PARTIE I

A **Q1** • h est linéaire donc ℓ est linéaire. Mieux $\ell \in \mathcal{L}(F, \mathrm{Im}\, h)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}\, \ell$. $x \in F$ et $\ell(x) = 0_E$. $x \in F$ et $h(x) = 0_E$.

Alors $x \in F \cap \mathrm{Ker}\, h = \{0_E\}$. $x = 0_E$.

donc $\mathrm{Ker}\, \ell = \{0_E\}$. ℓ est injective.

• Notons que ℓ est surjective.

Soit $y \in \mathrm{Im}\, h$. $\exists t \in E$, $y = h(t)$. Or $E = F \oplus \mathrm{Ker}\, h$.

donc $\exists (t_1, t_2) \in F \times \mathrm{Ker}\, h$, $t = t_1 + t_2$.

Alors $y = h(t) = h(t_1) + h(t_2) \underset{\substack{\uparrow \\ t_1 \in F \text{ et } t_2 \in \mathrm{Ker}\, h}}{=} \ell(t_1)$.

$\forall y \in \mathrm{Im}\, h, \exists t_1 \in F$, $y = \ell(t_1)$. ℓ est surjective.

ℓ est un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}\, h$. Notons que ℓ^{-1} est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, h$ sur F.

Q2 • Soit $x \in E$.

$p(x) \in \mathrm{Im}\, h$ donc $\ell^{-1}(p(x))$ appartient à F donc à E.

Alors g est une application de E dans E.

• Soit $(x, y) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$g(\lambda x + y) = \ell^{-1}(p(\lambda x + y)) = \ell^{-1}(\lambda p(x) + p(y)) = \lambda \ell^{-1}(p(x)) + \ell^{-1}(p(y)) = \lambda g(x) + g(y)$.

donc g est linéaire.

• Soit $x \in E$. $(h \circ g \circ h)(x) = h(g(h(x))) = h(\ell^{-1}(p(h(x))))$.

$\exists! (x_1, x_2) \in F \times \mathrm{Ker}\, h$, $x = x_1 + x_2$.

Notons que $h(x) = h(x_1) = \ell(x_1)$ car $x_1 \in F$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\, h$.

$p(h(x)) = p(\ell(x_1)) \underset{\substack{\uparrow \\ \ell(x_1) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)}}{=} \ell(x_1)$. Alors $\ell^{-1}(p(h(x))) = \ell^{-1}(\ell(x_1)) = x_1$

donc $h(\ell^{-1}(p(\ell(x)))) = h(x_1) = h(x)$.

Alors $h(g(\ell(x))) = h(x)$. $(\ell \circ g \circ \ell)(x) = \ell(x)$ et ceci pour tout x dans E.

Alors $h \circ g \circ h = h$.

g est un endomorphisme de E tel que $h = \ell \circ g \circ \ell$.

$\boxed{B}$ Q1 • Supposons i) et montrons ii). Soit $x \in E$.

Si $x = 0_E$: $(x, h(x))$ est liée. Supposons $x \neq 0_E$.

Alors $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle. Elle est stable par h par hypothèse.

Alors $h(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. $\exists \alpha \in \mathbb{K}, h(x) = \alpha x$. Ainsi $(x, \ell(x))$ est liée.

• Supposons ii) et montrons i). Soit D une droite vectorielle.

$\exists a \in E - \{0_E\}$, $D = \mathrm{Vect}(a)$.

$(a, h(a))$ est liée donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha a + \beta h(a) = 0_E$ et $(\alpha, \beta) \neq 0_{\mathbb{K}^2}$.

Supposons $\beta = 0$. Alors $\alpha a = 0_E$ et $a \neq 0_E$ donc $\alpha = 0$. Ainsi $(\alpha, \beta) = 0_{\mathbb{K}^2}$!

Par conséquent $\beta \neq 0$. Alors $h(a) = -\dfrac{\alpha}{\beta} a$. Posons $\lambda = -\dfrac{\alpha}{\beta}$. $h(a) = \lambda a$.

$h(D) = \ell(\mathrm{Vect}(a)) = \mathrm{Vect}(\ell(a)) = \mathrm{Vect}(\lambda a) \subset \mathrm{Vect}(a) = D$. $h(D) \subset D$.

h laisse donc stable toutes les droites vectorielles.

Finalement les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) ℓ laisse stables toutes les droites vectorielles de i)

ii) Pour tout élément x de E, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Q2 a) Soit h une homothétie vectorielle. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $h = \lambda \mathrm{Id}_E$.

Pour tout x dans E, $(x, h(x)) = (x, \lambda x)$.

donc pour tout x dans E, $(x, \ell(x))$ est liée.

Les homothéties vectorielles de E vérifient ii) et donc i).

b) Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$: $h(x) = 0_E = 0.0_E = 0.x$.

Supposons $x \neq 0_E$. $D = \mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle de E.

Elle est donc stable par h. Alors $h(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$, $h(x) = \lambda_x x$.

$\forall x \in E$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$, $h(x) = \lambda_x x$.

Soit u est un élément non nul de E. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $h(u) = \lambda u$.

Montrons alors que $\forall x \in E$, $h(x) = \lambda x$.

Soit $x \in E$.

1er cas.. (u, x) est liée. Comme u n'est pas nul : $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $x = \alpha u$.

Alors $h(x) = h(\alpha u) = \alpha h(u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda x$. $h(x) = \lambda x$.

2ème cas.. (u, x) est libre.

$\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$, $h(x) = \lambda_x x$ et $\exists \lambda_{x+u} \in \mathbb{K}$, $h(x+u) = \lambda_{x+u}(x+u)$.

Alors $\lambda_{x+u}(x+u) = h(x+u) = h(x) + h(u) = \lambda_x x + \lambda u$.

Donc $(\lambda_{x+u} - \lambda_x) x + (\lambda_{x+u} - \lambda) u = 0_E$. La liberté de (x, u) donne :

$\lambda_{x+u} - \lambda_x = \lambda_{x+u} - \lambda = 0$. Donc $\lambda_{x+u} = \lambda_x = \lambda$.

Ainsi $h(x) = \lambda_x x = \lambda x$.

Finalement $\forall x \in E$, $h(x) = \lambda x$. $h = \lambda \, Id_E$. h est une homothétie vectorielle.

c) Il résulte de a) et b) que si h est un endomorphisme de E les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) h laisse stables les droites vectorielles de E

ii) Pour tout élément x de E, la famille $(x, h(x))$ est liée.

iii) h est une homothétie vectorielle.

PARTIE II Quelques propriétés de ϕ_f

Q0 $[f,[g,h]] = f\circ[g,h] - [g,h]\circ f = f\circ(g\circ h - h\circ g) - (g\circ h - h\circ g)\circ f$

$[f,[g,h]] = f\circ g\circ h - f\circ h\circ g - g\circ h\circ f + h\circ g\circ f \quad (1)$

La permutation " $f\to g\to h\to f$ " donne à partir de (1) :

$[g,[h,f]] = g\circ h\circ f - g\circ f\circ h - h\circ f\circ g + f\circ h\circ g \quad (2).$

La permutation " $f\to g\to h\to f$ " donne à partir de (2) :

$[h,[f,g]] = h\circ f\circ g - h\circ g\circ f - f\circ g\circ h + g\circ f\circ h \quad (3).$

En ajoutant (1), (2) et (3) on obtient :

$$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

⚠ Q1 → voir p 5. ——————————→

Q2 a) Soit $g\in \mathrm{Im}\,\phi_f$. $\exists h\in\mathcal{L}(E)$, $g=\phi_f(h)$.

$g = [f,h] = f\circ h - h\circ f$.

Alors $\mathrm{Tr}(g) = \mathrm{Tr}(f\circ h) - \mathrm{Tr}(h\circ f) \overset{\mathrm{Tr}(f\circ h)=\mathrm{Tr}(h\circ f)}{=} 0$

$\mathrm{Im}\,\phi_f$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes de E de trace nulle.

c) Soit f une homothétie vectorielle de E. $\exists\lambda\in\mathbb{K}$, $f=\lambda \mathrm{Id}_E$.

