SUJET 13

Rappel. Si $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite décroissante de réels qui converge vers zéro, la série de terme général $(-1)^n\, a_n$ est convergente.

Partie I : Préliminaire.

On fait Q1' et pas Q1.

Q1 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $w_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

a) Montrer que la série de terme général w_n est convergente.

b) En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ (on pourra exprimer $c_{k+1} - c_k$ en fonction de w_k et k).

Désormais on pose : $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$.

Q1' $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $w_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

a) Montrer que $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante ($\ln x \leqslant x-1$...)

Montrer que $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est minorée par 0 (on pourra encadrer des intégrales). Conclure.

b) Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$.

Q2 a) Montrer que si x est un élément de $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$ la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ diverge.

b) Soit x un élément de $[-1,1[$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

En déduire que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Partie II : La fonction dzèta.

On considère la fonction $f : x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et, pour p dans $\mathbb{N}^*$, la foncion $f_p : x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^x}$.

On pose $f_0 = f$. A une petite convention près, on pourra considérer que pour tout élément p de $\mathbb{N}$, f_p est la fonction $x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^x}$ (OK ? ?).

$\boxed{\textbf{Q1}}$ **Recherche du domaine de définition de $\mathbf{f_p}$.**

Soit p un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que le domaine de définition de f_p est $I =]1, +\infty[$.

b) Montrer que f_p est décroissante sur I.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ **Dérivabilité et dérivée de $\mathbf{f_p}$.**

Soit p un élément de $\mathbb{N}$ et a un élément de I.

On se propose de montrer que f_p est dérivable en a et que $f'_p(a) = -f_{p+1}(a)$.

Soit h un réel non nul tel que : $|h| \leqslant \dfrac{a-1}{2}\cdot$

a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\, e^{|u|}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{1}{n^h} - 1 + h\,\ln n\right| \leqslant \dfrac{|h|^2\,(\ln n)^2}{2}\ n^{|h|}$.

b) Vérifier que $\dfrac{a+1}{2}$, $a - |h|$ et $a + h$ sont des éléments de I. Montrer que :

$$\left|\frac{f_p(a+h) - f_p(a)}{h} + f_{p+1}(a)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\, f_{p+2}(a - |h|) \leqslant \frac{|h|}{2}\, f_{p+2}\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

c) Conclure.

d) Déduire de ce qui précède que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et préciser ses dérivées successives.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ **Etude de f aux bornes de son domaine.**

a) Montrer que $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$ (on pourra partir de $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$).

b) Trouver un un équivalent de f en 1 et la limite de f en ce point.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

d) Donner l'allure de la représentation graphique de f.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ **Calcul d'une valeur approchée de $\mathbf{f(x)}$.**

On pose pour tout élément x de I et pour tout élément N de $\mathbb{N}^*$:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \qquad \text{et} \qquad R_N(x) = f(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\cdot$$

a) Montrer que $\forall x \in I,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{(x-1)\,(N+1)^{x-1}} \leqslant f(x) - S_N(x) = R_N(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)\,N^{x-1}}\cdot$

$S_N(x) + \dfrac{1}{(x-1)\,(N+1)^{x-1}}$ est une valeur approchée par défaut de $f(x)$ à $\varepsilon_N(x) = \dfrac{1}{(x-1)\,N^{x-1}} - \dfrac{1}{(x-1)\,(N+1)^{x-1}}$ près.

On peut encore affiner cette approximation en prenant le milieu de l'encadrement mais pour des valeurs de x proche de 1 rendre $\varepsilon_N(x)$ petit exige de prendre N très grand. Par exemple pour avoir $\varepsilon_N(1,5)$ inférieur à 10^{-6} il convient de prendre $N \geqslant 10000$ (je crois ...). Il est alors indispensable d'améliorer cette approximation.

