PARTIE I Quelques éléments sur les n-combinaisons.

Q1 a) $A_3 = [\![1,3]\!]$.

Il y a une 3-combinaison contenant une partie : $(\{1,2,3\})$.

Il y a 6 3-combinaisons contenant deux parties : $(\{1,2\},\{3\})$, $(\{3\},\{1,2\})$, $(\{2,3\},\{1\})$, $(\{1\},\{2,3\})$, $(\{3,1\},\{2\})$, $(\{2\},\{3,1\})$.

Il y a 6 3-combinaisons contenant trois parties : $(\{1\},\{2\},\{3\})$, $(\{1\},\{3\},\{2\})$, $(\{2\},\{1\},\{3\})$, $(\{2\},\{3\},\{1\})$, $(\{3\},\{1\},\{2\})$, $(\{3\},\{2\},\{1\})$.

Finalement $a_3 = 1+6+6 = 13$. $\underline{a_3 = 13}$.

b) Constituer une n-combinaison où toutes les parties sont des singletons c'est ordonner les n singletons $\{1\},\{2\},\dots,\{n\}$.

Ainsi il y a $n!$ n-combinaisons où toutes les parties sont des singletons.

c) S'il existe une n-combinaison où toutes les parties sont des paires nécessairement n est un entier pair.

Supposons que n est pair. $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $n = 2p$.

Pour constituer une 2p-combinaison où toutes les parties sont des paires on choisit la première paire : C_{2p}^2 possibilités ; on choisit la second paire : C_{2p-2}^2 possibilités ; … ; on choisit la $k^{ième}$ paire : $C_{2p-2(k-1)}^2$ possibilités ; … ; on choisit la dernière paire : C_2^2 possibilité.

Ainsi il y a $C_{2p}^2 C_{2p-2}^2 \cdots C_2^2$ 2p-combinaisons ne contenant que des paires.

$$C_{2p}^2 C_{2p-2}^2 \cdots C_2^2 = \frac{(2p)(2p-1)}{2} \times \frac{(2p-2)(2p-3)}{2} \times \cdots \times \frac{2\times 1}{2} = \frac{(2p)!}{2^p}.$$

Si n est impair il n'y a pas de n-combinaison ne contenant que des paires.

Si n est pair il y a $\dfrac{n!}{2^{n/2}}$ n-combinaisons ne contenant que des paires.

d) Une n-combinaison contenant exactement deux parties est un couple $(A,\bar{A})$ où A est une partie non vide de $[\![1,n]\!]$ distincte de $[\![1,n]\!]$.

Ainsi il y a autant de n-combinaisons contenant exactement deux parties que de parties de $[\![1,n]\!]$ non vides et distinctes de $[\![1,n]\!]$.

Il y a 2^n-2 n-combinaisons contenant exactement deux parties.

Q2 a) $k\in[\![1,n-1]\!]$ et P_1 est une partie fixée de A_n ayant k éléments.
Pour construire une n-combinaison dont la première partie est P_1 il suffit de juxtaposer P_1 et une $(n-k)$-combinaison de A_n-P_1.

Il y a donc a_{n-k} n-combinaisons dont la première partie est P_1.

Si $k=n$ il y a une seule n-combinaison dont la "première" partie est P_1 ; comme $a_{n-n}=a_0=1$, le résultat précédent vaut encore pour $k=n$.

b) Notons $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des n-combinaisons.
Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, notons $\mathcal{C}_n^k$ l'ensemble des n-combinaisons dont la première partie contient k éléments.
$\mathcal{C}_n=\bigcup_{k=1}^{n}\mathcal{C}_n^k$ et cette union est disjointe. Alors $a_n=\operatorname{card}\mathcal{C}_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{card}\mathcal{C}_n^k$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Nous avons vu qu'il y a a_{n-k} n-combinaisons dont la première partie est une partie fixée ayant k éléments. Comme le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ ayant k éléments est C_n^k, il y a $C_n^k\,a_{n-k}$ n-combinaisons dont la première partie a k éléments.

$\operatorname{card}\mathcal{C}_n^k=C_n^k\,a_{n-k}$.

Ainsi $a_n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\,a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{n-k}\,a_k=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\,a_k$.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\,a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\,a_k.$$

$a_0=a_1=1$. $a_2=\sum_{k=0}^{1}C_2^k\,a_k=C_2^0\,a_0+C_2^1\,a_1=1+2\times1=3$. $a_2=3$.