$\forall g\in\mathcal{L}(E)$, $\phi_f(g) = f\circ g - g\circ f = \lambda\mathrm{Id}_E\circ g - g\circ(\lambda\mathrm{Id}_E) = \lambda g - \lambda g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\phi_f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$ et $\mathrm{Ker}\,\phi_f = \mathcal{L}(E)$.

b) $\forall k\in\mathbb{N}$ $\phi_f(f^k) = f\circ f^k - f^k\circ f = f^{k+1} - f^{k+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\phi_f(f^k) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^k\in\mathrm{Ker}\,\phi_f$.

d) Supposons que f n'est pas une homothétie vectorielle de E.

Id_E et f sont deux éléments de $\ker \phi_f$. Montrons que la famille (Id_E, f) est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha\, Id_E + \beta f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons $\beta \neq 0$. Alors $f = -\frac{\alpha}{\beta}\, Id_E$ donc f est une homothétie vectorielle.

Ainsi $\beta = 0$. Alors $\alpha\, Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $\dim E = n \geq 1$.

Donc $\alpha = 0$. Ceci achève de montrer la liberté de (Id_E, f).

(Id_E, f) est une famille libre de cardinal 2 de $\ker \phi_f$. Alors $\dim \ker \phi_f \geq 2$

Si f n'est pas une homothétie vectorielle de E : $\dim \ker \phi_f \geq 2$.

Q1 * Soit $g\in\mathcal{L}(E)$. $f\circ g\in\mathcal{L}(E)$ et $g\circ f\in\mathcal{L}(E)$ donc $\phi_f(g) = f\circ g - g\circ f \in \mathcal{L}(E)$.

ϕ_f est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

* Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Soit $(g,h)\in\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$.

$\phi_f(\lambda g+h) = f\circ(\lambda g+h) - (\lambda g+h)\circ f = \lambda f\circ g + f\circ h - \lambda g\circ f - h\circ f = \lambda(f\circ g - g\circ f) + f\circ h - h\circ f$

$\phi_f(\lambda g+h) = \lambda\,\phi_f(g) + \phi_f(h)$.

$\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \forall (g,h)\in(\mathcal{L}(E))^2,\ \phi_f(\lambda g+h) = \lambda\,\phi_f(g)+\phi_f(h)$. ϕ est linéaire.

Ainsi ϕ_f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. $\phi_f\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Q3 Montrons le résultat par récurrence sur p.

$\phi_f^0 = Id_{\mathcal{L}(E)}$

* $\forall g\in\mathcal{L}(E)$, $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{0}{k} f^{0-k}\circ g\circ f^k = (-1)^0\binom{0}{0} f^{0-0}\circ g\circ f^0 = Id_E\circ g\circ Id_E = g = \phi_f^0(g)$.

La propriété est vraie pour $p=0$.

* Supposons la propriété vraie pour p élément de $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $p+1$.

$\phi_f^{p+1}(g) = \phi_f(\phi_f^p(g)) = \phi_f\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k} f^{p-k}\circ g\circ f^k\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\,\phi_f(f^{p-k}\circ g\circ f^k)$.

ϕ_f est linéaire

$$\phi_f^{p+1}(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \left[f\circ f^{p-k}\circ g\circ f^k - f^{p-k}\circ g\circ f^k\circ f \right].$$

$$\phi_f^{p+1}(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k+1}\circ g\circ f^k + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \binom{p}{k} f^{p-k}\circ g\circ f^{k+1} \quad k \to k-1$$

$$\phi_f^{p+1}(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p+1-k}\circ g\circ f^k + \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k \binom{p}{k-1} f^{p-(k-1)}\circ g\circ f^k.$$

$k=0$ $\qquad$ $k=p+1$

$$\phi_f^{p+1}(g) = f^{p+1}\circ g\circ f^0 + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \left[\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} \right] f^{p+1-k}\circ g\circ f^k + (-1)^{p+1} f^0\circ g\circ f^{p+1}.$$

$$\phi^{p+1}(g) = (-1)^0 f^{p+1-0}\circ g\circ f^0 + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{p+1}{k} f^{p+1-k}\circ g\circ f^k + (-1)^{p+1} f^{(p+1)-(p+1)}\circ g\circ f^{p+1}.$$

$$\phi^{p+1}(g) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \binom{p+1}{k} f^{p+1-k}\circ g\circ f^k$$ et ceci pour tout g dans $\mathcal{L}(E)$.

La propriété est donc vraie pour $p+1$. La récurrence s'achève.

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \forall g\in\mathcal{L}(E),\quad \phi_f^{p}(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p+1-k}\circ g\circ f^k.$$

On suppose dans la suite de cette question que f est nilpotent d'indice r.

Alors $f^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{r-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$

$$\phi_f^{2r-1}(g) = \sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^k \binom{2r-1}{k} f^{2r-1-k}\circ g\circ f^k \underset{f^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si } k\geq r}{=} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{2r-1}{k} f^{2r-1-k}\circ g\circ f^k \underset{\uparrow}{=} 0_{\mathcal{L}(E)}$$

$\left\{ f^{2r-1-k} = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si } k\in[\![0,r-1]\!] \text{ car } k\leq r-1 \Rightarrow 2r-1-k\geq r \right.$

$\forall g\in\mathcal{L}(E),\ \phi_f^{2r-1}(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\phi_f^{2r-1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$, $\phi^{2r-2}(g) = \sum_{k=0}^{2r-2} (-1)^k \binom{2r-2}{k} f^{2r-2-k} \circ g \circ f^{k}$

si $k \in [\![r, 2r-2]\!]$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f^{2r-2-k} \circ g \circ f^{k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

si $k = r-1$, $f^{2r-2-k} \circ g \circ f^{k} = f^{r-1} \circ g \circ f^{r-1}$.

Supposons que $k \in [\![0, r-2]\!]$. Alors $2r-2-k \geqslant 2r-2-(r-2) = r$.

donc $f^{2r-2-k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Par conséquent $f^{2r-2-k} \circ g \circ f^{k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Finalement $\underline{\underline{\phi^{2r-2}(g) = (-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1} f^{r-1} \circ g \circ f^{r-1} \text{ et ceci pour tout } g \text{ dans } \mathcal{L}(E).}}$

c) $f^{r-1} \in \mathcal{L}(E)$. Alors I A montre l'existence d'un endomorphisme g de E tel que $f^{r-1} = f^{r-1} \circ g \circ f^{r-1}$.

$\phi_f^{2r-2}(g) = (-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1} f^{r-1} \circ g \circ f^{r-1} = (-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1} f^{r-1}$.

donc $f^{r-1} = \phi_f^{2r-2}\left(\frac{1}{(-1)^{r-1}\binom{2r-2}{r-1}} g \right) \in \operatorname{Im} \phi_f^{2r-2}$.

$\underline{\underline{f^{r-1} \in \operatorname{Im} \phi_f^{2r-2}.}}$

d) 1°/ $\phi_f^{2r-1} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$ donc ϕ_f est nilpotent.

2°/ $f^{r-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{r-1} \in \operatorname{Im} \phi_f^{2r-2}$. Alors $\operatorname{Im} \phi_f^{2r-2} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

donc $\phi_f^{2r-2} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

Finalement $\underline{\underline{\phi_f \text{ est nilpotent et son indice de nilpotence est } 2r-1.}}$

Q4 On suppose que $\phi_f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

Alors $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g - g \circ f = \phi_f(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = g \circ f$.

a) Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$: $(x, f(x))$ est liée. Supposons x non nul.

Soit D la droite vectorielle engendrée par x. Soit D' un supplémentaire de D dans E et soit g la projection sur D parallèlement à D'.

$D = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, g$.

$f \circ g = g \circ f$ donc $f(g(x)) = g(f(x))$; $f(x) = g(f(x))$; $f(x) \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E) = D$.

