I La fonction Γ.

Q1 x est fixé. Posons $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc localement intégrable sur cet intervalle.

a.. $\forall t \in]0,1]$, $f(t) \geq 0$ et $f(t) \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.

$\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ sont de même nature ; $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ converge ssi $1-x<1$

Finalement $\int_0^1 f(t)dt$ converge si et seulement si $x>0$.

b.. $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{x+1}}{e^t} = 0$; par conséquent il existe un réel strictement positif A tel que : $\forall t \in [A,+\infty[$, $0 \leq t^2 f(t) \leq 1$. Donc $\forall t \in [A,+\infty[$, $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$.

$\int_A^{+\infty} f(t)dt$ converge car $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge. Par conséquent $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

En résumé $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si : $x>0$.

Q2 a.. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-t}dt = \lim\limits_{u\to+\infty}[1-e^{-u}] = 1$. $\underline{\Gamma(1)=1}$.

b.. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^A \underset{u}{t^x}\,\underset{v'}{e^{-t}}dt = [t^x(-e^{-t})]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A x t^{x-1}(-e^{-t})dt = -A^x e^{-A} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon} + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}dt$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} A^x e^{-A} = \lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{A^x}{e^A} = 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^x e^{-\varepsilon} = 0$ (car $x>0$)

En faisant tendre successivement ε vers 0 et A vers $+\infty$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = -0+0+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt. \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

En particulier $\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$; $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\times 2 = 3!$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

- C'est vrai pour $n=1$ ($\Gamma(1) = 1 = (1-1)!$)
- Supposons l'égalité vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\,(n-1)! = n! = ((n+1)-1)!$

  Ceci achève la récurrence.

II $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Q1 $n \in \mathbb{N}^*$. a) Montrons que : $\forall t \in [0,n],\ \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$

Soit $t \in [0,n]$. Si $t=n$ l'inégalité est claire $(0 \leq e^{-n})$

Supposons $t \in [0,n[$. $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$ donc $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -t$.

$\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq -t$. La croissance de la fonction exponentielle donne le résultat.

b) Soit $t \in [\sqrt{n}, n]$. $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq 0 \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$!

Donc $\forall t \in [\sqrt{n}, n],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

c)

$\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \iff \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) - t \leq n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \iff 0 \leq n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) + t - \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)$

Posons $\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi(t) = n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) + t - \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)$.

φ dérivable sur $[0,\sqrt{n}[$ et $\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = n\left(-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1-\frac{t}{n}} + 1 - \frac{-2t/n}{1-\frac{t^2}{n}} = \frac{-n(n-t^2)+(n-t)(n-t^2)+2t(n-t)}{(n-t)(n-t^2)}$

$\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi'(t) = \frac{t^3-2t^2+nt}{(n-t)(n-t^2)} = \frac{t(t^2-2t+n)}{(n-t)(n-t^2)} = \frac{t\left[(t-1)^2+(n-1)\right]}{(n-t)(n-t^2)} \geq 0$.

φ est croissante sur $[0,\sqrt{n}[$ et $\varphi(0)=0$ donc $\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi(t) \geq 0$.

ce qui donne $\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,n],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$

Q2 $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall t \in [0,n],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ donc

$\forall t \in]0,n],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}t^{x-1} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq e^{-t}t^{x-1}$. $\forall t \in]0,n],\ 0 \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leq e^{-t}t^{x-1}$

Donc $\int_0^n e^{-t}t^{x-1}\,dt$, étant convergente il en est de même pour $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$ et

$\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}t^{x-1}\,dt$ et : $\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}t^{x-1}\,dt \leq \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \leq \int_0^n e^{-t}t^{x-1}\,dt$

Notons que : $\int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}t^{x-1}\,dt = \int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt - \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt$ car les trois intégrales sont convergentes. Finalement :

$\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt - \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt \leq \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \leq \int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$

$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge et vaut $\Gamma(x)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x)$.

$\int_0^{+\infty} t^{x+1}e^{-t}\,dt$ converge et vaut $\Gamma(x+2)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x+2)$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt = 0\times\Gamma(x+2) = 0 .$$

La suite $\left(\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ est encadrée par deux suites qui convergent vers $\Gamma(x)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \Gamma(x)$ et ceci pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

III $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^x\, n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. Fixons x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \underset{u=\frac{t}{n}}{=} \int_{\varepsilon/n}^1 (1-u)^n (nu)^{x-1}\, n\,du = n^x\int_{\varepsilon/n}^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du$$

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon/n}^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du .$$

ceci assure la convergence de $\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du$ et montre que :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du .$$

Par conséquent on a encore $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du$.

Q2 a. $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $u\mapsto (1-u)^\alpha u^\beta$ est continue et positive sur $]0,1[$.

