PARTIE I

Q1 Soit $m \in \mathbb{R}$.

a) $m \in \Pi(X) \Leftrightarrow P(X<m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-P(X\geq m) \leq \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ P(X\leq m) \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(X\geq m) \geq 1-\frac{1}{2} \\ \text{et} \\ P(X\leq m) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$m \in \Pi(X) \Leftrightarrow P(X\geq m) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X\leq m) \geq \frac{1}{2}$.

b) $m \in \Pi(X) \Leftrightarrow \begin{cases} P(X<m) \leq \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ \frac{1}{2} \leq P(X\leq m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(X\leq m)-P(X=m) \leq \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ \frac{1}{2} \leq P(X\leq m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(X\leq m) \leq \frac{1}{2}+P(X=m) \\ \text{et} \\ \frac{1}{2} \leq P(X\leq m) \end{cases}$

$m \in \Pi(X) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq P(X\leq m) \leq \frac{1}{2}+P(X=m)$. $m \in \Pi(X) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq F(m) \leq \frac{1}{2}+P(X=m)$.

Supposons que $m \notin X(\Omega)$. Alors $P(X=m)=0$. Ainsi $m \in \Pi(X) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq P(X\leq m) \leq \frac{1}{2}$

$m \in \Pi(X) \Leftrightarrow P(X\leq m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow F(m)=\frac{1}{2}$.

Si $m \notin X(\Omega)$: $m \in \Pi(X) \Leftrightarrow F(m)=\frac{1}{2}$.

c) Si X est du type $\mathcal{L}$: $P(X=m)=0$ et on obtient, comme dans b), $m \in \Pi(X) \Leftrightarrow F(m)=\frac{1}{2}$.

Si X est du type $\mathcal{L}$: $m \in \Pi(X) \Leftrightarrow F(m)=\frac{1}{2}$.

Q2 a) 1er Cas.. $S=\{k\in\mathbb{Z} \mid F(k)=\frac{1}{2}\}=\emptyset$. D'après b) on a nécessairement $\Pi(X) \subset X(\Omega)$

$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$. Alors $\lim_{k\to+\infty} F(-k)=0$, alors il existe au moins un élément

$k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F(-k_0) \leq \frac{1}{2}$. Posons $\hat{k}_0=-k_0$. $F(\hat{k}_0) \leq \frac{1}{2}$.

Par croissance de F, $\forall x \in]-\infty, \hat{k}_0]$, $F(x) \leq \frac{1}{2}$. Ainsi $S \subset]\hat{k}_0, +\infty[$.

Par conséquent S est minorée.

$\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$. Alors $\lim_{k\to+\infty} F(k)=1$. $\exists k_1 \in \mathbb{N}$, $|F(k_1)-1| < \frac{1}{2}$.

Alors $-\frac{1}{2} < F(k_1)-1 < \frac{1}{2}$; $F(k_1) > 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. $k_1 \in S$. S n'est pas vide.

S est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$. Alors S possède un plus petit élément m_0.

$m_0 \in S$ donc $F(m_0) > \frac{1}{2}$; $F(m_0) \geqslant \frac{1}{2}$.

$m_0 - 1 \notin S$ donc $F(m_0 - 1) \leqslant \frac{1}{2}$; $\underbrace{F(m_0-1) + P(X=m_0)}_{P(X \leqslant m_0)} \leqslant \frac{1}{2} + P(X=m_0)$; soit encore $F(m_0) \leqslant \frac{1}{2} + P(X=m_0)$.

Par conséquent $\frac{1}{2} \leqslant F(m_0) \leqslant \frac{1}{2} + P(X = m_0)$. $\underline{\underline{m_0 \in \Pi(X)}}$. $\{m_0\} \subset \Pi(X)$.

Soit $m \in \Pi(X)$. Montrons que $m = m_0$.

Soit k la partie entière de m. $k \leqslant m < k+1$. Alors $F(k) = F(m) \geqslant \frac{1}{2}$.

$k \in \mathbb{Z}$ et $F(k) \geqslant \frac{1}{2}$ donc nécessairement $F(k) > \frac{1}{2}$ (car $E_S = \emptyset$). Alors $k \in S$ et : $k \geqslant m_0$.

* Supposons que $m = k$

$\frac{1}{2} \geqslant P(X < m) = P(X < k) = P(X \leqslant k-1) = F(k-1)$; $k-1 \notin S$ et $S \subset [m_0, +\infty[$ car F est croissante ; ainsi $k - 1 < m_0$; $k < m_0 + 1$

Alors $k \in \mathbb{Z}$, $m_0 \in \mathbb{Z}$, $m_0 \leqslant k < m_0 + 1$; $m = k = m_0$!

* Supposons que $m > k$. $P(X=m) = 0$ car $k < m < k+1$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $m \in \Pi(X)$: $F(m) = \frac{1}{2}$.

Or $F(m) = P(X \leqslant m) = P(X \leqslant k) = F(k)$. Ainsi $k \in \mathbb{Z}$ et $F(k) = \frac{1}{2}$ ce qui est impossible.

Finalement si $m \in \Pi(X)$: $m = m_0$.

Ceci achève de prouver que $\underline{\underline{\Pi(X) = \{m_0\}}}$.

b) 2ème cas. $S = \{k \in \mathbb{Z} \mid F(k) = \frac{1}{2}\} \neq \emptyset$

$\lim_{k \to +\infty} F(k) = 1$; alors $\exists k_1 \in \mathbb{N}$, $F(k_1) > \frac{1}{2}$ (voir plus haut !)

$\lim_{k \to -\infty} F(k) = 0$; alors $\exists k_2 \in \mathbb{N}$, $F(-k_2) < \frac{1}{2}$

Par croissance de F : $\forall k \in [\![k_1, +\infty[\![$, $F(k) > \frac{1}{2}$ et

$\forall k \in]\!]-\infty, -k_2]\!]$, $F(k) < \frac{1}{2}$. Alors $S \subset [\![-k_2+1, k_1-1]\!]$.

S est donc une partie non vide et bornée de $\mathbb{Z}$.
Ainsi S possède un plus petit élément u et un plus grand élément v.

Montrons que $M_X = [u, v+1]$.

Notons que $F(u-1) < \frac{1}{2}$, $F(u) = \frac{1}{2}$, $F(v) = \frac{1}{2}$ et $F(v+1) > \frac{1}{2}$.

Soit m un réel.

* $m \in]-\infty, u[$. $P(X \leq m) \leq P(X \leq u-1) = F(u-1) < \frac{1}{2}$; $m \notin M(X)$.
* $m \in]v+1, +\infty[$. $P(X \geq m) \leq P(X > v+1) = 1 - F(v+1) < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $m \notin M(X)$
* $m \in [u, v+1]$. $P(X \leq m) \geq P(X \leq u) = F(u) = \frac{1}{2}$.

$P(X < m) \leq P(X \leq v) = F(v) = \frac{1}{2}$

$P(X < m) \leq \frac{1}{2}$ et $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ donc $m \in M(X)$.

Ainsi $M(X) = [u, v+1]$.

⚠ Voir c] et d] à la fin de Q3 p. 4

Q3 a] 1er cas $a > 0$. Soit m' un réel.

$m' \in M(aX+b) \iff P(aX+b < m') \leq \frac{1}{2}$ et $P(aX+b \leq m') \geq \frac{1}{2}$

$m' \in M(aX+b) \iff P\left(X < \frac{m'-b}{a}\right) \leq \frac{1}{2}$ et $P\left(X \leq \frac{m'-b}{a}\right) \geq \frac{1}{2}$

$m' \in M(aX+b) \iff \frac{m'-b}{a} \in M(X) \iff \exists m \in M(X)$, $\frac{m'-b}{a} = m$

$m' \in M(aX+b) \iff \exists m \in M(X)$, $m' = am+b$. $M(aX+b) = \{am+b \,;\, m \in M(X)\}$.