$a_3 = \sum_{k=0}^{2} C_3^k a_k = C_3^0 a_0 + C_3^1 a_1 + C_3^2 a_2 = 1 + 3\times 1 + 3\times 3 = 13$. $\underline{\underline{a_3 = 13.}}$

$a_4 = \sum_{k=0}^{3} C_4^k a_k = C_4^0 a_0 + C_4^1 a_1 + C_4^2 a_2 + C_4^3 a_3 = 1 + 4\times 1 + 6\times 3 + 4\times 13 = 75$. $\underline{\underline{a_4 = 75.}}$

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_n = \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} C_n^k a_{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}.}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$; $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Alors $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} = e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1$. $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} = 1.}}$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}$.

. C'est vrai pour $n = 0$ car $b_0 = \frac{a_0}{0!} = 1 \leq \frac{1}{1} = \frac{1}{(\ln 2)^0}$.

. Supposons la propriété vraie jusqu'à n, n étant un élément de $\mathbb{N}$.

Montrons la pour $n+1$. Notons que $n+1 \geq 1$.

$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k!}$. Or $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $n+1-k \in [\![0, n]\!]$ donc

l'hypothèse de récurrence donne : $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $b_{n+1-k} \leq \frac{1}{(\ln 2)^{n+1-k}}$.

Ainsi $b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \frac{1}{(\ln 2)^{n+1-k}} = \frac{1}{(\ln 2)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$.

$b_{n+1} \leq \frac{1}{(\ln 2)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^{n+1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} = \frac{1}{(\ln 2)^{n+1}}$. Ainsi s'achève

la récurrence.

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}.}}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}$; $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n!\, b_n \leq \frac{n!}{(\ln 2)^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons vu qu'il y a $n!$ n-combinaisons construites de singletons. Nécessairement $a_n \geq n!$. Ceci vaut encore pour $n=0$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ n! \leq a_n \leq \frac{n!}{(\ln 2)^n}$.

---

d) $\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = e^x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre n donne :

$$\left|\varphi(\ln 2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln 2 - 0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(0)\right| \leq \frac{|\ln 2 - 0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{u \in [0, \ln 2]} |\varphi^{(n+1)}(u)|.$$

Alors $\left|e^{\ln 2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!}\right| \leq \frac{|\ln 2|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{u \in [0, \ln 2]} e^u = \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!} \times 2$.

Ainsi $e^{\ln 2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq \left|e^{\ln 2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!}\right| \leq 2 \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{\ln 2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq 2 \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leq 2 \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \geq 1 - 2 \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geq \frac{1}{2(\ln 2)^n}$.

- C'est clair pour $n=0$ car $b_0 = 1 \geq \frac{1}{2} = \frac{1}{2(\ln 2)^0}$.
- Supposons que la propriété est vraie jusqu'à n pour n dans $\mathbb{N}$.

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k!} \underset{b_0=1}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n+1-k}}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \underset{\text{HR } (\forall k \in [\![1,n]\!],\ n+1-k \in [\![1,n]\!])}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(\ln 2)^{n+1-k}\, k!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$b_{n+1} \geq \frac{1}{2(\ln 2)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \geq \frac{1}{2(\ln 2)^{n+1}} \left[1 - 2\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\right] + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Donc $b_{n+1} \geq \frac{1}{2(\ln 2)^{n+1}}$ ce qui achève la récurrence.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2(\ln 2)^n} \leq b_n \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}$ et $\frac{n!}{2(\ln 2)^n} \leq a_n \leq \frac{n!}{(\ln 2)^n}$.

Partie II : Série entière associée à la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Q1 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|x|^n}{2(\ln 2)^n} \leq b_n |x|^n \leq \frac{|x|^n}{(\ln 2)^n}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{\ln 2}\right)^n \leq b_n |x|^n = |b_n x^n| \leq \left(\frac{|x|}{\ln 2}\right)^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. 1er cas. Supposons $|x| < \ln 2$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |b_n x^n| \leq \left(\frac{|x|}{\ln 2}\right)^n$ et la série de terme général $\left(\frac{|x|}{\ln 2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{|x|}{\ln 2}\right| < 1$!

Les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent alors la convergence de la série de terme général $|b_n x^n|$.
Ainsi la série de terme général $b_n x^n$ est absolument convergente.

