Le tout est difficile. Il ne s'agit pas de tout faire parfaitement mais d'essayer d'obtenir un maximum de points... Qu'on se le dise et que l'on s'interdise de juger sa prestation à la fin de l'épreuve en l'absence d'éléments de comparaison.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les variables aléatoires X que nous considérerons dans ce problème sont de deux types :

T1 X est à valeurs dans $\alpha\,\mathbb{Z}+\beta$ pour un couple (α,β) de nombre réels ;

T2 X est une variable aléatoire à densité.

On rappelle que toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément (resp. plus petit élément).

PARTIE I

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On note F sa fonction de répartition. On note $M(X)$ l'ensemble des réels m tels que :

$$P(X<m)\leqslant\frac{1}{2}\leqslant P(X\leqslant m).$$

Les éléments de $M(X)$ sont appelés **médiane** de X.

Q1 Soit m un réel.

a) Montrer que m est une médiane de X si et seulement si $P(X\geqslant m)\geqslant\dfrac{1}{2}$ et $P(X\leqslant m)\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot$

b) Montrer que m est une médiane de X si et seulement si $\dfrac{1}{2}\leqslant F(m)\leqslant\dfrac{1}{2}+P(X=m)$.

En déduire que si m n'appartient pas à $X(\Omega)$, m est une médiane de X si et seulement si $F(m)=\dfrac{1}{2}\cdot$

c) Montrer que si X est du type **T2**, m est une médiane de X si et seulement si $F(m)=\dfrac{1}{2}\cdot$

Q2 Dans cette question on suppose que X prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On se propose de montrer que $M(X)$ est un segment (éventuellement réduit à un point) en envisageant deux cas (et en se servant des propriétés d'une fonction de répartition...).

a) 1$^{\text{er}}$ cas. $S=\left\{k\in\mathbb{Z}\mid F(k)=\dfrac{1}{2}\right\}$ est vide.

Montrer que $V=\left\{k\in\mathbb{Z}\mid F(k)>\dfrac{1}{2}\right\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.

Ainsi V possède un plus petit élément m_0. Montrer que m_0 appartient à $M(X)$.

Montrer enfin que $M(X)=\{m_0\}$.

b) 2$^{\text{ème}}$ cas. $S=\left\{k\in\mathbb{Z}\mid F(k)=\dfrac{1}{2}\right\}$ est non vide.

Montrer que S est une partie bornée de $\mathbb{Z}$.

Ainsi S posède un plus petit élément u et un plus grand élément v.

Vérifier que $F(u-1)<\dfrac{1}{2}$ et $F(v+1)>\dfrac{1}{2}\cdot$ Prouver que $M(X)=[u,v+1]$.

c) Ici X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p\in]0,1[$). Préciser sa fonction de répartition F.

Déterminer $M(X)$ (on distinguera 3 cas : $p < 0,5$, ...).

d) Soit p un élément de $\mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} = 2^{2p-1} - \frac{1}{2}\binom{2p}{p}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{k} = 2^{2p-1} + \frac{1}{2}\binom{2p}{p}$.

Déterminer $M(X)$ lors que X suit une loi binômiale de paramètres n et $1/2$.

Q3 a) Soient a et b deux nombres réels. On suppose a non nul. Prouver que : $M(aX+b) = \{am+b; m \in M(X)\}$ (on ne traitera que le cas où a est strictement positif).

b) Montrer que si X est du type **T1**, $M(X)$ est un segment.

Q4 On suppose que X est une variable aléatoire à densité et que g en est une densité.

a) Montrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tel que $F(x_1) < \dfrac{1}{2}$ et $F(x_2) > \dfrac{1}{2}$.

En déduire que $M(X) = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = \frac{1}{2}\}$ est non vide et borné.

b) a est la borne inférieure de S et b sa borne supérieure. Montrer que l'on peut trouver une suite d'élément de $M(X)$ qui converge vers a et en déduire que a appartient à $M(X)$. On montre de même que b appartient à $M(X)$.

Montrer que $M(X)$ est le segment $[a, b]$.

c) On suppose que X admet une densité f, strictement positive et continue sur un intervalle fermé I (pas nécessairement borné) et nulle en dehors de I. Prouver que $M(X)$ est réduit à un point.

Q5 Trouver $M(X)$ dans les cas suivants.

a) X suit la loi normale centée réduite.

b) X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Q6 Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 1.

a) Est-il exact que $E(X) \in M(X)$?

b) On suppose que X est du type T1 et qu'elle admet un moment d'ordre deux. Montrer que si m est une médiane de X :

$$|m - E(X)| \leqslant \sqrt{2\,V(X)}$$

(distinguer deux cas suivant le signe de $E(X) - m$; minorer la variance en considérant l'ensemble des k tels que $k \geqslant m$... ou $k \leqslant m$).

c) Reprendre le problème précédent avec une variable du type T2 (on s'inspirera de ce qui précède ou pour varier les plaisirs on pourra se ramener à une espérance nulle en posant $Y = X - E(X)$).