Alors $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$; $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda x$. $(x, f(x))$ est liée.

Finalement pour tout x dans E, $(x, f(x))$ est liée.

b) Il en résulte alors que f est une homothétie vectorielle.

c) Réciproquement supposons que f est une homothétie vectorielle.

Alors d'après Q2 c) : $\phi_f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

Ainsi $\phi_f = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$ si et seulement si f est une homothétie vectorielle.

(Q5) a) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\phi_f(g^k) = k\lambda g^k$.

- $\phi_f(g^0) = \phi_f(\mathrm{Id}_E) = f \circ \mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} = 0\,\lambda\, g^0$. La propriété est vraie pour $k = 0$.

- Supposons l'égalité vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons-la pour $k+1$.

$\phi_f(g) = \lambda g$ donc $f \circ g - g \circ f = \lambda g$.

$\phi_f(g^{k+1}) = f \circ g^{k+1} - g^{k+1} \circ f = (f \circ g^k) \circ g - g^{k+1} \circ f$. On a l'hypothèse de récurrence donc : $\phi_f(g^k) = k\lambda g^k$. Ainsi $f \circ g^k - g^k \circ f = k\lambda g^k$

donc $f \circ g^k = g^k \circ f + k\lambda g^k$.

Alors $\phi_f(g^{k+1}) = (g^k \circ f + k\lambda g^k) \circ g - g^{k+1} \circ f = g^k \circ f \circ g + k\lambda g^{k+1} - g^{k+1} \circ f$.

Or $f \circ g = g \circ f + \lambda g$.

$\phi_f(g^{k+1}) = g^k \circ (g \circ f + \lambda g) + k\lambda g^{k+1} - g^{k+1} \circ f$.

$\phi_f(g^{k+1}) = g^{k+1} \circ f + \lambda g^{k+1} + k\lambda g^{k+1} - g^{k+1} \circ f = (k+1)\lambda g^{k+1}$. ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \phi_f(g^k) = k\lambda g^k.$

b) Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\phi_f(g^k) = k\lambda g^k$ et $g^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k\lambda \in \mathrm{Sp}\,\phi_f$.

Comme λ n'est pas nul, ϕ_f admet une infinité de valeurs propres

ceci est impossible car $\phi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie

(égale à n^2).

Alors $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $g^k \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. donc g est nilpotent.

Q6 $\lambda \in \mathrm{Sp}\, f$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$. Alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $AX = \lambda X$.

$\mu \in \mathrm{Sp}\, f$ donc $\mu \in \mathrm{Sp}\, A$.

Alors $A - \mu I_n$ n'est pas inversible. Donc ${}^t(A - \mu I_n)$ n'est pas inversible.

Ainsi ${}^tA - \mu I_n$ n'est pas inversible. Cela permet de dire que μ est une

valeur propre de ${}^tA$. $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et ${}^tAY = \mu Y$.

$AX{}^tY - X{}^tYA = \lambda X{}^tY - X{}^t({}^tAY) = \lambda X{}^tY - X{}^t(\mu Y) = \lambda X{}^tY - \mu X{}^tY.$

$AX{}^tY - X{}^tYA = (\lambda - \mu)X{}^tY.$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors 1) $X{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2) $X{}^tY = (x_i y_j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

Soit g l'endomorphisme de E de matrice X^tY dans $\mathcal{B}$.

$AX^tY - X^tYA = (\lambda-\mu)X^tY$. donc $f\circ g - g\circ f = (\lambda-\mu)g$.

ce qui donne $\phi_f(g) = (\lambda-\mu)g$.

$X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $x_{i_0} \neq 0$.

$Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0} y_{j_0}$ est un coefficient non nul de la matrice X^tY.

donc $X^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors $g \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\phi_f(g) = (\lambda-\mu)g$.

ce qui permet de dire que <u>$\lambda-\mu$ est une valeur propre de ϕ_f.</u>

Q7 a) $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de f.

Alors $\hat{\mathcal{B}} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre de E de cardinal n et n est la dimension de E.

<u>$\hat{\mathcal{B}} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.</u>

Posons $D = \mathcal{M}_{\hat{\mathcal{B}}}(f)$. $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Posons également $D = (d_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$MD = DM \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj}$

$MD = DM \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} d_{jj} = d_{ii} m_{ij}$ $\longleftarrow \begin{cases} d_{kj} = 0 \text{ si } k \neq j \\ d_{ik} = 0 \text{ si } k \neq i \end{cases}$

$MD = DM \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$

$MD = DM \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\begin{cases} m_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \quad (\text{car } \lambda_j - \lambda_i \neq 0) \\ 0 = 0 & \text{si } i = j \quad !! \end{cases}$

$MD = DM \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0.$

$MD = DM \Leftrightarrow M$ est une matrice diagonale.

<u>L'ensemble des matrices qui commutent avec $M_{\tilde{B}}(f)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.</u>

b) $\mathcal{D} = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid MD = DM\} = \{\mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n);\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\}$.

$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix};\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$. Notons $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$. $D = \{\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{22} + \dots + \alpha_n E_{nn};\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\}$

<u>$\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$</u>. Notons alors que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$... $(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$ est une famille génératrice de $\mathcal{D}$. c'est aussi une famille libre comme sous-famille d'une base.

Alors <u>$(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$ est une base de $\mathcal{D}$</u>. <u>$\dim \mathcal{D} = n$</u>.

$\mathrm{Ker}\,\phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f\circ g = g\circ f\}$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

$g \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$

$\Updownarrow$ $f\circ g = g\circ f$

$\Updownarrow$

$M_{\tilde{B}}(f) M_{\tilde{B}}(g) = M_{\tilde{B}}(g) M_{\tilde{B}}(f)$

$\Updownarrow$ $M_{\tilde{B}}(g) \in \mathcal{D}$. <u>$\mathrm{Ker}\,\phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid M_{\tilde{B}}(g) \in \mathcal{D}\}$.</u>

Posons $\forall g \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$, $L(g) = M_{\tilde{B}}(g)$. L est clairement une application linéaire injective de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ dans $\mathcal{D}$. Montrons qu'elle est surjective. Soit $M \in \mathcal{D}$.

$\exists! g \in \mathcal{L}(E),\ M_{\tilde{B}}(g) = M$. Alors $M_{\tilde{B}}(g) \in \mathcal{D}$ donc $g \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$.

$g \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$ et $L(g) = M_{\tilde{B}}(g) = M$. Ceci achève de montrer la surjectivité de L.

<u>L est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ sur $\mathcal{D}$.</u>

Mais $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{D}$. Donc $\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = \dim \mathcal{D} = n$.

Alors $\mathrm{rg}\,\phi_f = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = n^2 - n$.

$\underline{\underline{\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = n}}$ et $\underline{\underline{\mathrm{rg}\,\phi_f = n^2 - n}}$.

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $f^\ell \in \mathrm{Ker}\,\phi_f$ d'après II Q 2 b)

$(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est une famille d'éléments de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ de cardinal n.

Or $\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = n$. Pour montrer que cette famille est une base de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ il ne reste donc plus à montrer qu'elle est libre.

Soit $(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell f^\ell = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_{\hat{B}}\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell f^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell\, \mathcal{M}_{\hat{B}}(f^\ell) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell\, (\mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n))^\ell$

$0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell\, \mathrm{Diag}(\lambda_1^\ell, \cdots, \lambda_n^\ell) = \mathrm{Diag}(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \cdots, P(\lambda_n))$ où P est le polynôme $\sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell X^\ell$.

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$. Alors $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont n racines de P deux à deux distinctes. Or $\deg P \leq n-1$ donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Alors $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1} = 0$. Ceci achève de montrer que $(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$.

Mieux $\underline{\underline{(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n-1}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,\phi_f}}$.

b) → $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

→ $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \in \mathcal{S}$ donc $\mathcal{S} \neq \emptyset$

→ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $M = (m_{ij})$ et $N = (n_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{S}$.