Dans la suite de cette question x est un élément de I.

b) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. On pose $\forall u\in[0,\dfrac{1}{2}],\ g_n(u)=\displaystyle\int_{n-u}^{n+u}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{t^x}\right)\mathrm{d}t.$

Montrer que g_n est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et vérifier que $g_n(0)=g_n'(0)=g_n''(0)=0$.

Montrer que $\forall u\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\ \dfrac{2x(x+1)}{(n+1)^{x+2}}\leqslant -g_n'''(u)\leqslant\dfrac{2x(x+1)}{(n-1)^{x+2}}$.

En déduire à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que :

$$\frac{x(x+1)}{24}\,\frac{1}{(n+1)^{x+2}}\leqslant -g_n\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{x(x+1)}{24}\,\frac{1}{(n-1)^{x+2}}.$$

c) En déduire que, pour N dans $[\![2,+\infty[\![$:

$$\frac{x}{24(N+2)^{x+1}}\leqslant\frac{1}{(x-1)\,\left(N+\frac{1}{2}\right)^{x-1}}-R_N(x)\leqslant\frac{x}{24(N-1)^{x+1}}.$$

Proposer une valeur approchée de $f(x)$ à $\dfrac{x}{48}\left(\dfrac{1}{(N-1)^{x+1}}-\dfrac{1}{(N+2)^{x+1}}\right)$ près.

d) Ecrire un programme en TP4 permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-6} près.

Partie III : Etude de $\mathbf{F}:\mathbf{x}\to\displaystyle\sum_{\mathbf{k}=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}}\,\mathbf{f}(\mathbf{k})\,\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$.

On considère la fonction $F:x\to\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,f(k)\,x^k$.

Q1 **Recherche du domaine de définition de F.**

a) Montrer que $]-1,1[\subset D_F\subset[-1,1]$.

b) Montrer que F est définie en 1.

c) Achever la détermination du domaine de F.

Q2 **Permutation des signes sommes dans la définition de F.**

On se propose de montrer que $\forall x\in]-1,1[,\ F(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k\,x^k}{k\,n^k}$.

a) n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Donner le domaine de définition de la fonction $u_n:x\to\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k\,x^k}{k\,n^k}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions simples.

b) Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que pour tout élément x de $]-1,1]$: $F(x)-\displaystyle\sum_{n=1}^{N}u_n(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k\,x^k}{k}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\right)$.

En déduire que : $\forall x\in]-1,1[,\ \left|F(x)-\displaystyle\sum_{n=1}^{N}u_n(x)\right|\leqslant\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k}\right)\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)$.

Achever la démonstration du résultat proposé et montrer que :

$$\forall x\in]-1,1[,\ F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

$\boxed{\textbf{Q3}}$ **Etude de F en 1**.

On pose : $\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall x \in [1,+\infty[,\ \varphi_k(x) = \dfrac{[x]}{x^{k+1}}$ et $\forall x \in [1,+\infty[,\ \Phi(x) = \dfrac{[x]}{x^2(1+x)}$.

a) Soit k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Montrer que $x \to [x]$, φ_k et Φ sont continues par morceaux sur $[1,+\infty[$.

Montrer la convergence des intégrales $s_k = \displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$ et $S = \displaystyle\int_1^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Soit k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\int_n^{n+1} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. En déduire que $s_k = \dfrac{f(k)}{k}$.

c) Calculer $\displaystyle\int_n^{n+1} \Phi(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ $\left(\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+1}\right)$.

En déduire proprement que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

d) Soit N un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Montrer que : $\left|\displaystyle\int_1^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=2}^{N} (-1)^k\, s_k\right| = \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{N+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $F(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ **F** en **1** again.

a) Soit $(a_n)_{n\geqslant 2}$ une suite décroissante de réel qui converge vers zéro. En regroupant les termes deux à deux montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k\, a_k \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k\, a_k \leqslant a_2$.

b) En utilisant ce résultat et la première égalité de Q2 b), retrouver l'égalité $F(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.