2ème cas $a < 0$. Soit m' un réel.

$m' \in M(aX+b) \iff P(aX+b < m') \leq \frac{1}{2}$ et $P(aX+b \leq m') \geq \frac{1}{2}$

$m' \in M(aX+b) \iff P\left(X > \frac{m'-b}{a}\right) \leq \frac{1}{2}$ et $P\left(X \geq \frac{m'-b}{a}\right) \geq \frac{1}{2}$

$m' \in M(aX+b) \iff 1 - P\left(X \leq \frac{m'-b}{a}\right) \leq \frac{1}{2}$ et $1 - P\left(X < \frac{m'-b}{a}\right) \geq \frac{1}{2}$

$m' \in M(aX+b) \iff \frac{1}{2} \leq P\left(X \leq \frac{m'-b}{a}\right)$ et $P\left(X < \frac{m'-b}{a}\right) \leq \frac{1}{2} \iff \frac{m'-b}{a} \in M(X)$.

$m' \in \Pi(aX+b) \Leftrightarrow \exists m \in \Pi(X),\ \frac{m'-b}{a} = m$ (ou $m' = ma+b$)

Ainsi ici encore $\underline{\underline{\Pi(aX+b) = \{am+b\ ;\ m \in \Pi(X)\}}}$

b) On suppose que X est du type T1. $X(\Omega) \subset \alpha\mathbb{Z}+\beta$.

1er cas.- $\alpha \neq 0$. Posons $Y = \frac{X-\beta}{\alpha}$. Alors $Y(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et $X = \alpha Y+\beta$.

D'après Q2 $\Pi(Y)$ est un segment $[m_1, m_2]$.

D'après a) $\Pi(X) = \{\alpha m+\beta\ ;\ m \in [m_1, m_2]\}$

Si $\alpha > 0$, $\Pi(X)$ est le segment $[\alpha m_1+\beta, \alpha m_2+\beta]$ et si $\alpha < 0$, $\Pi(X)$ est le segment $[\alpha m_2+\beta, \alpha m_1+\beta]$

2ème cas.- $\alpha = 0$. $X(\Omega) \subset \{\beta\}$. $X(\Omega) = \{\beta\}$. X est constante.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \beta \\ 1 & \text{si } x \geqslant \beta \end{cases}.$$

Soit $m \in \mathbb{R}$.

Si $m < \beta$: $P(X < m) = P(X \leqslant m) = 0$: $m \notin \Pi(X)$

Si $m > \beta$: $P(X < m) = P(X \leqslant m) = 1$: $m \notin \Pi(X)$.

Si $m = \beta$: $P(X < m) = 0$ et $P(X \leqslant m) = 1$: $m \in \Pi(X)$.

Alors $\Pi(X) = \{\beta\} = [\beta, \beta]$. $\Pi(X)$ est encore un segment.

<u>Si X est du type T 1 : $\Pi(X)$ est un segment.</u>

⚠ <u>Fin de Q 2.</u>

c) $X(\Omega) = \{0, 1\}$. $P(X=0) = q$, $P(X=1) = p$ avec $q = 1-p$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

<u>1er Cas.</u>– $p \neq \frac{1}{2}$. Alors $q \neq \frac{1}{2}$. $\{k \in \mathbb{Z} \mid F(k) = \frac{1}{2}\} = \emptyset$

$\Pi(X)$ est réduit à un point.

Si $p < \frac{1}{2}$ alors $q \geq \frac{1}{2}$ et $\begin{cases} P(X \leq 0) = q \geq \frac{1}{2} \\ P(X < 0) = 0 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$; $\Pi(X) = \{0\}$.

Si $p > \frac{1}{2}$ alors $q < \frac{1}{2}$ et $\begin{cases} P(X \leq 1) = 1 \geq \frac{1}{2} \\ P(X < 1) = q \leq \frac{1}{2} \end{cases}$; $\Pi(X) = \{1\}$.

<u>2ième cas.</u>– $p = \frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1/2 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

$\{k \in \mathbb{Z} \mid F(k) = \frac{1}{2}\} = \{0\}$. Alors $\Pi(X) = [0, 0+1]$. $\Pi(X) = [0, 1]$.

Ainsi $\Pi(X) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } p < 1/2 \\ \{1\} & \text{si } p > 1/2 \\ [0,1] & \text{si } p = 1/2 \end{cases}$.

---

d) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

• Soit $p \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2p+1-k} = \sum_{k=p+1}^{2p+1} C_{2p+1}^{k}$.

Alors $2\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k} = \sum C_{2p+1}^{k} + \sum C_{2p+1}^{k} = \sum C_{2p+1}^{k} = 2^{2p+1}$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{k} = \sum_{k=p+1}^{2p+1} C_{2p+1}^{k} = 2^{2p}$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^{k} = \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^{2p-k} = \sum_{k=p+1}^{2p} C_{2p}^{k}$.

$2^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^{k} = \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^{k} + C_{2p}^{p} + \sum_{k=p+1}^{2p} C_{2p}^{k} = 2\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^{k} + C_{2p}^{p}$

$$\sum_{\ell=0}^{p-1} C_{2p}^{\ell} = 2^{2p-1} - \frac{1}{2} C_{2p}^{p} \quad . \quad \sum_{\ell=0}^{p} C_{2p}^{\ell} = 2^{2p-1} + \frac{1}{2} C_{2p}^{p}$$

1er cas.. n est impair. $\exists p \in \mathbb{N}$, $n = 2p+1$.

$\forall k \in [\![0, 2p+1]\!]$, $p(X=k) = C_{2p+1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2p+1-k} = \frac{1}{2^{2p+1}} C_{2p+1}^{k}$.

d'après ce qui précède $F(p) = \sum_{\ell=0}^{p} C_{2p+1}^{\ell} \frac{1}{2^{2p+1}} = \frac{2^{2p}}{2^{2p+1}} = \frac{1}{2}$.

Alors $S = \{ k \in \mathbb{Z} \mid F(k) = \frac{1}{2} \} \neq \emptyset$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. $k < p \Rightarrow F(k) < F(p) = \frac{1}{2}$; $k \notin S$

$k > p \Rightarrow F(k) > F(p) = \frac{1}{2}$; $k \notin S$

Alors $S = \{p\}$. Ainsi $\Pi(X) = [\![p, p+1]\!]$

2ème cas.. n est pair. $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $n = 2p$. $\forall k \in [\![0, 2p]\!]$, $p(X=k) = \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^{k}$.

$$F(p-1) = \sum_{\ell=0}^{p-1} C_{2p}^{\ell} \frac{1}{2^{2p}} = \frac{1}{2^{2p}} \left[2^{2p-1} - \frac{1}{2} C_{2p}^{p} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2p+1}} C_{2p}^{p} < \frac{1}{2}.$$

$$F(p) = \sum_{\ell=0}^{p} C_{2p}^{k} \frac{1}{2^{2p}} = \frac{1}{2^{2p}} \left[2^{2p-1} + \frac{1}{2} C_{2p}^{p} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} C_{2p}^{p} > \frac{1}{2}.$$

Alors $\forall k \in]\!]-\infty, p-1]\!]$, $F(k) \leq F(p-1) < 1/2$.

$\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $F(k) \geq F(p) > \frac{1}{2}$.