$(1-u)^\alpha u^\beta \underset{0}{\sim} u^\beta$ et $(1-u)^\alpha u^\beta \underset{1}{\sim} (1-u)^\alpha$.

$\int_0^{1/2} (1-u)^\alpha u^\beta\,du$ est de même nature que $\int_0^{1/2}\frac{du}{u^{-\beta}}$; elle converge donc si $-\beta<1$.

$\int_{1/2}^1 (1-u)^\alpha u^\beta\,du$ ———— $\int_{1/2}^1 \frac{du}{(1-u)^{-\alpha}}$; ———— $-\alpha<1$

Par conséquent $\int_0^1 (1-u)^\alpha u^\beta\,du$ converge si $\alpha>-1$ et $\beta>-1$.

b) $\alpha\in]0,+\infty[$ et $\beta\in]-1,+\infty[$. $I(\alpha,\beta)$ et $I(\alpha-1,\beta+1)$ existent.

Soit $\varepsilon\in]0,1[$ et $\varepsilon'\in]0,1[$.

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} (1-u)^\alpha u^\beta\,du = \left[(1-u)^\alpha\frac{u^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_\varepsilon^{\varepsilon'} - \int_\varepsilon^{\varepsilon'}(-\alpha)(1-u)^{\alpha-1}\frac{u^{\beta+1}}{\beta+1}\,du = \left[\frac{(1-u)^\alpha u^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_\varepsilon^{\varepsilon'} + \frac{\alpha}{\beta+1}\int_\varepsilon^{\varepsilon'}(1-u)^{\alpha-1}u^{\beta+1}\,du$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(1-\varepsilon)^\alpha\varepsilon^{\beta+1}}{\beta+1} = 0 \text{ et } \lim_{\varepsilon'\to 1^-}\frac{(1-\varepsilon')^\alpha\varepsilon'^{\beta+1}}{\beta+1} = 0 \quad (\alpha>0)$$

Donc $I(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-u)^\alpha u^\beta\,du = \frac{\alpha}{\beta+1}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta+1}\,du = \frac{\alpha}{\beta+1} I(\alpha-1,\beta+1)$.

$\forall \alpha\in]0,+\infty[,\ \forall\beta\in]-1,+\infty[,\ I(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta+1} I(\alpha-1,\beta+1)$.

c) Soit $\beta \in]-1,+\infty[$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I(0,\beta+n) = \int_0^1 u^{\beta+n}\,du = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 u^{\beta+n}\,du = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{u^{\beta+n+1}}{\beta+n+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{\beta+n+1} \quad (\beta+n+1>0)$$

Donc $\forall \beta \in]-1,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I(0,\beta+n) = \dfrac{1}{\beta+n+1}$.

d) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \beta \in]-1,+\infty[$, $I(n,\beta) = \dfrac{n!}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n+1)}$

→ $\forall \beta \in]-1,+\infty[$, $I(0,\beta) \underset{c)}{=} \dfrac{1}{\beta+1} = \dfrac{0!}{\beta+1}$; la propriété est vraie pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons-la pour $n+1$.

H.R. donne $\forall \beta \in]-1,+\infty[$, $I(n,\beta) = \dfrac{n!}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n+1)}$

Soit $\beta \in]-1,+\infty[$.

$$I(n+1,\beta) \underset{b)}{=} \frac{n+1}{\beta+1} I(n,\beta+1) \underset{\substack{\text{H.R. avec } \beta+1 \\ (\beta+1>-1\,!)}}{=} \frac{n+1}{\beta+1} \times \frac{n!}{(\beta+2)(\beta+3)\cdots(\beta+1+n+1)} = \frac{(n+1)!}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+(n+1)+1)}$$

Ceci achève la récurrence.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,+\infty[$

$$n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = n^x I(n,x-1) \overset{x-1 \in]-1,+\infty[}{=} n^x \times \frac{n!}{(x-1+1)(x-1+2)\cdots(x-1+n+1)}$$

$$n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Donc $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

IV Calcul de $\Gamma(3/2)$.

Notons que d'après III Q 1 : $\Gamma(3/2) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}\,du\right)$

Q 1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}\,du \underset{\substack{\sqrt{u}=\cos\theta \\ \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sin\theta\, d\theta}}{=} \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\operatorname{Arccos}\sqrt{\varepsilon}}^0 (1-\cos^2\theta)^n(-2\sin\theta)\,d\theta$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}\,du = \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2\theta)^n(-2\sin\theta)\,d\theta$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}\,du = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+1}\,d\theta$ (C'est Wallis ! Le monde est décidément très petit !).

Q 2) C'est du cours !

a) Soit $n \in \mathbb{N}$; $\forall \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \le \sin\theta \le 1$; $\forall \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \le \sin^{n+1}\theta \le \sin^n\theta$

En intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ on obtient : $0 \le J_{n+1} \le J_n$.