$\lambda M+N=(\lambda m_{ij}+n_{ij})$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda m_{ii}+n_{ii}=\lambda\times 0+0=0$. Donc $\lambda M+N\in\mathcal{S}$.

ceci achève de montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

Posons $L=\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i\neq j\}$.

$(E_{ij})_{(i,j)\in L}$ est clairement une famille génératrice de $\mathcal{S}$. En effet:

1) $\forall(i,j)\in L$, $E_{ij}\in\mathcal{S}$

2) Soit $M=(m_{ij})\in\mathcal{S}$.

$$M=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}E_{ij} \underset{m_{ii}=0}{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_{ij}E_{ij}=\sum_{(i,j)\in L} m_{ij}E_{ij}.$$

$(E_{ij})_{(i,j)\in L}$ est également une famille libre comme sous-famille de la base $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Donc $(E_{ij})_{(i,j)\in L}$ est une base de $\mathcal{S}$.

Alors $\dim\mathcal{S}=\operatorname{card}L=\operatorname{card}\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i\neq j\}=n^2-n$.

$\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2-n.

Posons $H=\{h\in\mathcal{L}(E) \mid M_{\mathcal{B}}(h)\in\mathcal{S}\}$.

- $H\subset\mathcal{L}(E)$.
- $0_{\mathcal{L}(E)}\in H$ car $0_{M_n(\mathbb{K})}\in\mathcal{S}$. Alors $H\neq\emptyset$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $(h_1,h_2)\in H^2$.

$M_{\mathcal{B}}(\lambda h_1+h_2)=\lambda M_{\mathcal{B}}(h_1)+M_{\mathcal{B}}(h_2)\in\mathcal{S}$ car $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ et, $M_{\mathcal{B}}(h_1)$ et $M_{\mathcal{B}}(h_2)$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$. Alors $\lambda h_1+h_2\in H$

Alors H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Il est clair que H est isomorphe à $\mathcal{S}$ ($h\mapsto M_{\mathcal{B}}(h)$ définit un isomorphisme de H sur $\mathcal{S}$).

Voir p. 14 !

Alors $\dim H = \dim \mathcal{S} = n^2 - n = \dim \operatorname{Im} \phi_f$.

Montrons que $\operatorname{Im} \phi_f \subset H$.

Soit $h \in \operatorname{Im} \phi_f$. $\exists g \in \mathcal{L}(E)$, $h = \phi_f(h) = f \circ h - h \circ f$.

$\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(h) = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(f)\,\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(g) - \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(g)\,\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(f)$.

Posons $\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(h) = (\alpha_{ij})$, $\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(g) = (\beta_{ij})$ et $\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(f) = (\gamma_{ij})$

Notons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\gamma_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\beta_{kj} - \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\gamma_{kj} = \gamma_{ii}\beta_{ij} - \beta_{ij}\gamma_{jj} = (\lambda_i - \lambda_j)\beta_{ij}$$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_{ii} = 0$. Donc $\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(h) \in \mathcal{S}$. Alors $h \in H$.

Finalement $\operatorname{Im} \phi_f \subset H$ et $\dim \operatorname{Im} \phi_f = \dim H = n^2 - n < +\infty$.

Donc $\operatorname{Im} \phi_f = H$. C'est-à-dire que $\underline{\underline{\operatorname{Im} \phi_f = \{ h \in \mathcal{L}(E) \mid \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(h) \in \mathcal{S} \}}}$.

Preuve de H isomorphe à $\mathcal{S}$. Posons $\forall h \in H$, $\hat{L}(h) = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(h)$. $\hat{L}$ est clairement une application linéaire injective de H dans $\mathcal{S}$.

$H = \{ h \in \mathcal{L}(E) \mid \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(h) \in \mathcal{S} \}$.

Montrons qu'elle est surjective.

Soit $M \in \mathcal{S}$. $\exists! h \in \underline{\underline{\mathcal{L}}}(E)$, $\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(h) = M$. M appartient à $\mathcal{S}$ donc par définition de H : $h \in H$. Ainsi $h \in H$ et $\hat{L}(h) = \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(h) = M$.

$\forall M \in \mathcal{S}$, $\exists h \in H$, $\hat{L}(h) = M$. $\hat{L}$ est surjective.

Donc $\hat{L}$ est un isomorphisme de H sur $\mathcal{S}$. H et $\mathcal{S}$ sont isomorphes.

R.

PARTIE III Deux caractérisations des endomorphismes de trace nulle

(Q1) a) Soit f un endomorphisme de E. Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ ait ses coefficients diagonaux nuls.

Alors $tr(f) = tr(M_{\mathcal{B}}(f)) = 0$! la condition est suffisante.

b) Supposons que dim $E = 1$. Soit f un endomorphisme de trace nul.

Soit $\mathcal{B} = (e_1)$ une base de E. Posons $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

$f(e_1) \in E = Vect(e_1)$. $\exists a \in \mathbb{K}$, $f(e_1) = a e_1$.

Donc $A = [a]$. Or $0 = tr(f) = tr(A) = a$.

Ainsi $A = 0_{M_1(\mathbb{K})}$. Les coefficients diagonaux de A sont nuls !!

la condition est nécessaire pour les espaces vectoriels de dimension 1.

(Q2) Supposons que la condition est nécessaire dans les espaces vectoriels de dimension $n-1$ pour n dans $[\![2, +\infty[\![$.

Ici dim $E = n$. $h \in \mathcal{L}(E)$ et $tr(h) = 0$.

a) Supposons $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $M_{\mathcal{B}}(h) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ donc les coefficients diagonaux de $M_{\mathcal{B}}(h)$ sont nuls.

b) Dans la suite h n'est pas nul.

Supposons que pour tout x dans E, $(x, h(x))$ est liée.

Alors d'après I B h est une homothétie vectorielle.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $h = \lambda Id_E$. Alors $0 = tr(h) = tr(\lambda Id_E) = \lambda tr(Id_E) = \lambda n$

$\uparrow$ dim $E = n$.

Alors $\lambda x = 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\lambda = 0$ et $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui n'est pas.

Donc il existe un vecteur e_1 tel que $(e_1, h(e_1))$ est libre.

c) Posons $e_2 = h(e_1)$. (e_1, e_2) est une famille libre de E.

On peut la compléter en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Posons $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$.

1) (e_1) est une base de $D = \mathrm{Vect}(e_1)$

2) $(e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de F. Cette famille est également libre comme sous-famille de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Donc $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de F.

3) $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

Alors D et F sont supplémentaires. Notons que $h(e_1) = e_2 \in F$.

Il existe un supplémentaire F de la droite vectorielle D engendrée par e_1 qui contient $h(e_1)$.

d) • $\forall y \in F$, $p(f(y)) \in F$. Alors h' est une application de F dans F.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(y_1, y_2) \in F \times F$.

$h'(\lambda y_1 + y_2) = p(f(\lambda y_1 + y_2)) \underset{f \text{ est linéaire}}{=} p(\lambda f(y_1) + f(y_2)) \underset{p \text{ est linéaire}}{=} \lambda\, p(f(y_1)) + p(f(y_2))$.

$h'(\lambda y_1 + y_2) = \lambda h'(y_1) + h'(y_2)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (y_1, y_2) \in F^2$, $h'(\lambda y_1 + y_2) = \lambda h'(y_1) + h'(y_2)$. h' est linéaire.

Donc h' est un endomorphisme de F.

• Reprenons la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E obtenue dans c)

$\mathcal{B}' = (e_2, \dots, e_n)$ est une base de F.

Posons $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}(h)$ et $A' = M_{\mathcal{B}'}(h')$.

$\forall j \in [\![2, n]\!]$, $h'(e_j) = p(h(e_j)) = p\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, p(e_i)$

Or p est la projection sur $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ parallèlement à $D = \mathrm{Vect}(e_1)$.