Ainsi $S = \emptyset$. $\Pi(X)$ est donc réduit à un point.

$\frac{1}{2} < F(p)$ et $F(p) = F(p-1) + p(X=p) < \frac{1}{2} + p(X=p)$.

$\frac{1}{2} < F(p) < \frac{1}{2} + p(X=p)$; $p \in \Pi(X)$. Finalement $\Pi(X) = \{p\}$.

Q4 a) $\lim_{x\mapsto -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\mapsto +\infty} F(x) = 1$.

$\exists A \in \mathbb{R}^*_+,\ \forall x \in]-\infty, -A[,\quad |F(x)| < \frac{1}{2}$.

$\exists B \in \mathbb{R}^*_+,\ \forall x \in]B, +\infty[,\quad |F(x) - 1| < \frac{1}{2}$.

Soit x_1 (resp. x_2) un élément de $]-\infty, -A[$ (resp. $]B, +\infty[$).

$F(x_1) \leq |F(x_1)| < \frac{1}{2}$. $\quad 1 - F(x_2) \leq |1 - F(x_2)| = |F(x_2) - 1| < \frac{1}{2}$; $1 - \frac{1}{2} < F(x_2)$

Alors $F(x_1) < \frac{1}{2}$ et $F(x_2) > \frac{1}{2}$.

$\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\quad F(x_1) < \frac{1}{2}$ et $F(x_2) > \frac{1}{2}$.

F est croissante donc nécessairement $x_1 < x_2$. De plus F est continue sur le segment $[x_1, x_2]$. Ainsi F prend sur $[x_1, x_2]$ toutes les valeurs de l'intervalle $[F(x_1), F(x_2)]$. Comme $\frac{1}{2} \in [F(x_1), F(x_2)]$ on peut trouver un élément $x_3 \in [x_1, x_2]$ (et même dans $]x_1, x_2[$) tel que $F(x_3) = \frac{1}{2}$.

Alors $x_3 \in \Pi(X)$ d'après Q1 c). $\quad \Pi(X) \neq \emptyset$.

$\forall x \in]-\infty, x_1]$, $F(x) \leq F(x_1) < \frac{1}{2}$ et $\forall x \in [x_2, +\infty[$, $F(x) \geq F(x_2) > \frac{1}{2}$.

Donc $\forall x \in]-\infty, x_1] \cup]x_2, +\infty[$, $F(x) \neq \frac{1}{2}$.

$\forall x \in]-\infty, x_1] \cup]x_2, +\infty[$, $x \notin \Pi(X)$. Ainsi $\Pi(X) \subset]x_1, x_2[$.

Par conséquent $\Pi(X)$ est non vide et bornée.

Alors $\Pi(X)$ possède une borne supérieure b et une borne inférieure a.

Notons que $\Pi(X) \subset [a, b]$.

a est le plus grand des minorants de $\Pi(X)$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de $\Pi(X)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in \Pi(X)$, $x_n < a + \frac{1}{n}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \Pi(X)$ et $x_n < a + \frac{1}{n}$.

Mieux $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \Pi(X)$ et $a \leq x_n < a + \frac{1}{n}$.

Par encadrement on obtient la convergence de $(x_n)_{n\geq 1}$ vers a.

Comme F est continue en a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = F(a)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F(x_n) = \frac{1}{2}$. Ainsi $F(a) = \frac{1}{2}$ et $a \in \Pi(X)$.

On montre de la même manière que $b \in \Pi(X)$.

Nous avons $\Pi(X) \subset [a, b]$, $F(a) = F(b) = \frac{1}{2}$.

Alors $\forall x \in [a, b]$, $\frac{1}{2} = F(a) \leq F(x) \leq F(b) = \frac{1}{2}$. $\forall x \in [a, b]$, $F(x) = \frac{1}{2}$.

$\forall x \in [a, b]$, $x \in \Pi(X)$; $[a, b] \subset \Pi(X)$.

Finalement $\Pi(X) = [a, b]$.

c) $\Pi(X)$ est toujours un segment $[a, b]$.

f étant nulle sur $\overline{I}$, F vaut 0 sur $\mathbb{R}_- \cap \overline{I}$ et 1 sur $\mathbb{R}_+ \cap \overline{I}$

Comme $\forall x \in \Pi(X)$, $F(x) = \frac{1}{2}$: $\Pi(X) = [a, b] \subset I$.

f étant strictement positive sur I et continue, la restriction G de F à I est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $G'(x) = f(x) > 0$. G est strictement croissante sur I. F également.

Alors $a = b$ car $F(a) = F(b)$.

Ainsi $\Pi(X)$ est réduit à un point.

Q5 a) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$.

le cours indique que $F(0) = \frac{1}{2}$. De plus F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Alors $\Pi(X) = \{0\}$.

b) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Soit $m \in \mathbb{R}$.

$F(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \geq 0$ et $1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ \text{et} \\ -\lambda m = -\ln 2 \end{cases}$

$F(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

$\underline{\underline{\Pi(X) = \left\{ \frac{\ln 2}{\lambda} \right\}}}$.

(Q6) a) C'est clairement faux comme le montre l'exemple précédent.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $\Pi(X) = \left\{ \frac{\ln 2}{\lambda} \right\}$; $E(X) \notin \Pi(X)$.

b) On suppose que X est une variable du type $T1$.

$V(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - E(X))^2 P(X = k)$.

→ $\underline{m \geq E(X)}$.

Posons $I = \{ k \in \mathbb{Z} \mid k \geq m \}$.

$k \in I \Rightarrow k - E(X) \geq m - E(X) \geq 0$

$V(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - E(X))^2 P(X = k) \geq \sum_{k \in I} (k - E(X))^2 P(X = k) \geq \sum_{k \in I} (m - E(X))^2 P(X = k)$

$V(X) \geq (m - E(X))^2 \sum_{k \in I} P(X = k) = (m - E(X))^2 P(X \geq m) \underset{m \in \Pi(X)}{\geq} (m - E(X))^2 \times \frac{1}{2}$

Alors $(m - E(X))^2 \leq 2V(X)$

Ainsi $|m - E(X)| \leq \sqrt{2V(X)}$.

→ $\underline{m < E(X)}$. Posons $J = \{ k \in \mathbb{Z} \mid k \leq m \}$. $\sum_{k \in J} P(X = k) = P(X \leq m) \underset{m \in \Pi(X)}{\geq} 1/2$

$V(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - E(X))^2 P(X = k) \geq \sum_{k \in J} (k - E(X))^2 P(X = k) \geq \sum_{k \in J} (E(X) - m)^2 P(X = k) = (E(X) - m)^2 P(X \leq m)$

$k \in J \Rightarrow E(X) - k \geq E(X) - m \geq 0$

Alors $V(X) \geq (E(X) - m)^2 P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} (E(X) - m)^2$; $|E(X) - m| = |m - E(X)| \leq \sqrt{2V(X)}$.

Dans les deux cas $\underline{\underline{|m - E(X)| \leq \sqrt{2V(X)}}}$.

c) On suppose que X est du type T2. Soit $m \in \Pi(X)$.

Posons $Y = X - E(X)$ et $m' = m - E(X)$.

Alors Y est du type $T2$ et $m' \in \Pi(Y)$.

X possède un moment d'ordre 2. Il en est de même de Y.

$E(Y)$ existe et vaut 0 $(Y = X - E(X))$. $V(Y)$ existe et vaut $V(X)$.

Notons que $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(Y^2)$.

Montrer que $|m - E(X)|^2 \leq \sqrt{2V(X)}$ revient à montrer que $|m'| \leq \sqrt{2E(Y^2)}$

ou encore que $(m')^2 \leq 2E(Y^2)$. Soit g une densité de Y.

