I La fonction Γ.

Q1.. Soit x un réel. a.. Montrer que $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge si et seulement si $x>0$.

b.. Montrer que $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge.

Q2.. On pose pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

a.. Calculer $\Gamma(1)$.

b.. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$.

En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

II $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Q1.. Dans cette question n est un élément de $\mathbb{N}^*$

a.. Montrer que : $\forall t\in[0,n]$, $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}$ (rappel : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x\leqslant x-1$)

b.. Montrer (en 1 ligne) que : $\forall t\in[\sqrt{n},n]$, $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$

c.. Montrer que b. vaut encore pour tout $t\in[0,\sqrt{n}[$ (On pourra étudier $\varphi : t\mapsto n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)+t-\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)$ sur $[0,\sqrt{n}[$)

Q2.. $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$

Montrer que : $\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt-\frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt\leqslant\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt\leqslant\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt=\Gamma(x)$.

III $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x\,n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. Dans cette partie x est fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q1.. Montrer que $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^x\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,du\right)$ (utiliser II Q2 et un changement de variable simple)

Q2.. a.. $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (α,β) pour que $\int_0^1(1-u)^\alpha u^\beta\,du$ converge.

b.. $\forall(\alpha,\beta)\in]-1,+\infty[^2$, $I(\alpha,\beta)=\int_0^1(1-u)^\alpha u^\beta\,du$ (notation)

$\alpha\in]0,+\infty[$ et $\beta\in]-1,+\infty[$. Etablir une relation entre $I(\alpha,\beta)$ et $I(\alpha-1,\beta+1)$.

c.. Calculer $I(0, \beta+n)$ pour $\beta \in]-1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$

d.. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \beta \in]-1, +\infty[$, $I(n, \beta) = \dfrac{n!}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n+1)}$.

e.. Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^x \, n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$

IV Calcul de $\Gamma(1/2)$

Q1.. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}\, du = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta \, d\theta$

(poser $\sqrt{u} = \cos\theta$ ou $\theta = \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{u}$ ou $u = \cos^2\theta$!)

Q2.. $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \, d\theta$

a.. Montrer que : $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

b.. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

c.. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1) I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$

d.. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

e.. Déduire de ce qui précède que : $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Q3.. Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ($\Gamma(1/2) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}\, du$)

Q4.. Utiliser Q3 pour retrouver les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

calculer encore $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$.

V $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} (1+\frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}} \right)$ $(x \in \mathbb{R}_+^*)$

Q1.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

a.. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante ($\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$)

b.. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$ (encadrer $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$).

c.. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. On pose $C = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (c'est la constante d'Euler)

Q2 Soit x un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left[(1+\frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}} \right]$ en fonction de x, C et $\Gamma(x)$.

(utiliser III)