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{si } i \geq 2 \\ 0_E & \text{si } i = 1 \end{cases}$.

donc $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $h'(e_j) = \sum_{\underline{\underline{i=2}}}^{n} a_{ij} e_i$.

Alors $A' = M_{\mathcal{B}'}(h') = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

donc $\mathrm{tr}(h') = \mathrm{tr}(A') = \sum_{i=2}^{n} a_{ii}$.

Or $\mathrm{tr}(h) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ donc $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$.

Or $h(e_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i$ et $h(e_1) = e_2$.

Comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Retenons que $a_{11} = 0$.

Alors $\mathrm{tr}(h') = \sum_{i=2}^{n} a_{ii} \overset{]}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(h) = 0$. $\underline{\mathrm{tr}(h') = 0.}$

Finalement <u>h' est un endomorphisme de trace nulle de F.</u>

Or $\dim F = n-1$. L'hypothèse de récurrence s'applique à h'.

Donc il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_2, e'_3, \dots, e'_n)$ telle que les coefficients diagonaux de la matrice de h' dans la base $\mathcal{B}'$ soient nuls.

Posons $e'_1 = e_1$! (e'_1) est une base de D et $(e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de F.

Comme D et F sont supplémentaires : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de E.

Posons $C = (c_{ij}) = M_{\mathcal{B}'}(h)$. $0 = tr(h) = tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \cdot \underline{\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = 0}$.

$\forall j \in [\![2, n]\!]$, $h'(e_j) = p(h(e_j)) = p(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, p(e_i) = \sum_{i=2}^{n} c_{ij} e_i$

Alors $M_{\mathcal{E}'}(h') = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$. Or les coefficients diagonaux de

$M_{\mathcal{E}'}(h')$ sont nuls. Ainsi $c_{22} = c_{33} = \dots = c_{nn} = 0$.

Alors $0 = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = c_{11}$. Donc $c_{11} = 0$.

Finalement $c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn} = 0$. Les coefficients diagonaux de

la matrice de h dans $\mathcal{B}$ sont nuls.

Ceci achève la récurrence.

<u>La condition est bien nécessaire.</u>

e) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$tr(A) = 0 \iff$ A est semblable à une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

<u>Exercice..</u> Utiliser ce qui précède pour montrer ce résultat.

(Q3) a) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'il existe deux endomorphismes f et g tels que $h = [f,g]$.

$tr((f \circ g) = tr(g \circ f)$.

$tr\, h = tr([f,g]) = tr(f \circ g - g \circ f) = tr(f \circ g) - tr(g \circ f) = 0$

$tr(h) = 0$.

<u>La condition est suffisante.</u>

b) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $tr(h) = 0$. D'après III Q 2 il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de h dans $\mathcal{B}$ ait ses coefficients diagonaux nuls. Rappelons que $\dim E = n$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Soit f l'endomorphisme de E de matrice $Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathcal{B}$.

Alors f possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

Mieux $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Nous sommes dans les conditions de II Q 7. Nous pouvons alors dire que $\mathrm{Im}\, \phi_f$ est l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Dans ces conditions $h \in \mathrm{Im}\, \phi_f$. Alors $\exists g \in \mathcal{L}(E)$, $h = \phi_f(g)$.

Donc $h = [f,g]$. <u>La condition est nécessaire.</u>

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. <u>$tr(A) = 0 \Leftrightarrow \exists (B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A = BC - CB$.</u>

Q3'

a) Supposons que $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $h = 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} - 0_{\mathcal{L}(E)} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = [0_{\mathcal{L}(E)}, 0_{\mathcal{L}(E)}]$.

Donc il existe bien deux endomorphismes f et g de E tels que $h = [f,g]$.

b) Dans la suite $h \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. On a toujours $tr(h) = 0$!

Supposons que pour tout x dans E, $(x, h(x))$ est liée.

Alors d'après I B h est une homothétie vectorielle de E. $\dim E = n$.

$\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $h = \lambda Id_E$. Ainsi $0 = tr(h) = tr(\lambda Id_E) = \lambda tr(Id_E) = \lambda n$

$\lambda n = 0$ et $n \neq 0$ donc $\lambda = 0$. Alors $h = 0 . Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ceci n'est pas.

Donc il existe un vecteur e_1 de E tel que $(e_1, h(e_1))$ est libre.

c) Posons $e_2 = h(e_1)$. (e_1, e_2) est une famille libre de E.

On peut compléter cette famille libre de E en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Posons $A = (a_{ij})$.

$h(e_1) = e_2$ donc $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{31} = a_{32} = \dots = a_{3n} = 0$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$. $Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. Notons que $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$!

Posons $X = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$. $X \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et ${}^tX = (a_{12} \ a_{13} \cdots a_{1n})$

Posons $A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

De plus $A = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$ ... avec $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$

d) $0 = \operatorname{tr}(h) = \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=2}^{n} a_{ii} = \operatorname{tr}(A_1)$.

$a_{11} = 0$.

Alors $\operatorname{tr}(A_1) = 0$.

Soit h_1 l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n-1}$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{K}^{n-1}$ est A_1.

$\operatorname{tr}(h_1) = \operatorname{tr}(A_1) = 0$. Comme $\dim \mathbb{K}^{n-1} = n-1$, l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe deux endomorphismes f_1 et g_1 de $\mathbb{K}^{n-1}$ tels que : $h_1 = [f_1, g_1]$. $h_1 = f_1 \circ g_1 - g_1 \circ f_1$.

Soit U_1 (resp. V_1) la matrice de f_1 (resp. g_1) dans $\mathcal{B}_1$.

Alors $A_1 = U_1 V_1 - V_1 U_1$

Donc $\exists\, U_1 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}),\ \exists V_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}),\ A_1 = U_1V_1 - V_1U_1$.

Supposons que $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $U_1 - \alpha I_{n-1}$ n'est pas inversible.

Alors tout élément de $\mathbb{K}$ est valeur propre de U_1.

Ainsi U_1 possède une infinité de valeurs propres !!

Donc il existe un élément α de $\mathbb{K}$ tel que $U_1 - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.

e) $UV - VU = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\,{}^tR \\ U_1 S & U_1V_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & {}^tRU_1 \\ \alpha S & V_1U_1 \end{pmatrix}$

produit par blocs ...

$$UV - VU = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\,{}^tR - {}^tRU_1 \\ U_1S - \alpha S & U_1V_1 - V_1U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^tR(U_1 - \alpha I_{n-1}) \\ (U_1 - \alpha I_{n-1})S & A_1 \end{pmatrix}$$

Alors $A = UV - VU \iff \begin{cases} -{}^tR(U_1 - \alpha I_{n-1}) = {}^tX \\ (U_1 - \alpha I_{n-1})S = Y \end{cases}$ (*)

Notons que $U_1-\alpha I_{n-1}$ est inversible.

<u>Posons alors</u> $S = (U_1-\alpha I_{n-1})^{-1}Y$ et $R = -{}^t\left[{}^tX(U_1-\alpha I_{n-1})^{-1}\right]$

1/ $S \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $R \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$.

2/ • $(U_1-\alpha I_{n-1})S = Y$

• $-{}^tR = {}^tX(U_1-\alpha I_{n-1})^{-1}$ donc $-{}^tR(U_1-\alpha I_{n-1}) = {}^tX$.

<u>Posons alors</u> $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix}$.

D'après 1/, 2/ et (*) $A = UV - VU$.

Soit f (resp. g) l'endomorphisme de E de matrice U (resp. V) dans la base $\mathcal{B}$.

$M_{\mathcal{B}}(h) = A = UV - VU = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(g) - M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f\circ g - g\circ f)$.

donc $h = f\circ g - g\circ f = [f,g]$.

Ainsi $\exists (f,g) \in \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$, $h = [f,g]$.

ceci achève la récurrence.

<u>On retrouve alors pour h dans $\mathcal{L}(E)$ l'équivalence entre les deux assertions suivantes.</u>

i) $tr(h) = 0$

ii) $\exists (f,g) \in \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$, $h = [f,g] = f\circ g - g\circ f$.