$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)\,dt \geq \int_{m'}^{+\infty} t^2 g(t)\,dt$ et $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)\,dt \geq \int_{-\infty}^{m'} t^2 g(t)\,dt$.

1er cas.. $m' \geq 0$. $E(Y^2) \geq \int_{m'}^{+\infty} t^2 g(t)\,dt \underset{t \geq m' \geq 0}{\geq} \int_{m'}^{+\infty} (m')^2 g(t)\,dt = (m')^2 P(Y \geq m') \underset{m' \in \Pi(Y)}{\geq} \frac{(m')^2}{2}$.

2e cas.. $m' \leq 0$. $E(Y^2) \geq \int_{-\infty}^{m'} t^2 g(t)\,dt \underset{t \leq m' \leq 0}{\geq} \int_{-\infty}^{m'} (m')^2 g(t)\,dt = (m')^2 P(Y \leq m') \geq \frac{(m')^2}{2}$.

Dans les deux cas $2E(Y^2) \geq (m'^2)$.

Ainsi on a encore : $|m - E(X)| \leq \sqrt{2V(X)}$.

PARTIE II

A

Q1 a) Notons que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad 1 - P_n(\lambda) = \frac{1}{n!}\int_0^\lambda e^{-t}\, t^n\, dt.$$

$\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(k)}(x) = e^x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à φ à l'ordre n donne :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \varphi(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\varphi^{(\ell)}(0)}{\ell!}\lambda^\ell + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad e^\lambda = \sum_{\ell=0}^{n}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^n}{n!} e^t\,dt \underset{u=\lambda-t}{=} \sum_{\ell=0}^{n}\frac{\lambda^\ell}{\ell} + \int_0^\lambda \frac{u^n}{n!} e^{\lambda-u}\,du$$

En multipliant par $e^{-\lambda}$ il vient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad 1 = P_n(\lambda) + e^{-\lambda}\int_0^\lambda \frac{u^n}{n!} e^{\lambda-u}\,du = P_n(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{u^n}{n!} e^{-u}\,du.$$

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 1 - P_n(\lambda) = \frac{1}{n!}\int_0^\lambda e^{-t}\,t^n\,dt$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^{nt}\,dt \underset{u=n(1-t)}{=} \int_n^0 \left(\frac{u}{n}\right)^n e^{n-u}\left(-\frac{1}{n}\right)du$.

$$I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}}\int_0^n e^{-u}u^n\,du = \frac{e^n}{n^{n+1}}\, n!\, \frac{1}{n!}\int_0^n e^{-u}u^n\,du = \frac{n!\,e^n}{n^{n+1}}\,(1 - P_n(n)).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad I_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+1}}(1 - P_n(n)) \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 1 - P_n(n) = \frac{n^{n+1}}{n!\,e^n} I_n$$

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - P_n(n) = \dfrac{n^{n+1}}{n!\,e^n} I_n$.

(Q2) φ est continue sur $]0,1[$. Montrons que φ est continue en 0.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0.

Donc $x - \ln(1+x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Alors $-x - \ln(1-x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$; $\frac{-x-\ln(1-x)}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$

Alors $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \frac{-x-\ln(1-x)}{x^2} = \frac{1}{2} = \varphi(0)$. φ est continue en 0.

Ainsi <u>φ est continue sur $[0,1[$</u>.

φ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x^4}\left[\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)x^2 + (x+\ln(1-x))2x\right]$

$\forall x\in]0,1[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x^3}\left[\frac{x^2}{1-x} + 2x + 2\ln(1-x)\right]$.

Posons $\forall x\in]0,1[$, $u(x) = \frac{x^2}{1-x} + 2x + 2\ln(1-x)$

u est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[$, $u'(x) = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} + 2 - \frac{2}{1-x}$

$\forall x\in]0,1[$, $u'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\left[2x-2x^2+x^2+2(1-x)^2-2(1-x)\right] = \frac{x^2}{(1-x)^2} > 0$.

u est strictement croissante sur $]0,1[$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x) = 0$.

Alors $\forall x\in]0,1[$, $u(x) > 0$

Ainsi $\forall x\in]0,1[$, $\varphi'(x) > 0$. Comme φ est continue sur $[0,1[$,

φ est strictement croissante sur $[0,1[$.

φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1[$ donc φ définit une bijection de $[0,1[$ sur l'intervalle $\varphi([0,1[)$.

$\varphi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \varphi(x) = +\infty$. Ainsi $\varphi([0,1[) = [\frac{1}{2},+\infty[$.

<u>φ définit une bijection de $[0,1[$ sur $[\frac{1}{2},+\infty[$.</u>

<u>Remarque</u> .. φ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et $\varphi'(0) = \frac{1}{3}$.

Q3 a) $\forall x \in [0,1[,\ \psi(x) \geq \frac{1}{2}$

$\forall x \in]0,1[,\ \frac{-x-\ln(1-x)}{x^2} \geq \frac{1}{2}$. $\forall x \in]0,1[,\ x+\ln(1-x) \leq -\frac{x^2}{2}$.

Ceci vaut encore pour $x=0$.

Alors $\underline{\underline{\forall x \in [0,1[,\ x+\ln(1-x) \leq -\frac{x^2}{2}}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0,1[,\ t+\ln(1-t) \leq -\frac{t^2}{2}$

$\forall t \in [0,1[,\ e^{t+\ln(1-t)} \leq e^{-t^2/2}$

$\forall t \in [0,1[,\ (1-t)e^t \leq e^{-t^2/2}$. Ceci vaut encore pour $t=1$.

Alors $\forall t \in [0,1],\ 0 \leq (1-t)e^t \leq e^{-t^2/2}$

Ainsi $\forall t \in [0,1],\ ((1-t)e^t)^n \leq e^{-nt^2/2}$.

Alors en intégrant il vient $I_n \leq \int_0^1 e^{-\frac{nt^2}{2}}dt \underset{u=\sqrt{n}t}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}du$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}$. Alors $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du$ existe et la parité de $u \mapsto e^{-u^2/2}$ permet de dire qu'elle vaut $\sqrt{2\pi}/2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Tout ceci, et la positivité de $u \mapsto e^{-u^2/2}$ permettent d'écrire :

$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2}du \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}}$.

c) $r \in]0,1[$ donc $\frac{1}{2r^2} \in]\frac{1}{2},+\infty[$. Ainsi $\psi^{-1}(\frac{1}{2r^2})$ existe et appartient à $]0,1[$. Donc $\delta \in]0,1[$.

$\forall t \in [0,\delta],\ \psi(t) \leq \psi(\delta)$. $\forall t \in]0,\delta],\ \frac{-\ln(1-t)-t}{t^2} \leq \psi(\delta)$.

$\forall t \in]0,\delta],\ -t^2\psi(\delta) \leq \ln(1-t)+t$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall t \in]0,\delta],\ e^{-nt^2\psi(\delta)} \leq (e^{\ln(1-t)+t})^n = ((1-t)e^t)^n$.

$\forall t \in]0,\delta]$, $e^{-nt^2\psi(\delta)} \leq ((1-t)e^t)^n$.

Ceci vaut encore pour $t=0$ car pour $t=0$:

$e^{-nt^2\psi(t)} = 1 = ((1-t)e^t)^n$.

Alors $\forall t \in [0,\delta]$, $e^{-nt^2\psi(\delta)} \leq ((1-t)e^t)^n$.

