateur P scindé à racines simples. Alors P_f est scindé d'après a) et P_f divise P.

Si P_f admet une racine d'ordre au moins 2 il en est de même de P car P_f divise P. Cela n'est pas possible.

Alors P_f est scindé à racines simples.

Finalement P_f est scindé à racines simples si et seulement si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

c) Nous avons vu dans III Q1 que si f est diagonalisable alors f possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Ainsi si f est diagonalisable, P_f est scindé à racines simples.

Q4 a) En appliquant II Q2 il vient :

$\operatorname{Ker} P_f(f) = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r$. Mais $P_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\operatorname{Ker} P_f(f) = E$.

Alors $E = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r = \bigoplus_{\ell=1}^{r} G_\ell = \bigoplus_{\ell=1}^{r} \operatorname{Ker}(f - \lambda_\ell \operatorname{Id}_E)^{p_\ell}$.

b) Soit $k \in [\![1, r]\!]$. λ_k est une racine de P_f donc λ_k est une valeur propre de f (IV Q2).

Ainsi $\operatorname{Ker}(f - \lambda_k \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Comme $\operatorname{Ker}(f-\lambda_k \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}$,

$G_k = \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{p_k}$ n'est pas réduit au vecteur nul.

c) Supposons que les racines de P_f sont simples. Alors $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $p_k = 1$.

Rappelons que $Sp(f)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r\}$.

Alors $E=\bigoplus_{k=1}^{r} G_k = \bigoplus_{k=1}^{r} Ke(f-\lambda_k Id_E)^{p_k} = \bigoplus_{k=1}^{r} Ke(f-\lambda_k Id_E) = \bigoplus_{k=1}^{r} SEP(f,\lambda_k) = \bigoplus_{\lambda\in Sp(f)} SEP(f,\lambda)$

Ainsi f est diagonalisable.

Remarque.. Ceci achève de prouver l'équivalence des trois conditions suivantes

i) f est diagonalisable ii) P_f est scindé à racines simples iii) f possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

d) Pour obtenir ce résultat il suffit de prouver que $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_r$ sont premiers entre eux (I Q 2').

Soit P un diviseur commun à $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_r$. Supposons $\deg P\neq 0$. P ne peut pas être nul donc $\deg P\geqslant 1$.

Soit α une racine de P dans $\mathbb{C}$. α est une racine de φ_1.

Alors $\exists k\in[\![2,r]\!]$, $\alpha=\lambda_k$.

Comme P divise φ_k, α est également une racine de φ_k. Ainsi λ_k est une racine de φ_k ce qui n'est pas.

Il n'existe pas de polynôme de degré non nul qui divise $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_r$.

$\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_r$ sont premiers entre eux.

Alors $\exists(U_1,U_2,\dots,U_r)\in\mathbb{K}[X]^r$, $\sum_{i=1}^{r}\varphi_i U_i=1$.

e) $r\in[\![2,+\infty[\![$. $k\in[\![1,r]\!]$. Notons q_k la projection sur G_k parallèlement à $\bigoplus_{i=1, i\neq k}^{r} G_i$ et montrons que $(\varphi_k U_k)(f)=q_k$.

$\sum_{i=1}^{r}\varphi_i U_i=1$. Ainsi $\sum_{i=1}^{r}(\varphi_i U_i)(f)=Id_E$.

Soit $x\in E$. $\sum_{i=1}^{r}(\varphi_i U_i)(f)(x)=x$.

Posons $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $x_i=(\varphi_i U_i)(f)(x)$. Alors $x=\sum_{i=1}^{r}x_i$.

Montrons alors que : $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $x_i\in G_i$

Soit $i \in [\![1,r]\!]$, $(f-\lambda_i Id_E)^{p_i}(x_i) = (f-\lambda_i Id_E)^{p_i}((\varphi_i U_i)(f)(x_i))$.

$(f-\lambda_i Id_E)^{p_i}(x_i) = ((X-\lambda_i)^{p_i}\varphi_i U_i)(f)(x_i) = (U_i \underbrace{(X-\lambda_i)^{p_i}\varphi_i}_{P_f})(f)(x_i) = (U_i P_f)(f)(x_i)$.

$(f-\lambda_i Id_E)^{p_i}(x_i) = U_i(f)(\underbrace{P_f(f)}_{=0_{\mathcal{L}(E)}}(x_i)) = U_i(f)(0_E) = 0_E$.