PARTIE II

A

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, P_n est la fonction $\lambda \to e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$ et I_n est l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big((1-t)\,e^t\big)^n \,\mathrm{d}t$.

Q1 a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ 1 - P_n(\lambda) = \frac{1}{n!}\int_0^{\lambda} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t\cdot$$

b) En déduire une relation entre $1 - P_n(n)$ et I_n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ ou dans $\mathbb{N}$ (on pourra faire un changement de variable).

b') Montrer que si n appartient à $\mathbb{N}$: $1 - P_n(n) = \dfrac{n^{n+1}}{n!\,e^n}\,I_n$!!!

Q2 On considère l'application ψ de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\psi(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \psi(x) = \frac{-x - \ln(1-x)}{x^2}\cdot$$

Montrer que ψ est continue sur son domaine et au moins dérivable sur $]0,1[$.

Montrer que ψ définit une bijection de $[0,1[$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ (on pourra être amené à étudier $x \to \frac{x^2}{1-x} + 2x + 2\ln(1-x)$).

Q3 a) Montrer que $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) + x \leqslant -\dfrac{x^2}{2}\cdot$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}\cdot$

c) Soit γ un élément de $]0,1[$. On pose : $\delta = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right)$.

En utilisant la croissance de ψ montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{\delta} e^{-n\,t^2\,\psi(\delta)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\delta} \big((1-t)\,e^t\big)^n\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\gamma}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \leqslant I_n$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$ (*hors correction*)

Q4 Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ (on pourra utiliser la définition de la limite d'une suite ; fixer $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et d'abord choisir $\gamma \in]0,1[$ tel que $1 - \varepsilon/2 < \gamma$)

En déduire que $1 - P_n(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{n!}\,e^{-n}\sqrt{\dfrac{\pi\,n}{2}}$.

B

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$, ..., X_n une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la loi de Poisson de paramètre 1.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Q1 Donner la loi de S_n pour n dans $\mathbb{N}^*$.

Q2 En utilisant un résultat important de convergence montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}\cdot$

Q3 Trouver un équivalent simple de $n!$ losque n tend vers l'infini.

C

Q1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ P_n(\lambda) + P_n'(\lambda) = P_{n-1}(\lambda)$.

Q2 a) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, démontrer que la suite $\big(P_n(n)\big)_{n \geqslant 0}$ est strictement décroissante.

b) Procéder de manière analogue pour prouver que $\big(P_n(n+1)\big)_{n \geqslant 0}$ est strictement croissante.

c) Montrer que les suites $\big(P_{n-1}(n)\big)_{n \geqslant 1}$ et $\big(P_n(n)\big)_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.

Q3 En déduire que si X est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre n alors $M(X) = \{n\}$.

PARTIE III

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi.

On suppose tout au long de cette partie que l'une des trois hypothèses suivantes est satisfaite :

H1 X_1 suit une loi normale centrée réduite ;

H2 X_1 suit une loi de Poisson de paramètre 1 ;

H3 $X_1/2$ suit la loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

On pose, pour tout élément k de $[\![1, +\infty[\![$, $Y_k = X_k - E(X_k)$ et $T_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$.

Q1 Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que si k est élément de $[\![1, n]\!]$, $T_n - T_k$ est bien du type **T1** ou du type **T2** et que 0 en est une médiane.

Q2 Soient x et ε deux nombres réels strictement positifs. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Pour tout élément k de $[\![2, +\infty[\![$, on note Ω_k l'événement $\{\underset{1 \leqslant j \leqslant k-1}{\mathrm{Max}}\ T_j \leqslant x\} \cap \{T_k > x\}$. On pose encore : $\Omega_1 = \{T_1 > x\}$.

a) Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$.

Montrer que : $\{T_n - T_k \geqslant 0\} \cap \Omega_k \subset \{T_n > x\} \cap \Omega_k$.

Montrer que : $\{T_n > x + \varepsilon\} \cap \Omega_k \cap \{Y_k < \varepsilon\} \subset \{T_n - T_k > 0\} \cap \Omega_k$.

Justifier l'indépendance de Ω_k et de $\{T_n - T_k \geqslant 0\}$ (resp. $\{T_n - T_k > 0\}$).

Montrer que $\{T_n > x\} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Big(\{T_n > x\} \cap \Omega_k \Big)$

b) En déduire l'encadrement :

$$P(T_n > x + \varepsilon) - \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}\, P\left(\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{\mathrm{Max}}\ T_j > x \right) \leqslant P(T_n > x).$$

Q3 Soit θ un nombre réel strictement positif.

Montrer que la suite de terme général $\sum\limits_{j=1}^{n} P(Y_j \geqslant \theta\sqrt{n})$ converge vers 0 (distinguer les trois hypothèses).

Q4 Démontrer que, pour tout nombre réel positif λ, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{\mathrm{Max}}\ T_j > \lambda\sqrt{n} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$

Que se passe-t-il lorsque λ est négatif ?