PARTIE IV Réduction de ϕ_f lorsque f est diagonalisable

Q1 Soit $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $u_{i,j}(e_k)=\begin{cases} e_i \text{ si } k=j\\ 0_E \text{ si } k\neq j\end{cases}$.

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k)=(f\circ u_{i,j}-u_{i,j}\circ f)(e_k)=f(u_{i,j}(e_k))-u_{i,j}(f(e_k))$

$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k)=f(u_{i,j}(e_k))-u_{i,j}(\alpha_k e_k)=f(u_{i,j}(e_k))-\alpha_k u_{i,j}(e_k)$.

$\forall k\in[\![1,n]\!]-\{j\}$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k)=f(0_E)-\alpha_k 0_E=0_E$.

$\phi_f(u_{i,j})(e_j)=f(u_{i,j}(e_j))-\alpha_j u_{i,j}(e_j)=f(e_i)-\alpha_j e_i=\alpha_i e_i-\alpha_j e_i=(\alpha_i-\alpha_j)e_i$.

$\phi_f(u_{i,j})(e_j)=(\alpha_i-\alpha_j)e_i=(\alpha_i-\alpha_j)u_{i,j}(e_j)$.

Notons que $\forall k\in[\![1,n]\!]-\{j\}$, $\phi_f(u_{i,j})(e_k)=0_E=(\alpha_i-\alpha_j)u_{i,j}(e_k)$.

Ainsi les endomorphismes $\phi_f(u_{i,j})$ et $(\alpha_i-\alpha_j)u_{i,j}$ coïncident sur la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de E. Ils sont donc égaux.

Finalement $\underline{\underline{\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \phi_f(u_{i,j})=(\alpha_i-\alpha_j)u_{i,j}}}$.

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. $M_{\mathcal{B}}(u_{i,j})=E_{i,j}\neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$ donc $u_{i,j}\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $\alpha_i-\alpha_j$ est une valeur propre de ϕ_f et $u_{i,j}$ est un vecteur associé.

Montrons que $(u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Comme cette famille a pour cardinal n^2 qui est la dimension de $\mathcal{L}(E)$ il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit $(\gamma_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}u_{i,j}=0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors $0_{M_n(\mathbb{K})}=M_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{L}(E)})=M_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}u_{i,j}\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \gamma_{i,j}M_{\mathcal{B}}(u_{i,j})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\gamma_{i,j}E_{i,j}$

Comme la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ est libre : $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\delta_{i,j}=0$.

ceci achève de montrer que la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ est libre.

d'après ce qui a été dit plus haut $(u_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

mieux c'est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de ϕ_f.

Alors $\underline{\underline{\phi_f \text{ est diagonalisable}}}$.

Rappelons que pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_f associé à la valeur propre d_i-d_j. Comme $(u_{i,j})_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$: $\underline{\underline{Sp\,\phi_f=\{d_i-d_j\,;\,(i,j)\in [\![1,n]\!]^2\}}}$ ou

$\underline{\underline{Sp\,\phi_f=\{\lambda_i-\lambda_j\,;\,(i,j)\in [\![1,p]\!]^2\}}}$.

Q2 a) * Soit $g\in \operatorname{Ker}\phi_f$. Soit $i\in [\![1,p]\!]$. Soit $x\in SEP(f,\lambda_i)$.

$\phi_f(g)=0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $f\circ g-g\circ f=0_{\mathcal{L}(E)}$.

$0_E=f(g(x))-g(f(x))=f(g(x))-g(\lambda_i x)=f(g(x))-\lambda_i g(x)$.

$0_E=(f-\lambda_i Id_E)(g(x))$. Alors $g(x)\in SEP(f,\lambda_i)$.

Ainsi $\forall i\in [\![1,p]\!]$, $\forall x\in SEP(f,\lambda_i)$, $g(x)\in SEP(f,\lambda_i)$. $\forall i\in [\![1,p]\!]$, $g(SEP(f,\lambda_i))\subset SEP(f,\lambda_i)$.

* Réciproquement soit g un endomorphisme de E tel que :

$\forall i\in [\![1,p]\!]$, $g(SEP(f,\lambda_i))\subset SEP(f,\lambda_i)$. Montrons que $g\in \operatorname{Ker}\phi_f$.

$\phi_f(g)=f\circ g-g\circ f$. Soit $x\in E$. $\exists !\,(x_1,\dots,x_p)\in SEP(f,\lambda_1)\times\dots\times SEP(f,\lambda_p)$,

$x=\sum_{i=1}^{p}x_i$. $\phi_f(g)(x)=\phi_f(g)\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\phi_f(g)(x_i)=\sum_{i=1}^{p}(f\circ g-g\circ f)(x_i)$.

$\phi_f(g)(x)=\sum_{i=1}^{p}\left(f(g(x_i))-g(f(x_i))\right)=\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i g(x_i)-g(\lambda_i x_i)\right)=\sum_{i=1}^{p}0_E=0_E$

$x_i\in SEP(f,\lambda_i)$ donc $g(x_i)\in SEP(f,\lambda_i)$.

Alors $\forall x \in E$, $\phi_f(g)(x) = 0_E$. $\phi_f(g) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $g \in \operatorname{Ker} \phi_f$.

Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Ker} \phi_f = \{ g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in [\![1,p]\!], g(SEP(f,\lambda_i)) \subset SEP(f,\lambda_i) \}}}$.

<u>Remarque</u>.. $\operatorname{Ker} \phi_f$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui laissent stables les sous-espaces propres de f.

<u>b</u>) Soit $h \in \operatorname{Ker} \phi_f$. $SEP(f,\lambda_1), \dots, SEP(f,\lambda_p)$ sont stables par h.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ nous notons h_i l'endomorphisme de $SEP(f,\lambda_i)$ qui à tout x dans $SEP(f,\lambda_i)$ associe $h(x)$.

Posons $\forall h \in \operatorname{Ker} \phi_f$, $T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p)$.

<u>T est une application de $\operatorname{Ker} \phi_f$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.</u>

Notons que T est un isomorphisme.

* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(h, \tilde{h}) \in \operatorname{Ker} \phi_f \times \operatorname{Ker} \phi_f$.

$T(\lambda h + \tilde{h}) = ((\lambda h + \tilde{h})_1, (\lambda h + \tilde{h})_2, \dots, (\lambda h + \tilde{h})_p)$.

$T(\lambda h + \tilde{h}) = (\lambda h_1 + \tilde{h}_1, \lambda h_2 + \tilde{h}_2, \dots, \lambda h_p + \tilde{h}_p)$

$T(\lambda h + \tilde{h}) = \lambda (h_1, h_2, \dots, h_p) + (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_p) = \lambda T(h) + T(\tilde{h})$.

<u>T est linéaire.</u>

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ un élément de $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

Notons par analyse-synthèse que $\exists! h \in \operatorname{Ker} \phi_f$, $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

* Supposons que h soit un élément de $\operatorname{Ker} \phi_f$ tel que $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

Soit $x \in E$. $\exists! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$$h(x) = \sum_{i=1}^{p} h(x_i) = \sum_{i=1}^{p} h_i(x_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i)}_{(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) = T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p)}$$

donc $h(x) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i)$ si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$

<u>d'où l'unicité de h.</u>

* Soit h l'application de E dans E qui a tout x élément de E tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$ associe $\sum_{i=0}^{p} \varphi_i(x_i)$. Notons que $h \in K_\mathbb{C}\phi_f$ et que $T(h) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.

→ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x,y) \in E^2$.

$\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

$\exists ! (y_1, y_2, \dots, y_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i$

$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + y_i)$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda x_i + y_i \in SEP(f,\lambda_i)$.

Alors $h(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(y_i) = \lambda h(x) + h(y)$

$\varphi_i \in \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i))$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

Par conséquent <u>h est linéaire.</u>

→ Donc $h \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in SEP(f,\lambda_i)$. Posons $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $x_k = \begin{cases} x & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$

$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in SEP(f,\lambda_1) \times SEP(f,\lambda_2) \times \dots \times SEP(f,\lambda_p)$.

