SUJET 14

Une serrure de sécurité possède n boutons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 1$). Une "combinaison" consiste à pousser dans un certain ordre tous les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

La modélisation est effectuée de la manière suivante : pour une valeur donnée de l'entier n, soit A_n l'ensemble des entiers de 1 à n ($A_n = [\![1, n]\!]$).

Par définition une n combinaison est une suite **ordonnée** $(P_1, P_2, \ldots, P_j)$ de j parties P_1, P_2, ..., P_j de l'ensemble A_n ($1 \leqslant j \leqslant n$) ; ces parties sont deux à deux disjointes, non vides et leur réunion est A_n. Une n combinaison est en quelque sorte "une partition propre ordonnée" de A_n.

On peut de toute évidence remplacer dans ce qui précède $A_n = [\![1, n]\!]$ par un ensemble quelconque ayant n éléments.

Soit a_n le nombre de n-combinaisons. Par convention $\boxed{a_0 = 1}$.

Il y a une seule 1-combinaison : $(\{1\})$.

Il y a trois 2-combinaisons : $(\{1\}, \{2\})$, $(\{2\}, \{1\})$, $(\{1, 2\})$.

La première 2-combinaison consiste à d'abord appuyer sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, la deuxième consiste à d'abord appuyer sur le bouton 2 puis sur le bouton 1, la troisième consiste à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2.

Partie I : Quelques éléments sur les n-combinaisons.

Q1 **Quelques exemples** Dans cette question n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Déterminer le nombre a_n lorsque $n = 3$.

b) Déterminer le nombre de n-combinaisons où toutes les parties sont des singletons (parties à un élément). En déduire une minoration de a_n.

c) Déterminer le nombre de n-combinaisons où toutes les parties sont des paires (deux cas).

d) Déterminer le nombre de n-combinaisons contenant exactement deux parties.

Q2 **Une formule de récurrence**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Soit k un élément de $[\![1, n-1]\!]$ et P_1 une partie **fixée** de A_n ayant k éléments. Exprimer le nombre de n-combinaisons dont la première partie est P_1 en fonction de a_p, pour une valeur convenable de p. Etendre ce résultat au cas ou $k = n$.

b) ou b') ! !

b) En déduire a_n en fonction de a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} (la question suivante donne le résultat). Retrouver les valeurs de a_2 et a_3. Calculer a_4.

b') Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$. Retrouver les valeurs de a_2 et a_3. Calculer a_4.

Q3 **Un encadrement de a_n**

On rappelle que : $\ln 2 \sim 0,6931$. On pose, pour tout élément i de $\mathbb{N}$, $b_i = \dfrac{a_i}{i!}\cdot$

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}\cdot$

b) Vérifier $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} = 1$ et à l'aide d'une récurrence faible (et propre), montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}\cdot$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n! \leqslant a_n \leqslant \frac{n!}{(\ln 2)^n}\cdot$

d) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{\ln 2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leqslant 2\, \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{(k!)} \geqslant 1 - 2\, \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ (à un petit abus près).

Montrer à l'aide d'une récurrence faible que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2(\ln 2)^n} \leqslant b_n$ (il conviendra sans doute avant de minorer de détacher le dernier terme de la somme...).

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2\,(\ln 2)^n} \leqslant b_n \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n!}{2\,(\ln 2)^n} \leqslant a_n \leqslant \frac{n!}{(\ln 2)^n}}$

Partie II : Série entière associée à la suite $(\mathbf{b_n})_{\mathbf{n}\geqslant \mathbf{0}}$.

On considère la fonction numérique de la variable réelle $f : x \to \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\, x^k\cdot$

Q1 Soit x un réel. En utilisant l'encadrement de la fin de la première partie, montrer proprement que la série de terme général $b_n\, x^n$ est absolument convergente si $|x| < \ln 2$ et (grossièrement) divergente si $|x| \geqslant \ln 2$

En déduire le domaine de définition D de f.

Q2 On rappelle que si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels et si les séries de terme généraux u_n et v_n sont absolument convergente alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$ est (absolument) convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\ \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

a) En utilisant ce résultat, montrer que $\forall x \in D,\ e^x\, f(x) = 2\, f(x) - 1$ ($u_n = \frac{x^n}{n!}$, $v_n = b_n\, x^n$, $w_n = ?$ Etre très soigneux, patient et ne pas jouer l'erreur d'énoncé ! !).

En déduire que :

$$\forall x \in D,\ f(x) = \frac{1}{2 - e^x}\cdot$$

f est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

b) En utilisant la formule de leïbniz montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\ f^{(n-k)}(0)$$

(partir de $(2 - e^x)f(x) = 1$ et être soigneux).

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = a_n$.

Partie III : Développement en série de $\mathbf{a_n}$.

Q1 Montrer que $\forall x \in D,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{2^{k+1}}\cdot$

Dès lors on se propose de montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in D,\ f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n\, e^{kx}}{2^{k+1}}\cdot$

Q2 Vérifier l'égalité précédente pour $n = 1$ et $n = 2$.

Q3 a) Montrer que $\forall x \in D,\ \forall q \in \mathbb{N},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{e^{kx}}{2^{k+1}} + \frac{e^{(q+1)x}}{2^{q+1}}\, f(x)$.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. En dérivant n fois l'égalité précédente et en faisant tendre q vers $+\infty$ montrer très proprement le résultat demandé.

c) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}\cdot$

Partie VI : Un équivalent du nombre de n-combinaisons.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, +\infty[,\ g_n(x) = \dfrac{x^n}{2^x}\cdot$

Q1 Montrer que si, n est dans $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}\cdot$

Q2 n est dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que g_n possède un maximum M_n atteint en un seul point de $[0, +\infty[$ que nous noterons x_n (haine sur Hélène de * troye moins Hun *).

En utilisant la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\,\pi\,n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$) montrer que la suite de terme général M_n est négligeable devant la suite de terme général I_n.

Q3 n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et j_n est la partie entière de x_n. Ainsi $j_n \leqslant x_n < j_n + 1$.

On pose $A_n = \displaystyle\int_0^{j_n} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_{j_n+1}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Préciser j_1, j_2 et j_3 $\left(1,44 \leqslant \dfrac{1}{\ln 2} \leqslant 1,45\right)$.

b) Montrer que si k appartient à $[\![0, j_n - 1]\!]$, $g_n(k) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g_n(k+1)$.

Donner un résultat du même type pour k élément de $[\![j_n + 1, +\infty[\![$.

c) Montrer que $A_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{j_n} g_n(k) \leqslant A_n + g_n(j_n)$ et que $B_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=j_n+1}^{+\infty} g_n(k) \leqslant B_n + g_n(j_n+1)$.

d) Utiliser ce qui précède pour encadrer a_n à l'aide de I_n et M_n (attention au trou). En déduire un équivalent de a_n.