En intégrant il vient $\displaystyle\int_0^\delta e^{-nt^2\psi(\delta)}\,dt \leq \int_0^\delta ((1-t)e^t)^n\,dt$ car $\delta \geq 0$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\delta e^{-nt^2\psi(\delta)}\,dt \leq \int_0^\delta ((1-t)e^t)^n\,dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0,1]$, $((1-t)e^t)^n \geq 0$ et $\delta \in]0,1[$.

Alors $\displaystyle I_n = \int_0^1 ((1-t)e^t)^n\,dt \geq \int_0^\delta ((1-t)e^t)^n\,dt \geq \int_0^\delta e^{-nt^2\psi(\delta)}\,dt \underset{u=\sqrt{n\psi(\delta)}\,t}{=} \int_0^{\delta\sqrt{n\psi(\delta)}} e^{-u^2/2}\frac{1}{\sqrt{n\psi(\delta)}}\,du$.

$\displaystyle\sqrt{n\psi(\delta)} \underset{\delta=\psi^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right)}{=} \sqrt{n\,\frac{1}{2\gamma^2}} = \frac{\sqrt{n}}{\gamma}$.

Par conséquent : $\displaystyle I_n \geq \int_0^{\frac{\delta\sqrt{n}}{\gamma}} e^{-u^2/2}\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\,du = \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\int_0^{\frac{\delta\sqrt{n}}{\gamma}} e^{-u^2/2}\,du \geq \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\,du$.

$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \mathbb{R},\ e^{-u^2/2} \geq 0 \\ \frac{\delta\sqrt{n}}{\gamma} \geq \delta\sqrt{n} \text{ car } \frac{1}{\gamma} \geq 1 \end{array} \right.$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\,du \leq I_n$.

Q4 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \gamma \in]0,1[$, $\displaystyle\delta = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right) \Rightarrow \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \gamma \in]0,1[$, $\displaystyle\delta = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right) \Rightarrow \gamma\int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \leq \sqrt{n}\,I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \gamma \in]0,1[$, $\displaystyle\delta = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\gamma\int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\,du \leq \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \leq 1$.

Montrons en utilisant la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1$.

Observons que si $S \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{S\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = I_n / \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Remarquons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant p \Rightarrow |t_n - 1| < \varepsilon$ ou $1-\varepsilon < t_n < 1+\varepsilon$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \leqslant 1$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant p \Rightarrow 1-\varepsilon < t_n$.

Fixons ε dans $\mathbb{R}^*_+$. Soit z un élément de $]0, \min(1, \frac{\varepsilon}{2})[$.

$z \in]0,1[$ et $z < \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $\gamma = 1-z$. $\gamma \in]0,1[$ et $1-\frac{\varepsilon}{2} < \gamma$.

Posons $S = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2\gamma^2}\right)$. Alors $S \in]0,1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \gamma \int_0^{S\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\,du\right) = \gamma$.

Ainsi $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant p \Rightarrow \gamma - \frac{\varepsilon}{2} < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \gamma \int_0^{S\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\,du < \gamma + \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $1-\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \gamma - \frac{\varepsilon}{2} < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \gamma \int_0^{S\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\,du \leqslant t_n \leqslant 1$

$\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $1-\varepsilon < t_n \leqslant 1$. $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $1-\varepsilon < t_n < 1+\varepsilon$.

$\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $|t_n - 1| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n \geqslant p \Rightarrow |t_n - 1| < \varepsilon$. $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 1$.

Ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1$. Soit : $\underline{\underline{I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}}$.

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - P_n(n) = \frac{n^{n+1}}{n!\, e^n} I_n$.

Alors $1 - P_n(n) \sim \frac{n^{n+1}}{n!\, e^n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$; ou encore : $\underline{\underline{1 - P_n(n) \sim \frac{n^n}{n!} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}}}$.

B

(Q1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors le cours (+ une récurrence simple) montre que S_n suit une loi de Poisson de paramètre $1+1+\dots+1 = n$ (!).

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n).$

(Q2) Le théorème de la limite centrée indique que $\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

En particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{2}.$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n - E(S_n) \leq 0) = \frac{1}{2}$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n - n \leq 0) = \frac{1}{2}$ car

$E(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n.$

Donc $\frac{1}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} P(S_n = k) \underset{S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{\ell=0}^{n} \frac{n^\ell}{\ell!} e^{-n}\right)$

ie : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}.$

(Q3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - P_n(n)) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\quad 1 - P_n(n) \sim \frac{1}{2}.$

Alors $\frac{n^n}{n!} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \sim \frac{1}{2}$; $\quad n! \sim 2\, n^n e^{-n} \sqrt{\frac{\pi n}{2}} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$

Ainsi $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. C'est STIRLING !

$\boxed{C}$

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P_n(\lambda)+P_n'(\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} - e^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} + e^{-\lambda}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell\lambda^{\ell-1}}{\ell!}$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P_n(\lambda)+P_n'(\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\lambda^{\ell-1}}{(\ell-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} = P_{n-1}(\lambda)$.

Ainsi $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ P_n(\lambda)+P_n'(\lambda) = P_{n-1}(\lambda).}$

Q2 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. P_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = P_n(a) + (x-a)P_n'(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^1}{1!}P_n''(t)\,dt$

Alors $P_n(n) = \underbrace{P_n(n-1) + P_n'(n-1)}_{Q1} + \int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,dt$

Ou $P_n(n) = P_{n-1}(n-1) + \int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,dt$.

$\forall t \in [n-1,n]$, $P_n(t) = e^{-t}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{t^\ell}{\ell!}$. Leibniz donne alors

$\forall t \in [n-1,n]$, $P_n''(t) = e^{-t}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{t^\ell}{\ell!} + 2(-e^{-t})\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell t^{\ell-1}}{\ell!} + e^{-t}\sum_{\ell=2}^{n}\frac{\ell(\ell-1)t^{\ell-2}}{\ell!}$

$\forall t \in [n-1,n]$, $P_n''(t) = e^{-t}\left[\sum_{\ell=0}^{n}\frac{t^\ell}{\ell!} - 2\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{t^\ell}{\ell!} + \sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{t^\ell}{\ell!}\right] = e^{-t}\left[\frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - 2\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]$

$\forall t \in [n-1,n]$, $P_n''(t) = e^{-t}\left[\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right] = \frac{t^{n-1}e^{-t}}{n!}(t-n)$.

Alors $\forall t \in [n-1,n]$, $P_n''(t) \leq 0$ et $(n-t) \geq 0$.

$\forall t \in [n-1,n]$, $(n-t)P_n''(t) \leq 0$. En intégrant on obtient $\int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,dt \leq 0$.

Mieux $\int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,dt < 0$ car $t \mapsto (n-t)P_n''(t)$ n'est pas identiquement nulle sur sur $[n-1,n]$ tout en étant continue sur cet intervalle !

Alors $P_n(n) - P_{n-1}(n-1) = \int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,dt < 0$.

$\underline{(P_n(n))_{n\geq 0}\text{ est strictement décroissante.}}$

b) Reprenons rapidement les arguments précédents.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P_n(n+1) = P_n(n) + (n+1-n)P_n'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) P_n''(t)\,dt$$

$$P_n(n+1) = P_{n-1}(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) \frac{t^{n-1}e^{-t}}{n!} (t-n)\,dt.$$

$\forall t \in [n,n+1]$, $(n+1-t) \frac{t^{n-1}e^{-t}}{n!}(t-n) \geqslant 0$ donc $\int_n^{n+1} (n+1-t)\frac{t^{n-1}e^{-t}}{n!}(t-n)\,dt \geqslant 0$.