Donc $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $x_i \in G_i$.

Alors $q_\ell(x) = x_\ell$ car $x = x_1 + \dots + x_r = x_\ell + (x_1 + \dots + x_{\ell-1} + x_{\ell+1} + \dots + x_r)$ avec

$x_\ell \in G_\ell$ et $x_1 + \dots + x_{\ell-1} + x_{\ell+1} + \dots + x_r \in \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^{r} G_i$.

Donc $q_\ell(x) = x_\ell = (\varphi_\ell U_\ell)(f)(x)$ et ceci pour tout x dans E.

$(\varphi_\ell U_\ell)(f)$ est bien la projection q_ℓ sur G_ℓ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^{r} G_i$.

$f \circ q_\ell = f \circ (\varphi_\ell U_\ell)(f) = (X\varphi_\ell U_\ell)(f) = (\varphi_\ell U_\ell X)(f) = (\varphi_\ell U_\ell)(f) \circ f = q_\ell \circ f$.

q_ℓ commute avec f (... ce qui est normal pour un polynôme de f).

Q5 a) $\ell \in [\![1,r]\!]$ et $x \in G_\ell$. $q_\ell(x) = x$.

Si $r \geq 2$: $\forall i \in [\![1,r]\!] - \{\ell\}$, $x \in \bigoplus_{\substack{e=1 \\ e \neq i}}^{r} G_e$ et $q_i(x) = 0_E$.

Ainsi, dans tous les cas, $d(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i(x) = \lambda_\ell q_\ell(x) = \lambda_\ell x$

$\forall \ell \in [\![1,r]\!]$, $\forall x \in G_\ell$, $d(x) = \lambda_\ell x$.

Rappelons que $\forall \ell \in [\![1,r]\!]$, $G_\ell \neq \{0_E\}$.

Pour tout ℓ dans $[\![1,r]\!]$ notons $\mathcal{B}_\ell$ une base de G_ℓ.

Notons que pour tout ℓ dans $[\![1,r]\!]$ les éléments de $\mathcal{B}_\ell$ sont des vecteurs propres de d associés à la valeur propre λ_ℓ.

$E = \bigoplus_{\ell=1}^{r} G_\ell$ donc $\mathcal{B} = $ " $\bigcup_{\ell=1}^{r} \mathcal{B}_\ell$ " est une base de E constituée de vecteurs propres de d.

Par conséquent $\underline{\underline{d \text{ est diagonalisable}}}$.

b) Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, q_i est un polynôme de f d'après Q 4 e)

Ainsi $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i$ est un polynôme de f. Alors il en est de même pour $v = f - d$.

$\underline{\underline{d \text{ et } v \text{ sont des polynômes de } f}}$.

Soit $(H_1, H_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, $d = H_1(f)$ et $v = H_2(f)$.

$d \circ v = H_1(f) \circ H_2(f) = (H_1 H_2)(f) = (H_2 H_1)(f) = H_2(f) \circ H_1(f) = v \circ d$.

$\underline{\underline{d \text{ et } v \text{ commutent}}}$.

c) Soit $k \in [\![1,r]\!]$. $v = H_2(f)$.

Soit $x \in G_k$. $(f - \lambda_k Id_E)^{p_k}(v(x)) = (f - \lambda_k Id_E)^{p_k}(H_2(f)(x))$.

$(f-\lambda_k Id_E)^{p_k}(v(x)) = ((X-\lambda_k)^{p_k} H_2)(f)(x) = (H_2(X-\lambda_k)^{p_k})(f)(x) = H_2(f)\left((f-\lambda_k Id_E)^{p_k}(x)\right)$.

Or $x \in G_k$ donc $(f - \lambda_k Id_E)^{p_k}(x) = 0_E$ donc $(f - \lambda_k Id_E)^{p_k}(v(x)) = H_2(f)(0_E) = 0_E$.

Alors $v(x) \in G_k$.

$\underline{\underline{G_k \text{ est stable par } v}}$.

Soit $x \in G_k$. $v_k(x) = v(x) = f(x) - d(x) \overset{x \in G_k}{=} f(x) - \lambda_k x = (f - \lambda_k Id_E)(x)$

Alors $v_k^{p_k}(x) = (f - \lambda_k Id_E)^{p_k}(x) = 0_E$ car $x \in G_k$.

Ainsi $\underline{\underline{v_k^{p_k} = 0_{\mathcal{L}(G_k)}}}$.