Donc $h(x) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \varphi_k(0_E) + \varphi_i(x_i) = \varphi_i(x_i) = \varphi_i(x) \in SEP(f,\lambda_i)$

$\begin{cases} \varphi_i \in \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i)) \\ x \in SEP(f,\lambda_i) \end{cases}$

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$, $h(x) \in SEP(f,\lambda_i)$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $h(SEP(f,\lambda_i)) \subset SEP(f,\lambda_i)$.

Donc <u>$h \in K_\mathbb{C}\phi_f$.</u>

→ Nous avons vu que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$ $h(x) = \varphi_i(x)$.

Alors $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall x \in SEP(f,\lambda_i)$, $h_i(x) = h(x) = \varphi_i(x)$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $h_i = \varphi_i$. Donc <u>$T(h) = (h_1, h_2, \dots, h_p) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$.</u>

Ceci achève de montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ admet un antécédent et un seul dans $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ par T.

Ceci pour tout $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

Donc T est une application linéaire bijective de $\mathrm{Ker}\,\phi_f$ dans $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.

<u>$\mathrm{Ker}\,\phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))$.</u>

<u>c)</u> Posons $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $n_i = \dim SEP(f,\lambda_i)$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\dim \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_i)) = n_i^2$.

Alors $\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = \dim \left(\mathcal{L}(SEP(f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(SEP(f,\lambda_p))\right) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2$

$\mathrm{rg}\,\phi_f = \dim \mathcal{L}(E) - \dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = n^2 - \sum_{i=1}^{p} n_i^2$

<u>$\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = \sum_{i=1}^{p} n_i^2$ et $\dim \mathrm{rg}\,\phi_f = n^2 - \sum_{i=1}^{p} n_i^2$ où $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $n_i = \dim SEP(f,\lambda_i)$</u>

<u>Si $p = n$:</u> f admet n valeurs propres deux à deux distinctes et $\dim E = n$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\dim SEP(f,\lambda_i) = 1$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $n_i = 1$

Donc <u>$\dim \mathrm{Ker}\,\phi_f = n$ et $\mathrm{rg}\,\phi_f = n^2 - n$.</u>

<u>Remarque</u>.. Nous retrouvons les résultats de II § 7.

PARTIE V f est diagonalisable lorsque ϕ_f est diagonalisable

Q1 a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\phi_f(g_i) = \beta_i g_i$; $f \circ g_i - g_i \circ f = \beta_i g_i$.

Alors $\beta_i g_i(x) = f(g_i(x)) - g_i(f(x)) = f(g_i(x)) - g_i(\lambda x) = f(g_i(x)) - \lambda g_i(x)$.

donc $f(g_i(x)) = (\lambda + \beta_i) g_i(x)$.

b) • φ est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans E par définition.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(g,h) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.

$\varphi(\lambda g + h) = (\lambda g + h)(x) = \lambda g(x) + h(x) = \lambda \varphi(g) + \varphi(h)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (g,h) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \varphi(\lambda g + h) = \lambda \varphi(g) + \varphi(h)$. φ est linéaire.

• Montrons que φ est surjective. Soit $y \in E$. Montrons qu'il existe g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi(g) = y$ c'est à dire tel que $g(x) = y$.

x est un vecteur propre de f donc x n'est pas nul. Posons $u_1 = x$.

(u_1) est une famille libre de E car u_1 n'est pas nul.

On peut donc compléter cette famille en une base $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de E. arbitraire!

Soit g l'endomorphisme de E tel que $g(u_1) = y$ et $\forall k \in [\![2,n]\!], g(u_k) = 0_E$

Alors $g \in \mathcal{L}(E)$ et $g(x) = g(u_1) = y$. Donc $\varphi(g) = y$.

$\forall y \in E, \exists g \in \mathcal{L}(E), \varphi(g) = y$. φ est surjective.

Ainsi φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{L}(E)$ dans E.

c) $(g_1, g_2, \cdots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

Alors $E = \varphi(\mathcal{L}(E)) = \varphi(\mathrm{Vect}(g_1, g_2, \cdots, g_{n^2})) = \mathrm{Vect}(\varphi(g_1), \varphi(g_2), \cdots, \varphi(g_{n^2}))$.
$\uparrow \varphi$ est surjective

$E = \mathrm{Vect}(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_{n^2}(x))$.

$(g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n^2}(x))$ est donc une famille génératrice de E.

(*) On peut alors extraire de cette famille une base $(g_i(x))_{i\in I}$ de E.

Alors pour tout $i \in I$, $g_i(x) \neq 0_E$.

Mieux : pour tout $i\in I$, $g_i(x) \neq 0_E$ et $f(g_i(x)) = (\lambda+\beta_i)\, g_i(x)$.

Ainsi $(g_i(x))_{i\in I}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Donc <u>f est diagonalisable</u>.

(*) Preuve du résultat de cours (?) proposé.

Posons $\mathcal{L} = \{ L \in \mathcal{P}([\![1,n^2]\!]) \mid L \neq \emptyset$ et $(g_i(x))_{i\in L}$ libre$\}$

Posons $\hat{\mathcal{L}} = \{\operatorname{card} L \,;\, L \in \mathcal{L}\}$. $\hat{\mathcal{L}} \subset [\![1,n^2]\!]$.

→ $(g_1(x), \dots, g_{n^2}(x))$ est une famille génératrice de E.

Donc au moins un des vecteurs de cette famille n'est pas nul.

$\exists i_0 \in [\![1,n^2]\!]$, $g_{i_0}(x) \neq 0_E$. $(g_{i_0}(x))$ est libre.

Alors $\{i_0\} \in \mathcal{L}$. Donc $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Ainsi $\hat{\mathcal{L}} \neq \emptyset$.

→ $\hat{\mathcal{L}}$ est une partie non vide de $[\![1,n^2]\!]$. $\hat{\mathcal{L}}$ possède un plus grand élément r. Il existe donc une partie I de $[\![1,n^2]\!]$ de cardinal r telle que $(g_i(x))_{i\in I}$ soit une famille libre de E.

Notons que cette famille est une base de E. Notons donc qu'elle est génératrice. Supposons que cette famille n'est pas génératrice. Alors le sous-espace vectoriel F qu'elle engendre est strictement inclus dans $E = \operatorname{Vect}(g_1(x), \dots, g_{n^2}(x))$.

Alors $\exists \ell \in [\![1,n^2]\!]$, $g_\ell(x) \notin F$ (dans le cas contraire $E \subset F$ donc $F = E$).

Notons que $\ell \notin I$ car $g_\ell(x) \notin F$.

Posons $I' = I \cup \{\ell\}$. card $I' = r+1$. Ainsi $I' \notin \mathcal{L}$.

Alors la famille $(g_i(x))_{i\in I'}$ est liée.

Il existe une famille $(\gamma_i)_{i\in I'}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$\sum_{i\in I'} \gamma_i g_i(x) = 0_E$ et telle qu'au moins un élément de cette famille ne soit pas nul.

$\gamma_\ell g_\ell(x) + \sum_{i\in I} \gamma_i g_i(x) = 0_E$. Supposons $\gamma_\ell \neq 0$.

Alors $g_\ell(x) = \sum_{i\in I} \left(-\frac{\gamma_i}{\gamma_\ell}\right) g_i(x) \in F$!! Donc $\gamma_\ell = 0$.

Alors $\sum_{i\in I} \gamma_i g_i(x) = 0_E$. Comme $(g_i(x))_{i\in I}$ est libre : $\forall i \in I,\ \gamma_i = 0$.

Finalement $\forall i \in I',\ \gamma_i = 0$ ce qui est contradictoire.

Donc $(g_i(x))_{i\in I}$ est une famille génératrice de E. C'est aussi une famille libre donc c'est une base de E.