Mieux $\int_n^{n+1} (n+1-t)\frac{t^{n-1}e^{-t}}{n!}(t-n)\,dt > 0$ car $t \mapsto (n+1-t)\frac{t^{n-1}e^{-t}}{n!}(t-n)$ est positive, non identiquement nulle sur $[n,n+1]$ et continue sur $[n,n+1]$.

Alors $P_n(n+1) - P_{n-1}(n) > 0$.

Ainsi $(P_n(n+1))_{n \geqslant 0}$ est strictement croissante.

c) Ce qui précède montre largement que $(P_n(n))_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante et $(P_{n-1}(n))_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(n) - P_{n-1}(n) = e^{-n}\frac{n^n}{n!} \underset{\boxed{e}\ Q3}{\sim} e^{-n}n^n\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(P_n(n) - P_{n-1}(n)) = 0$

Ceci achève de montrer que $((P_{n-1}(n))_{n\geqslant 1}, (P_n(n))_{n\geqslant 1})$ est un couple de suites adjacentes.

Q3 Rappelons que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$. Ce qui précède permet alors d'écrire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n-1}(n) < \frac{1}{2} < P_n(n)$.

Alors $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}e^{-n} < \frac{1}{2} < \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Fixons alors n dans $\mathbb{N}^*$ et considérons une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre n.

$$P(X\leq n-1)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!}e^{-n}<\frac{1}{2}<\sum_{\ell=0}^{n}\frac{n^\ell}{\ell!}e^{-n}=P(X\leq n).$$

Alors $P(X<n)<\frac{1}{2}<P(X\leq n)$. Ainsi $n\in\Pi(X)$.

Soit x un réel distinct de n.

Si $x<n$, $P(X\leq x)\leq P(X\leq n-1)<\frac{1}{2}$ et $x\notin\Pi(X)$

Si $x>n$, $P(X\geq x)\leq P(X\geq n+1)=1-P(X<n+1)=1-P(X\leq n)<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $x\notin\Pi(X)$

Finalement $\underline{\underline{\Pi(X)=\{n\}}}$

PARTIE III

Q1 Si $k=n$, $T_n-T_k=0$ donc T_n-T_k est du type I et $0\in\Pi(T_n-T_k)$ (car $P(T_n-T_k\geq0)=P(T_n-T_k\leq0)=1\geq1/2$).

Supposons $k\in[\![1,n-1]\!]$ et envisageons les trois cas.

<u>**H1.**</u> $E(X_1)=0$ donc $Y_1=X_1$.

De même $\forall j\in\mathbb{N}^*$, $Y_j=X_j$.

$Y_{k+1},Y_{k+2},\ldots,Y_n$ sont indépendantes et suivent une loi normale centrée réduite.

Alors $T_n-T_k=Y_{k+1}+Y_{k+2}+\cdots+Y_n\hookrightarrow\mathcal{N}(0+0+\cdots+0,\sqrt{1^2+1^2+\cdots+1})$

$T_n-T_k\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\sqrt{n-k})$.

<u>T_n-T_k est du type T2</u>. Notons que $\dfrac{T_n-T_k}{\sqrt{n-k}}\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$.

Ainsi $\Pi\left(\dfrac{T_n-T_k}{\sqrt{n-k}}\right)=\{0\}$. Alors $\Pi(T_n-T_k)=\{\sqrt{n-k}\times0\}=\{0\}$.

<u>0 est une médiane de T_n-T_k.</u>

H2 $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$. $E(X_1)=1$. $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $Y_j = X_j - 1$.

$T_n - T_\ell = X_{\ell+1}+X_{\ell+2}+\dots+X_n-(n-\ell)$.

T_n-T_ℓ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$; T_n-T_ℓ est du type T1.

$X_{\ell+1}, X_{\ell+2},\dots,X_n$ sont indépendantes et suivent la loi de Poisson de paramètre 1.

Alors $X_{\ell+1}+X_{\ell+2}+\dots+X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $n-\ell$.

Ainsi $\mathcal{M}(X_{\ell+1}+X_{\ell+2}+\dots+X_n)=\{n-\ell\}$ d'après II C.

Par conséquent $\mathcal{M}(T_n-T_\ell)=\mathcal{M}(X_{\ell+1}+X_{\ell+2}+\dots+X_n-(n-\ell))=\{n-\ell-(n-\ell)\}=\{0\}$.

0 est une médiane de T_n-T_ℓ.

H3 $\frac{X_1}{2}\hookrightarrow \mathcal{B}(1,\frac{1}{2})$. $E(X_1/2)=\frac{1}{2}$; $E(X_1)=1$.

$T_n-T_\ell = X_{\ell+1}+\dots+X_n-(n-\ell) = 2\left[\frac{1}{2} X_{\ell+1}+\frac{1}{2} X_{\ell+2}+\dots+\frac{1}{2} X_n\right]-(n-\ell)$.

T_n-T_ℓ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. T_n-T_ℓ est du type T_1.

$\frac{1}{2}X_{\ell+1}, \frac{1}{2}X_{\ell+2},\dots,\frac{1}{2}X_n$ sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre 1/2.

Alors $\frac{1}{2}X_{\ell+1}+\frac{1}{2}X_{\ell+2}+\dots+\frac{1}{2}X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n-\ell,\frac{1}{2})$.

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}X_{\ell+1}+\frac{1}{2}X_{\ell+2}+\dots+\frac{1}{2}X_n\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I Q2}}}{=} \begin{cases} \frac{n-\ell}{2} \text{ si } n-\ell \text{ est pair} \\ \left[\frac{n-\ell-1}{2}, \frac{n-\ell-1}{2}+1\right] \end{cases}$$

Dans les deux cas $\frac{n-\ell}{2}$ est une médiane de $\frac{1}{2}(X_{\ell+1}+X_{\ell+2}+\dots+X_n)$.

Alors $2\left(\frac{n-\ell}{2}\right)-(n-\ell)$ est une médiane de $T_n-T_\ell = 2\left[\frac{1}{2}X_{\ell+1}+\frac{1}{2}X_{\ell+2}+\dots+\frac{1}{2}X_n\right]-(n-\ell)$

Ainsi 0 est une médiane de T_n-T_ℓ.

Q2 a) • Soit $\omega \in \{T_n - T_\ell \geq 0\} \cap \mathcal{R}_\ell$

$(T_n - T_\ell)(\omega) \geq 0$, $\max\limits_{1\leq j\leq \ell-1} T_j(\omega) \leq x$ et $T_\ell(\omega) > x$ (à un abus près).

Alors $T_n(\omega) \geq T_\ell(\omega) > x$ et $\omega \in \mathcal{R}_\ell$ donc $\omega \in \{T_n > x\} \cap \mathcal{R}_\ell$.

$$\underline{\underline{\{T_n - T_\ell \geq 0\} \cap \mathcal{R}_\ell \subset \{T_n > x\} \cap \mathcal{R}_\ell.}}$$

• Soit $\omega \in \{T_n > x+\varepsilon\} \cap \mathcal{R}_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}$

$T_n(\omega) > x+\varepsilon$, $\max\limits_{1\leq j\leq \ell-1} T_j(\omega) \leq x$, $T_\ell(\omega) > x$ et $Y_\ell(\omega) < \varepsilon$.