2ème cas. Supposons $|x| \geq \ln 2$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n x^n| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{\ln 2}\right) \geq \frac{1}{2}$; ainsi la suite de terme général $b_n x^n$ ne converge pas vers 0 : la série de terme général $b_n x^n$ diverge.

Si x est dans $\mathbb{R}$, la série de terme général $b_n x^n$ est absolument convergente si $|x| < \ln 2$

et divergente pour $|x| \geq \ln 2$.

Alors, si x est dans $\mathbb{R}$, la série de terme général $b_n x^n$ converge pour $|x| < \ln 2$ et diverge pour $|x| \geq \ln 2$.

Le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est : $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \ln 2\}$

Ainsi $\underline{\underline{D =]-\ln 2, \ln 2[}}$.

Q2 a) Soit $x \in D$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = b_n x^n$ et $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

Les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes.

Alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est (absolument) convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = e^x f(x)$.

$w_0 = u_0 v_0 = \frac{x^0}{0!} b_0 = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} b_{n-k} x^{n-k}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}\right) x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!} x^n + b_n x^n = 2 b_n x^n$.

Alors $e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 b_n x^n = 1 + 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - 1\right)$

Donc $e^x f(x) = 1 + 2f(x) - 2 = 2f(x) - 1$.

$\underline{\underline{\forall x \in D,\ e^x f(x) = 2f(x) - 1}}$ et donc $\underline{\underline{\forall x \in D,\ f(x) = \frac{1}{2 - e^x}}}$.

b) Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2 - e^x$. φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(x) = -e^x$.

Or $\varphi f = 1$.

φ et f étant de classe C^∞ sur D, on obtient en utilisant la formule de Leibniz : $\forall x\in D,\ 0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in D,\ 0 = C_n^0 \varphi^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k(-e^x) f^{(n-k)}(x)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in D,\ (2-e^x) f^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\right)e^x$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (2-e^0) f^{(n)}(0) = \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(0)\right)e^0$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(0)$.

c) Rappelons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a_{n-k}$.

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = a_n$.

- $f^{(0)}(0) = \frac{1}{2-1} = 1 = a_0$; la propriété est vraie pour $n=0$.
- Supposons que la propriété est vraie jusqu'à n où n est élément de $\mathbb{N}$.

$n+1\geq 1$. $f^{(n+1)}(0) = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(0) = \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k a_{n+1-k} = a_{n+1}$.

HR et $\forall k\in[\![1,n+1]\!],\ n+1-k\in[\![0,n]\!]$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = a_n$.

Alors $\forall x\in D,\ f(x) = \frac{1}{2-e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

PARTIE III Développement en série de a_n.

Q1 Soit $x\in D$. $x<\ln 2$ donc $0<e^x<e^{\ln 2}=2$; $0<\frac{e^x}{2}<1$.

Alors $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{e^x}{2}}$; $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{kx}}{2^k}=\frac{2}{2-e^x}$; $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{kx}}{2^{k+1}}=\frac{1}{2-e^x}$.

$\forall x\in D,\ f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{kx}}{2^{k+1}}$.

Q2 Soit $x\in D$. $\left|\frac{e^x}{2}\right|<1$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{e^x}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{(1-\frac{e^x}{2})^2}=\frac{4}{(2-e^x)^2}$.

$\sum_{k=1}^{+\infty}k\,\frac{e^{kx}e^{-x}}{2^{k-1}}=\frac{4}{(2-e^x)^2}$; $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k e^{kx}}{4\times 2^{k-1}}=\frac{e^x}{(2-e^x)^2}=f'(x)$.

Alors $f'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k e^{kx}}{2^{k+1}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k e^{kx}}{2^{k+1}}$.

$f'(x)=\frac{e^x}{(2-e^x)^2}=e^x(2-e^x)^{-2}$; $f''(x)=e^x(2-e^x)^{-2}+e^x(-2)(-e^x)(2-e^x)^{-3}$

$f''(x)=f'(x)+\frac{2e^{2x}}{(2-e^x)^3}=f'(x)+\frac{e^{2x}}{8}\frac{2}{(1-\frac{e^x}{2})^3}$.

$f''(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{e^{kx}}{2^{k+1}}+\frac{e^{2x}}{8}\sum_{k=2\text{ ou }0}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{e^x}{2}\right)^{k-2}$ car $\left|\frac{e^x}{2}\right|<1$.