Q2 $\underline{\underline{\mathbb{K}=\mathbb{C}}}$ a) $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ donc $(Id_E, f, \dots, f^{n^2})$ est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$ car son cardinal est n^2+1.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2+1} - \{0_{\mathbb{C}^{n^2+1}}\}, \quad \sum_{i=0}^{n^2} a_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Posons $P = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$. $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>f possède un polynôme annulateur non nul P.</u>

b) Supposons que P est constant. $\exists c \in \mathbb{C}^*,\ P = c$.

Alors $0_{\mathcal{L}(E)} = P(f) = c\, Id_E$. Or $Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $c = 0$!!
$\dim E \geq 1$.

Alors P n'est pas constant. Comme $P \in \mathbb{C}[X]$, P est scindé.

$\exists r \in \mathbb{N}^*, \exists c \in \mathbb{C}^*, \exists (t_1, t_2, \dots, t_r) \in \mathbb{C}^r$, $P = c(X-t_1)\dots(X-t_r)$.

$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $c(f - t_1 Id_E) \circ \dots \circ (f - t_r Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. c n'est pas nul donc $(f - t_1 Id_E) \circ \dots \circ (f - t_r Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Supposons que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $f - t_k Id_E$ est bijectif.

Alors $(f - t_1 Id_E) \circ \dots \circ (f - t_r Id_E)$ est bijectif comme composé de r endomorphismes bijectifs. Alors $0_{\mathcal{L}(E)}$ est un endomorphisme bijectif de E. ceci est impossible car $\dim E \geq 1$.

Donc $\exists i \in [\![1, r]\!]$ tel que $f - t_i Id_E$ n'est pas bijectif.

Alors $f - t_i Id_E$ n'est pas injectif car $\dim E < +\infty$.

Alors $t_i \in Sp f$.

<u>L'une des racines de P est une valeur propre de f.</u>

<u>Le spectre de f n'est pas vide.</u>

Q3 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous notons $\mathcal{B}$ la base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = A$.

<u>a)</u> Rappelons que $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de ϕ_f respectivement associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$. Posons $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $M_i = M_{\mathcal{B}}(g_i)$.

$\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $\beta_i g_i = \phi_f(g_i) = f \circ g_i - g_i \circ f$.

Alors $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $\beta_i M_i = A M_i - M_i A = \psi_A(M_i)$.

$\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $\psi_A(M_i) = \beta_i M_i$.

Soit $i \in [\![1, n^2]\!]$, g_i est un vecteur propre de φ_f donc $g_i \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Donc M_i est un vecteur propre de ψ_A associé à la valeur propre β_i.

$(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ψ_A. Montrons que cette famille est une base de $M_n(\mathbb{R})$. Comme son cardinal coïncide avec la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que $\sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i M_i = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

Alors $M_B(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0_{M_n(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i M_i = \sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i M_B(g_i) = M_B\left(\sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i g_i\right)$

$\sum_{i=1}^{n^2} \gamma_i g_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. La liberté de $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ donne : $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n^2} = 0$

ceci achève de montrer que $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{R})$ et même une base de $M_n(\mathbb{R})$.

$(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ψ_A.

Alors <u>ψ_A est diagonalisable.</u>

$\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $M_i \in M_n(\mathbb{R})$ et $\psi_A(M_i) = \beta_i M_i$. Et $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$ $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$

Alors $\forall i \in [\![1, n^2]\!]$, $M_i \in M_n(\mathbb{C})$, $\widehat{\psi}_A(M_i) = \psi_A(M_i) = \beta_i M_i$ et $M_i \neq 0_{M_n(\mathbb{C})}$

$(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est donc une famille de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $\widehat{\psi}_A$. Montrons que $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$. Le cardinal de cette famille étant égal à la dimension de $M_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que la famille est libre.

Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2}$ tel que $\sum_{k=1}^{n^2} \gamma_k M_k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$

$$\sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Re}(\gamma_k) M_k + i \sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Im}(\gamma_k) M_k = 0_{M_n(\mathbb{C})}.$$

or pour tout $k \in [\![1, n^2]\!]$, M_k est une matrice à coefficients réels.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Re}(\gamma_k) M_k = \sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{Im}(\gamma_k) M_k = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

comme $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$

il vient : $\forall k \in [\![1, n^2]\!]$, $\mathrm{Re}(\gamma_k) = \mathrm{Im}(\gamma_k) = 0$.

donc $\forall k \in [\![1, n^2]\!]$, $\gamma_k = 0$.

Ainsi $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{C})$.

Ainsi $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$.

mieux encore $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $\hat{\varphi}_A$ associés aux valeurs propres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}$.

Ainsi 1°/ $\hat{\varphi}_A$ est diagonalisable

2°/ $\mathrm{Sp}\, \hat{\varphi}_A = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n^2}\}$ donc les valeurs propres de $\hat{\varphi}_A$ sont réelles.

b) $A \in M_n(\mathbb{R})$ donc $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

d'après Q2 (!!) $\mathrm{Sp}\, h \neq \emptyset$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A \neq \emptyset$.

Or $\mathrm{Sp}\, f = \emptyset$ par hypothèse donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$ ... et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A \neq \emptyset$

Alors il existe un complexe non réel γ valeur propre de A.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\quad AX = \gamma X$ et $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

En conjuguant il vient : $\overline{A}\,\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\gamma}\,\overline{X}$ et $\overline{X} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Or $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\overline{A} = A$. Ainsi $A\overline{X} = \overline{\gamma}\,\overline{X}$ et $\overline{X} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$

donc $\overline{\gamma} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A$. $A - \overline{\gamma} I_n$ n'est pas inversible. Donc ${}^t(A - \overline{\gamma} I_n)$ n'est

pas inversible. Alors ${}^tA - \overline{\gamma} I_n$ n'est pas inversible. $\overline{\gamma}$ est valeur propre de ${}^tA$.

$\overline{\gamma}$ est valeur propre de A et de ${}^tA$.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $AX = \gamma X$ $\quad (\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A)$.

$\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et ${}^tA Y = \overline{\gamma} Y$ $\quad (\overline{\gamma} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, {}^tA)$.

Notons que $X\,{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\hat{\varphi}_A(X\,{}^tY) = AX\,{}^tY - X\,{}^tY A = \gamma X\,{}^tY - X\,{}^t({}^tA Y) = \gamma X\,{}^tY - X\,{}^t(\overline{\gamma} Y)$.

$\hat{\varphi}_A(X\,{}^tY) = \gamma X\,{}^tY - \overline{\gamma} X\,{}^tY = (\gamma - \overline{\gamma}) X\,{}^tY$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\exists p \in [\![1, n]\!],\ x_p \neq 0$ car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

$\exists q \in [\![1, n]\!],\ y_q \neq 0$ car $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Alors $x_p y_q \neq 0$. Or $x_p y_q$ est le coefficient de $X\,{}^tY$ situé à l'intersection

de la $p^{\text{ième}}$ ligne et de la $q^{\text{ième}}$ colonne donc $X\,{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

$\hat{\varphi}_A(X\,{}^tY) = (\gamma - \overline{\gamma}) X\,{}^tY$ et $X\,{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Ainsi $\gamma - \overline{\gamma}$ est une valeur propre de $\hat{\varphi}_A$.

car $\gamma - \bar{\gamma} = 2i \operatorname{Im} \gamma$ et $\operatorname{Im} \gamma$ n'est pas un réel nul car $\gamma \notin \mathbb{R}$.

Alors $\gamma - \bar{\gamma}$ est une valeur propre de $\hat{\varphi}_A$ qui n'est pas réelle.

cela contredit Q3 a).

Q4 En supposant $\operatorname{sp} f = \emptyset$ nous avons obtenu une contradiction.

Alors f possède au moins une valeur propre.

Q1 permet alors de dire que f est diagonalisable.

Donc si φ_f est diagonalisable : f est diagonalisable.

mieux φ_f est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable ...

d'après Q4.