Posons $\Delta = p_1 p_2 \cdots p_r$. $v_k^{\Delta} = (v_k^{p_k})^{p_1 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_r} = 0_{\mathcal{L}(G_k)}^{p_1 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_r} = 0_{\mathcal{L}(G_k)}$

(à un petit abus près si $r = 1$).

$\underline{\underline{\forall k \in [\![1,r]\!],\ v_k^{\Delta} = 0_{\mathcal{L}(G_k)}}}$. Montrons alors que $v^{\Delta} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit $x \in E$. $\exists (x_1, \dots, x_r) \in G_1 \times \dots \times G_r$, $x = x_1 + \dots + x_r = \sum_{k=1}^{r} x_k$

$v^{\Delta}(x) = \sum_{k=1}^{r} v^{\Delta}(x_k) = \sum_{k=1}^{r} v_k^{\Delta}(x_k) = \sum_{k=1}^{r} 0_E = 0_E$. Ainsi $v^{\Delta} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors **v est nilpotent.**

Finalement $f = d+v$ avec $\begin{cases} (d,v)\in \mathcal{L}(E)^2 \\ d \text{ diagonalisable} \\ v \text{ nilpotent} \\ d\circ v = v\circ d \end{cases}$

Q6 Unicité de la décomposition.

a] $f=d'+v'$ et $d'\circ v'=v'\circ d'$.

Alors $f\circ d' = d'\circ d' + v'\circ d' = d'\circ d' + d'\circ v' = d'\circ f$.

d' commute avec f et il en est de même pour v'.

Si d' commute avec f, clairement d' commute avec tout polynôme de f.

Ainsi $d'\circ(f-\lambda_k Id_E)^{p_k} = (f-\lambda_k Id_E)^{p_k}\circ d'$ pour tout $k\in[\![1,r]\!]$.

Alors $\forall k\in[\![1,r]\!], \forall x\in G_k$, $(f-\lambda_k Id_E)^{p_k}(d'(x)) = d'((f-\lambda_k Id_E)^{p_k}(x)) = d'(0_E) = 0_E$.

Ainsi $\forall k\in[\![1,r]\!], \forall x\in G_k, d'(x)\in G_k$.

Pour tout élément k de $[\![1,r]\!]$, G_k est stable par d'.

Cela a été supprimé de l'énoncé.

Cela n'est pas franchement utile !

b] d' commute avec f donc avec tout polynôme de f donc avec d !

Ainsi d et d' sont diagonalisables et $d\circ d' = d'\circ d$.

D'après II Q4 il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour d et d'. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ cette base.

$\exists(\delta_i,\delta'_i)\in \mathbb{K}^2$, $d(u_i)=\delta_i u_i$ et $d'(u_i)=\delta'_i u_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $(d-d')(u_i) = (\delta_i-\delta'_i)u_i$.

$(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de $d-d'$.

d-d' est diagonalisable.

c) v' commute avec f donc avec tout polynôme de f donc avec v.

v et v' sont nilpotents donc $\exists (s,s') \in \mathbb{N}^{*2}$, $v^s = v'^{s'} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$$(v'-v)^{s+s'} = \sum_{\ell=0}^{s+s'} \binom{s+s'}{\ell} v'^{\ell} \circ (-v)^{s+s'-\ell} \underset{\substack{\uparrow \\ v'^{\ell} = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si } \ell \geq s'}}{=} \sum_{\ell=0}^{s'-1} \binom{s+s'}{\ell} v'^{\ell} \circ (-v)^{s+s'-\ell} \underset{\substack{\uparrow \\ \ell \leq s'-1 \Rightarrow s+s'-\ell \geq s+1 \\ \Downarrow \\ (-v)^{s+s'-\ell} = 0_{\mathcal{L}(E)}}}{=} 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Ainsi $v'-v$ est nilpotent.

d) D'après ce qui précède $X^{s+s'}$ est un polynôme annulateur de $v'-v$.

Alors $Sp(v'-v) \subset \{0\}$.

Or $f = d+v = d'+v'$ donc $d-d' = v'-v$. Ainsi $Sp(d-d') \subset \{0\}$.

Or $d-d'$ est diagonalisable.

Ainsi $Sp(d-d') = \{0\}$ et $SEP(d-d',0) = E$. $Ker(d-d') = E$.

Ainsi $d-d' = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et nécessairement $v'-v = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc $d' = d$ et $v' = v$.