$f''(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{k e^{kx}}{2^{k+1}}+\frac{k(k-1)e^{kx}}{8\times 2^{k-2}}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+k(k-1))e^{kx}}{2^{k+1}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2e^{kx}}{2^{k+1}}$.

Ainsi $\forall x\in D,\ f'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k e^{kx}}{2^{k+1}}$ et $f''(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2e^{kx}}{2^{k+1}}$.

Q3 a) Soit $x\in D$ et soit $q\in\mathbb{N}$. $\frac{e^x}{2}\neq 1$

$\sum_{k=0}^{q}\frac{e^{kx}}{2^{k+1}}+\frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}}f(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q}\left(\frac{e^x}{2}\right)^k+\frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}}f(x)\overset{\downarrow}{=}\frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{e^x}{2}\right)^{q+1}}{1-\frac{e^x}{2}}+\frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}}f(x)$.

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{e^{kx}}{2^{k+1}} + \frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}} f(x) = \frac{1-\left(\frac{e^x}{2}\right)^{q+1}}{2-e^x} + \frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}} f(x) = \underbrace{f(x)\left(1-\frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}}\right) + \frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}} f(x)}_{=f(x)}$$

Ainsi $\forall x \in D, \forall q \in \mathbb{N}$, $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{q} \frac{e^{kx}}{2^{k+1}} + \frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}} f(x).$

Hum !!!

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\ell_i : x \mapsto \frac{e^{ix}}{2^{i+1}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $\forall i \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\ell_i^{(r)}(x) = i^r \ell_i(x)$.

De plus $\forall x \in D, \forall q \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{q} \ell_k(x) + \ell_{q+1}(x) f(x)$

En dérivant n fois et en utilisant la formule de Leibniz on obtient :

$\forall x \in D, \forall q \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{q} \ell_k^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, \ell_{q+1}^{(i)}(x) f^{(n-i)}(x)$

$\forall x \in D, \forall q \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{q} k^n \ell_k(x) + \sum_{i=0}^{n} C_n^i (q+1)^i \ell_{q+1}(x) f^{(n-i)}(x).$

Fixons x dans D.

$\forall q \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![0,n]\!]$, $(q+1)^i \ell_{q+1}(x) = (q+1)^i \frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}}.$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $(q+1)^i \frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}} \underset{q\to+\infty}{\sim} q^i \left(\frac{e^x}{2}\right)^{q+1}$.

Or $\left|\frac{e^x}{2}\right| < 1$ donc par croissance comparée $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\lim_{q\to+\infty} \left(q^i \left(\frac{e^x}{2}\right)^{q+1}\right) = 0.$

Ainsi $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\lim_{q\to+\infty} (q+1)^i \frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}} = 0$.

Alors $\lim_{q\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i (q+1)^i \ell_{q+1}(x) f^{(n-i)}(x) \right) = 0.$

Par conséquent : $\lim_{q\to+\infty} \left(f^{(n)}(x) - \sum_{k=0}^{q} k^n \ell_k(x) \right) = 0$.

Alors $\lim\limits_{q\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{q} k^n P_k(x)\right) = f^{(n)}(x)$ ou

$$\lim_{q\to+\infty}\sum_{k=0}^{q}\frac{k^n e^{kx}}{2^{k+1}} = f^{(n)}(x).$$

Ainsi pour tout x élément de D, la série de terme général $\frac{k^n e^{kx}}{2^{k+1}}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n e^{kx}}{2^{k+1}} = f^{(n)}(x)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^{(*)}$, $\forall x\in D$, $f^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n e^{kx}}{2^{k+1}}$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = f^{(n)}(0) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{2^{k+1}}$.

PARTIE IV Un équivalent du nombre des combinaisons.