Alors $\omega \in \mathcal{R}_\ell$ et $T_n(\omega) - T_\ell(\omega) = T_n(\omega) - Y_\ell(\omega) - T_{\ell-1}(\omega) > x+\varepsilon-\varepsilon-x = 0$.

donc $\omega \in \mathcal{R}_\ell \cap \{T_n - T_\ell > 0\}$. $\quad T_n(\omega) > x+\varepsilon$, $-Y_\ell(\omega) > -\varepsilon$ et $-T_{\ell-1}(\omega) \geq -x$

Par conséquent $\underline{\underline{\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \mathcal{R}_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\} \subset \{T_n - T_\ell > 0\} \cap \mathcal{R}_\ell.}}$

• $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes par conséquent les événements

$\{\max\limits_{1\leq j\leq \ell-1} T_j \leq x\} \cap \{T_\ell > x\}$ et $\{\sum\limits_{j=\ell+1}^{n} Y_j \geq 0\}$ (resp. $\{\sum\limits_{j=\ell+1}^{n} Y_j > 0\}$) sont

indépendants.

$\underline{\underline{\text{Ainsi les événements } \mathcal{R}_\ell \text{ et } \{T_n - T_\ell \geq 0\} \text{ (resp. } \{T_n - T_\ell > 0\}) \text{ sont indépendants.}}}$

▲ ...

b) Notons que les événements $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$ sont deux à deux disjoints

$\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $\{T_n - T_\ell \geq 0\} \cap \mathcal{R}_\ell \subset \{T_n > x\} \cap \mathcal{R}_\ell$.

Alors $\bigcup\limits_{\ell=1}^{n} (\{T_n - T_\ell \geq 0\} \cap \mathcal{R}_\ell) \subset \bigcup\limits_{\ell=1}^{n} (\{T_n > x\} \cap \mathcal{R}_\ell) = \{T_n > x\} \cap \bigcup\limits_{\ell=1}^{n} \mathcal{R}_\ell = \{T_n > x\}$

Alors $P\left(\bigcup\limits_{\ell=1}^{n} (\{T_n - T_\ell \geq 0\} \cap \mathcal{R}_\ell)\right) \leq P(T_n > x)$; l'union étant disjointe :

$$\sum_{\ell=1}^{n} P(\{T_n - T_\ell \geq 0\} \cap \mathcal{R}_\ell) \leq P(T_n > x).$$

▲ La question $\{T_n > x\} = \bigcup\limits_{\ell=1}^{n} (\{T_n > x\} \cap \mathcal{R}_\ell)$ a été rajoutée ; cette égalité est utilisée dans ce qui suit.

Par indépendance il vient alors $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} P(T_n - T_\ell \geq 0)\, P(\Omega_\ell) \leq P(T_n > x)$

Or $0 \in \Pi(T_n - T_\ell)$ pour tout ℓ dans $[\![1,n]\!]$ donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $P(T_n - T_\ell \geq 0) \geq \frac{1}{2}$.

Alors $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} P(\Omega_\ell) \leq P(T_n > x)$ ou $\displaystyle\frac{1}{2} P\Big(\bigcup_{\ell=1}^{n} \Omega_\ell\Big) \leq P(T_n > x)$

▲ Observons alors que :

$\{\max_{1\leq j\leq n} T_j > x\} = \{T_1 > x\} \cup (\{T_1 \leq x\} \cap \{T_2 > x\}) \cup \dots \cup (\{T_1 \leq x\} \cap \dots \cap \{T_{n-1} \leq x\} \cap \{T_n > x\})$

$\{\max_{1\leq j\leq n} T_j > x\} = \{T_1 > x\} \cup (\{\max_{1\leq j\leq 2-1} T_j \leq x\} \cap \{T_2 > x\}) \cup \dots \cup (\{\max_{1\leq j\leq n-1} T_j \leq x\} \cap \{T_n > x\})$

Alors $\{\max_{1\leq j\leq n} T_j > x\} = \displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{n} \Omega_\ell$. ← répond au dernier point de ça non ?

Par conséquent $\displaystyle\frac{1}{2} P(\max_{1\leq j\leq n} T_j > x) \leq P(T_n > x)$.

$\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\} \subset \{T_n - T_\ell > 0\} \cap \Omega_\ell$ — I indépendance...

$\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}) \leq P(T_n - T_\ell > 0)\, P(\Omega_\ell)$

$\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}) \leq \sum_{\ell=1}^{n} P(T_n - T_\ell > 0)\, P(\Omega_\ell)$

$P(T_n - T_\ell \leq 0) \geq \frac{1}{2}$ car $0 \in \Pi(T_n - T_\ell)$ donc $1 - P(T_n - T_\ell > 0) \geq \frac{1}{2}$.

Alors $P(T_n - T_\ell > 0) \leq \frac{1}{2}$

Par conséquent $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} P(T_n - T_\ell > 0)\, P(\Omega_\ell) \leq \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} P(\Omega_\ell) = \frac{1}{2} P\Big(\bigcup_{\ell=1}^{n} \Omega_\ell\Big) = P(\max_{1\leq j\leq n} T_j > x)$

Donc $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}) \leq \frac{1}{2} P(\max_{1\leq j\leq n} T_j > x)$.

Or $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell) = P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}) +$

$P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell \geq \varepsilon\})$.

Alors $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell) \leq P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}) + P(Y_\ell \geq \varepsilon)$.

Ainsi $\sum_{\ell=1}^{n} P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}) \geq \sum_{\ell=1}^{n} P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell) - \sum_{\ell=1}^{n} P(Y_\ell \geq \varepsilon)$.

Notons que $\sum_{\ell=1}^{n} P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell) = P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap (\bigcup_{\ell=1}^{n} \Omega_\ell)) = P(T_n > x+\varepsilon)$.

Alors $\sum_{\ell=1}^{n} P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}) \geq P(T_n > x+\varepsilon) - \sum_{\ell=1}^{n} P(Y_\ell \geq \varepsilon)$

Par conséquent :

$$P(T_n > x+\varepsilon) - \sum_{\ell=1}^{n} P(Y_\ell \geq \varepsilon) \leq \sum_{\ell=1}^{n} P(\{T_n > x+\varepsilon\} \cap \Omega_\ell \cap \{Y_\ell < \varepsilon\}) \leq \frac{1}{2} P(\max_{1 \leq j \leq n} T_j > x)$$

Finalement :

$$P(T_n > x+\varepsilon) - \sum_{\ell=1}^{n} P(Y_\ell \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{2} P(\max_{1 \leq j \leq n} T_j > x) \leq P(T_n > x).$$

Q3 • On suppose H1. $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $X_\ell \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

si $t \geq \theta\sqrt{n}$: $\frac{t}{\theta\sqrt{n}} \geq 1$!

donc $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $Y_\ell = X_\ell - E(X_\ell) = X_\ell \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. $P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\theta\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta\sqrt{n}}^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt$

$P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) \leq \frac{1}{\theta\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-t^2/2}\right]_{\theta\sqrt{n}}^{"+\infty"} = \frac{1}{\theta\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n\theta^2/2}$.

Intégrale convergente... $E(X_\ell)$ existe !

Alors $0 \leq \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) \leq \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \frac{n}{\sqrt{n}} e^{-n\theta^2/2} = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \sqrt{n}\, e^{-n\theta^2/2}$.

Or par croissance comparée $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \sqrt{n}\, e^{-n\theta^2/2} \right) = 0$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) = 0$.

• Supposons H2. $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $X_\ell \hookrightarrow \mathcal{G}(1)$

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $Y_\ell = X_\ell - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) = n\, P(Y_1 \geq \theta\sqrt{n}) = n\, P(X_1 \geq \theta\sqrt{n}+1)$.

Alors $0 \leq \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) = n\, P(X_1 \geq \theta\sqrt{n}+1) \leq n\, P(X_1 \geq \mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n}+1))$.