La suite $(J_n)_{n\ge0}$ est décroissante et minorée par 0.

Remarque.. $(I_n)_{n\geq 0}$ converge.

b.. Soit $n\in\mathbb{N}$. $I_{n+2}=\int_0^{\pi/2}\sin^{n+2}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\underbrace{\sin\theta}_{u'}\,\underbrace{(\sin^{n+1}\theta)}_{v}d\theta = \left[-\cos\theta(\sin\theta)^{n+1}\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(-\cos\theta)(n+1)\cos\theta\,(\sin\theta)^n\,d\theta$

Donc $I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta(\sin\theta)^n d\theta \underset{\cos^2\theta=1-\sin^2\theta}{=} (n+1)\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^n d\theta-(n+1)\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{n+2}d\theta$

Donc $I_{n+2}=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$ c'est à dire : $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$

Remarque.. On peut à partir d'ici calculer I_n (deux cas : $n=2p$ et $n=2p+1$)

c.. Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}$.

→ $I_0I_1=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{2}[-\cos\theta]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$. L'égalité est vraie pour $n=0$.

→ Supposons l'égalité vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$(n+2)I_{n+1}I_{n+2}\underset{b)}{=}(n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n=(n+1)I_nI_{n+1}\underset{H.R.}{=}\frac{\pi}{2}$

Remarque.. $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)I_n\times I_{n+1}=\pi/2$. Ceci montre en particulier que :

- $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n\neq 0$; donc $\forall n\in I_n$, $I_n>0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ ($\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n\times I_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)}$; si $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$: $\ell^2=0$ donc $\ell=0$)

d.. $\forall n\in\mathbb{N}$, $0<I_{n+2}\leq I_{n+1}\leq I_n$ ($(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante)

et e..

$\forall n\in\mathbb{N}$, $0<\frac{I_{n+2}}{I_n}\leq\frac{I_{n+1}}{I_n}\leq 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+2}}{I_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$; $\underline{I_{n+1}\sim I_n}$.

$\frac{\pi}{2}=(n+1)I_nI_{n+1}\sim(n+1)I_n^2$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n^2=\frac{\pi}{2}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}\,|I_n|=\sqrt{\pi/2}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}\,I_n\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Par conséquent : $\sqrt{n+1}\,I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\underline{I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}}$ (on a aussi $I_n\sim\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$)

Q3.. Soit $n\in\mathbb{N}$. $\sqrt{n}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}du=\sqrt{n}\times 2I_{2n+1}\sim\sqrt{n}\times 2\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}}=\sqrt{\frac{4\pi n}{2(2n+2)}}=\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}du=\sqrt{\pi}$

D'après III Q1 : $\underline{\underline{\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}}}$

Q4.. $\forall A\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A e^{-t^2}dt \underset{\substack{u=t^2\\ du=2t\,dt}}{=} \int_0^{A^2}e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\int_0^{A^2}e^{-u}u^{\frac{1}{2}-1}du$

$\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{2}-1} du = \Gamma(1/2)$ donc $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma(1/2)$.

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\Gamma(1/2)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Par parité $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

I $\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1+\frac{x}{k}) e^{-x/k}\right)$.

Q1 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{n+1} - (1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}) = 0$!

$-\ln(x) \leq -(1-\frac{1}{x})$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}\leq u_n$. $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt$ et $\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Par conséquent : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \leq \ln n$ et $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Finalement $\ln(n+1) - \ln n \leq u_n \leq 1$. $0 \leq \ln(1+\frac{1}{n}) \leq u_n \leq 1$. $0 \leq u_n \leq 1$.

c) $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 1 ; elle converge. Soit c sa limite, $c\in[0,1]$.
c est la constante d'Euler. $c \simeq 0{,}577$.

Q2. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\prod_{k=1}^n (1+\frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}} = \prod_{k=1}^n \frac{k+x}{k} e^{-\frac{x}{k}} = \frac{\prod_{k=1}^n (x+k)}{\prod_{k=1}^n k} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{x}{k}}$

$$\prod_{k=1}^n (1+\frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}} = \frac{\prod_{k=1}^n (x+k)}{n!} e^{-x\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$

$$\prod_{k=1}^n (1+\frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}} = \frac{1}{x} \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n!} e^{-x(u_n+\ln(n))} = \frac{1}{x} \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n!} e^{-xu_n} \times n^{-x} = \frac{1}{x} \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n!\, n^x} \times e^{-xu_n}$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \Gamma(x)$ (III) et $\lim_{n\to+\infty} e^{-xu_n} = e^{-xc}$ (Q1)

Donc $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n (1+\frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\Gamma(x)} \times e^{-xc}$