(Q1) Soit $n\in\mathbb{N}$. g_n est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^A g_n(t)\,dt = \int_0^A \frac{t^n}{2^t}\,dt = \int_0^A t^n e^{-t\ln 2}\,dt \underset{u=t\ln 2}{\overset{=}{\uparrow}} \int_0^{A\ln 2}\left(\frac{u}{\ln 2}\right)^n e^{-u}\,\frac{1}{\ln 2}\,du.$$

$\int_0^A g_n(t)\,dt = \frac{1}{(\ln 2)^{n}}\int_0^{A\ln 2} u^n e^{-u}\,du$, $\lim\limits_{A\to+\infty}(A\ln 2) = +\infty$ et $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^n\,du$ converge et vaut $n!$

Ainsi $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(Q2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. g_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ car $x\mapsto x^n$ et $x\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^x$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ g_n(x) = x^n e^{-x\ln 2}$. $\forall x \in [0,+\infty[,\ g_n'(x) = n x^{n-1} e^{-x\ln 2} + x^n(-\ln 2)e^{-x\ln 2}$

$\forall x \in [0,+\infty[,\ g_n'(x) = x^{n-1} e^{-x\ln 2}(n - x\ln 2)$.

$\forall x \in [0, \frac{n}{\ln 2}[,\ g_n'(x) > 0$; $g_n'(\frac{n}{\ln 2}) = 0$; $\forall x \in]\frac{n}{\ln 2}, +\infty[,\ g_n'(x) < 0$.

Alors g_n est strictement croissante sur $[0, \frac{n}{\ln 2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{n}{\ln 2}, +\infty[$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+ - \{\frac{n}{\ln 2}\},\ g_n(x) < g_n(\frac{n}{\ln 2})$.

Alors g_n possède un maximum Π_n atteint en le seul point $x_n = \frac{n}{\ln 2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Pi_n = g_n(\frac{n}{\ln 2}) = \left(\frac{n}{\ln 2}\right)^n e^{-\frac{n}{\ln 2}\ln 2} = \left(\frac{n}{\ln 2}\right)^n e^{-n} = \frac{1}{(\ln 2)^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

$$\frac{\Pi_n}{I_n} = \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n!} \times \frac{1}{(\ln 2)^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \ln 2\ \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \ln 2\ \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Pi_n}{I_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln 2}{\sqrt{2\pi n}}\right) = 0$; la suite de terme général Π_n est négligeable devant la suite de terme général I_n.

Q3 a) $x_1 = \frac{1}{\ln 2} \in [1{,}44 ; 1{,}45]$, $x_2 = \frac{2}{\ln 2} \in [2{,}88 ; 2{,}90]$ et $x_3 \in [4{,}32 ; 4{,}35]$. $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ et $j_3 = 4$.

b) g_n est croissante sur $[0, x_n]$ et décroissante sur $[x_n, +\infty[$.
g_n est donc croissante sur $[0, j_n]$ et décroissante sur $[j_n+1, +\infty[$.

$\forall k \in [\![0, j_n - 1]\!],\ \forall t \in [k, k+1],\ g_n(k) \leq g_n(t) \leq g_n(k+1)$
$\forall k \in [\![j_n+1, +\infty[\![,\ \forall t \in [k, k+1],\ g_n(k+1) \leq g_n(t) \leq g_n(k)$.

Alors $\forall k \in [\![0, j_n - 1]\!],\ g_n(k) \leq \int_k^{k+1} g_n(t)\,dt \leq g_n(k+1)$ et $\forall k \in [\![j_n+1, +\infty[\![,\ g_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} g_n(t)\,dt \leq g_n(k)$.

c) $\forall k \in [\![0, j_n - 1]\!]$, $q_n(k) \leq \int_k^{k+1} q_n(t)\,dt \leq q_n(k+1)$. En sommant on obtient :

$$\sum_{k=0}^{j_n-1} q_n(k) \leq \int_0^{j_n} q_n(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{j_n-1} q_n(k+1) \ ; \quad \sum_{k=0}^{j_n} q_n(k) - q_n(j_n) \leq A_n \leq \sum_{k=0}^{j_n} q_n(k) - q_n(0).$$

Alors $A_n \overset{q_n(0)=0}{=} A_n + q_n(0) \leq \sum_{k=0}^{j_n} q_n(k) \leq A_n + q_n(j_n)$.

Ainsi $\underline{\underline{A_n \leq \sum_{k=0}^{j_n} q_n(k) \leq A_n + q_n(j_n)}}$.

q_n est continue, positive et décroissante sur $[j_n+1, +\infty[$ et $\int_{j_{n+1}}^{+\infty} q_n(t)\,dt$ converge.

Ainsi la série de terme général $q_n(k)$ converge.

$\forall k \in [\![j_n+1, +\infty[\![$, $q_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} q_n(t)\,dt \leq q_n(k)$.