$\theta\sqrt{n}+1 \geq \mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n}+1) = \mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+1$.

Ainsi $0 \leq \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) \leq n \sum_{\ell=\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+1}^{+\infty} P(X_1 = \ell) = n \sum_{\ell=\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+1}^{+\infty} \frac{1^\ell}{\ell!} e^{-1}$.

$0 \leq \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) \leq e^{-1}\, n \sum_{\ell=\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}$.

$h : x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| h(x) - \sum_{\ell=0}^{p} \frac{x^\ell}{\ell!} h^{(\ell)}(0) \right| \leq \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \max_{t \in \overleftrightarrow{[0,x]}} |h^{(p+1)}(t)|$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| e^x - \sum_{\ell=0}^{p} \frac{x^\ell}{\ell!} \right| \leq \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \max_{t \in [0,x]} |e^t| = \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \max_{t \in [0,x]} e^t$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \sum_{\ell=p+1}^{+\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} \right| \leq \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \max_{t \in [0,x]} e^t$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\max_{t \in [0,x]} e^t = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\max_{t \in [0,x]} e^t = e^{\max(0,x)} \leq e^{|x|}$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \sum_{\ell=p+1}^{+\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} \right| \leq \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} e^{|x|}$.

En particulier $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=p+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = \left| \sum_{\ell=p+1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \right| \leq \frac{1}{(p+1)!} e$.

Alors $0 \leq \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) \leq e^{-1} \times n \times \frac{1}{(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+2)!} e = \frac{n}{(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+2)!}$.

Notons que $(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+2)! = ((\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n}))!)(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+1+1)(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+1)$

$(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n})+2)! \geq (\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n}))!\, (\theta\sqrt{n})(\theta\sqrt{n})$ ok ?

Alors $0 \leq \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) \leq \frac{n}{\theta\sqrt{n}\,\theta\sqrt{n}} \frac{1}{(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n}))!} = \frac{1}{\theta^2} \frac{1}{(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n}))!}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\theta^2} \frac{1}{(\mathrm{Ent}(\theta\sqrt{n}))!} = 0$ donc par encadrement $\underline{\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) = 0}$.

• Supposons H_3. $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\frac{X_\ell}{\ell} \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$. $E(X_\ell) = \frac{1}{2} \times \ell = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) = n P(Y_1 \geq \theta\sqrt{n}) = n\, P(X_1 - 1 \geq \theta\sqrt{n})$

$\sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) = n\, P(X_1 \geq 1 + \theta\sqrt{n}) = 0$!!

Alors, pour la troisième fois, $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) = 0}}$.

Q4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j = \sum_{j=1}^{n} [X_j - E(X_j)] = \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} E(X_j)$

Posons $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. $T_n = S_n - \sum_{j=1}^{n} E(X_j) = S_n - E(\sum_{j=1}^{n} X_j) = S_n - E(S_n)$

Notons que pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $V(X_\ell)$ existe (H_1, H_2 ou H_3...) et $V(X_\ell) > 0$.

Alors 1/ $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ;

2/ les variables aléatoires de cette suite ont la même loi ;

3/ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_\ell)$ et $V(X_\ell)$ existent, et $V(X_\ell) > 0$.

Le théorème de la limite centrée prouve que la suite de terme général $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{T_n}{\sqrt{n V(X_1)}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

Observons que pour H_1 : $V(X_1)=1$;
pour H_2 : $V(X_1)=1$;
pour H_3 : $V(X_1)=V(2\frac{X_1}{2})=4V(\frac{X_1}{2})=4\times\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=1$!

Alors $S_n^* = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$. Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n^*\leq x)=\lim\limits_{n\to+\infty} P(\frac{T_n}{\sqrt{n}}\leq x)=\phi(x)$.

où $\forall x\in\mathbb{R}$, $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\frac{T_n}{\sqrt{n}}>x) = 1-\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n>\sqrt{n}\,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = 1-\phi(x)$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+$. Le but est de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\max\limits_{1\leq j\leq n} T_j>\lambda\sqrt{n})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$

ou que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}P(\max\limits_{1\leq j\leq n} T_j>\lambda\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\lambda^{+\infty}e^{-t^2/2}dt = 1-\phi(\lambda)$

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\left[\frac{1}{2}P(\max\limits_{1\leq j\leq n}T_j>\lambda\sqrt{n})-1+\phi(\lambda)\right]$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$. Fixons ε dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit $\theta\in\mathbb{R}_+^*$. D'après Q2 b)

$P(T_n>(\lambda+\theta)\sqrt{n})-\sum\limits_{j=1}^{n}P(Z_j\geq\theta\sqrt{n})\leq\frac{1}{2}P(\max\limits_{1\leq j\leq n}T_j>\lambda\sqrt{n})\leq P(T_n>\lambda\sqrt{n})$.

Rappelons que $\lim\limits_{n\to+\infty}P(T_n>\lambda\sqrt{n})=1-\phi(\lambda)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}P(T_n>(\lambda+\theta)\sqrt{n})=1-\phi(\lambda+\theta)$.

Or $1-\phi(\lambda)-(1-\phi(\lambda+\theta))=\underbrace{\phi(\lambda+\theta)-\phi(\lambda)}_{\geq 0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\lambda^{\lambda+\theta}e^{-t^2/2}dt\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\lambda^{\lambda+\theta}dt=\frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}$

Donc $0\leq 1-\phi(\lambda)-(1-\phi(\lambda+\theta))\leq\frac{\theta}{2\pi}$.

Choisissons alors <u>UN</u> θ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{\theta}{2\pi}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $1-\phi(\lambda)-(1-\phi(\lambda+\theta))<\frac{\varepsilon}{2}$ <u>ou</u> $1-\phi(\lambda+\theta)-(1-\phi(\lambda))>-\frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \frac{1}{2} P(\max_{1 \le j \le n} T_j > \lambda \sqrt{n}) - 1 + \phi(\lambda) \le \underbrace{P(T_n > \lambda\sqrt{n}) - (1 - \phi(\lambda))}_{\alpha_n}$$

$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_1 \Rightarrow \alpha_n < \varepsilon$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_1 \Rightarrow u_n < \varepsilon$.

$$u_n = \frac{1}{2} P(\max_{1 \le j \le n} T_j > \lambda\sqrt{n}) - 1 + \phi(\lambda) \geq P(T_n > (\lambda + \theta)\sqrt{n}) - \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) - (1 - \phi(\lambda)).$$

$$u_n \geq \Big(P(T_n \geq (\lambda+\theta)\sqrt{n}) - (1 - \phi(\lambda+\theta)) \Big) - \sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n}) + 1 - \phi(\lambda+\theta) - (1 - \phi(\lambda)).$$

Donc $u_n > \underbrace{P(T_n \geq (\lambda+\theta)\sqrt{n}) - (1 - \phi(\lambda+\theta))}_{\beta_n} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} P(Y_j \geq \theta\sqrt{n})}_{\sigma_n} - \frac{\varepsilon}{2}$.

a $\lim_{n \to +\infty} \beta_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = 0$ (d'après Q3).

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} (\beta_n + \sigma_n) = 0$.

Alors $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow |\beta_n + \sigma_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < \beta_n + \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow -\varepsilon < \beta_n + \sigma_n - \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_2 \Rightarrow -\varepsilon < u_n$.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow -\varepsilon < u_n < \varepsilon$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$.

Ceci achève de prouver que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$; c'est à dire

que $\lim_{n \to +\infty} P(\max_{1 \le j \le n} T_j > \lambda\sqrt{n}) = 2(1 - \phi(\lambda)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, dt$.