Alors $\forall N \in [\![j_n+1, +\infty[\![$, $\sum_{k=j_n+1}^{N} q_n(k+1) \leq \int_{j_n+1}^{N} q_n(t)\,dt \leq \sum_{k=j_n+1}^{N} q_n(k)$. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient :

$$\sum_{k=j_n+2}^{+\infty} q_n(k) \leq B_n \leq \sum_{k=j_n+1}^{+\infty} q_n(k) \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{B_n \leq \sum_{k=j_n+1}^{+\infty} q_n(k) \leq B_n + q_n(j_n+1)}}.$$

d) Alors $A_n + B_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} q_n(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k} = 2a_n \leq A_n + B_n + q_n(j_n+1) + q_n(j_n)$

Alors $A_n + B_n \leq 2a_n \leq A_n + B_n + q_n(j_n+1) \leq A_n + B_n + M_n + M_n = A_n + B_n + 2M_n$

$$A_n + B_n = \int_0^{j_n} q_n(t)\,dt + \int_{j_n+1}^{+\infty} q_n(t)\,dt = I_n - \int_{j_n}^{j_n+1} q_n(t)\,dt$$

$\forall t \in [j_n, j_n+1]$, $0 \leq q_n(t) \leq M_n$; $0 \leq \int_{j_n}^{j_n+1} q_n(t)\,dt \leq M_n$

Ainsi $I_n - M_n \leq I_n - \int_{j_n}^{j_n+1} q_n(t)\,dt \leq I_n$; $I_n - M_n \leq A_n + B_n \leq I_n$.

Par conséquent $I_n - M_n \leq A_n + B_n \leq 2a_n \leq A_n + B_n + 2M_n \leq I_n + 2M_n$.

Par conséquent : $\dfrac{I_n - \Pi_n}{2} \leq a_n \leq \dfrac{I_n + 2\Pi_n}{2}$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons que $\Pi_n = O(I_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\Pi_n}{I_n} = 0$.

$\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Pi_n}{I_n} \leq \dfrac{a_n}{I_n} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{\Pi_n}{I_n}$.

Par encadrement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{I_n} = \dfrac{1}{2}$. $a_n \sim \dfrac{1}{2} I_n$.

$a_n \sim \dfrac{1}{2} \dfrac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$. Rappelons que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Alors $a_n \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{n}{\ln 2\, e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2\ln 2}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\ln 2\, e}\right)^n$.

$a_n \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2\ln 2}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e\ln 2}\right)^n$.

Un peu de numérique pour finir.

- Un petit programme qui permet de calculer a_n. → p 13
- "la valeur" de a_n et des deux équivalents pour $n \in [\![0, 10]\!]$.

```
Donner n (entre 0 et 100). n= 10
a(0)=1
a(1)=1   e1(1)=1.0407   e2(1)=0.9597
a(2)=3   e1(2)=3.0028   e2(2)=2.8812
a(3)=13   e1(3)=12.9963   e2(3)=12.6415
a(4)=75   e1(4)=74.9987   e2(4)=73.4556
a(5)=541   e1(5)=541.0015   e2(5)=532.0712
a(6)=4683   e1(6)=4683.0012   e2(6)=4618.4681
a(7)=47293   e1(7)=47292.9987   e2(7)=46733.7011
a(8)=545835   e1(8)=545834.9979   e2(8)=540181.6453
a(9)=7087261   e1(9)=7087261.0014   e2(9)=7021967.7508
a(10)=102247563   e1(10)=102247563.0000   e2(10)=101399321.2600
```

```
program n_comb;


const n_max=100;
var k,n,i,s:longint;a,bino:array[0..n_max] of longint;


begin
write('Donner n (entre 0 et 100). n= ');readln(n);



a[0]:=1;
writeln('a(',0,')=',1);

for k :=1 to n do
    begin
    bino[0]:=1;
    for i:=1 to k do
    begin
    bino[i]:=(bino[i-1]*(k-i+1)) div i;

    end;
    s:=0;
    for i:=0 to k-1 do s:=s+a[i]*bino[k-i];
    a[k]:=s;
    write('a(',k,')=',a[k],'  ');
    end;

writeln;

end.
```

* Ici on calcule $C_k^0, C_k^1, \dots, C_k^k$ à partir de $C_{k-1}^0, C_{k-1}^1, \dots, C_{k-1}^{k-1}$.

begin et end sont inutiles