Préliminaires

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} .$$

On se propose de démontrer que, si les séries de termes généraux respectifs x_n et y_n sont absolument convergentes, de sommes respectives S et S', alors la série de terme général z_n est convergente de somme SS' .

1°) Cas où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 0$ et $y_n \geqslant 0$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} z_k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{2n} z_k .$$

b) En déduire que, si les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont convergentes, de sommes respectives S et S', alors $\sum z_n$ est convergente de somme SS' .

2°) Cas général :

On suppose ici que les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont absolument convergentes, de sommes respectives S et S' . On pose, pour n dans $\mathbb{N}$,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k||y_{n-k}|, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k|, \quad T'_n = \sum_{k=0}^{n} |y_k| .$$

a) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant w_n$. En déduire la convergence de la série $\sum z_n$. Soient Z la somme de la série de terme général z_n et, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k, \quad Z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} y_k .$$

b) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}$, $|S_n S'_n - Z_n| \leqslant T_n T'_n - W_n$.

c) En déduire que $Z = SS'$.

Partie I

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = \frac{1}{2}[P(X+1) + P(X)] .$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on appelle ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que ϕ_n est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$.

b) Déterminer les valeurs propres de ϕ_n et indiquer si ϕ_n est diagonalisable .

c) Montrer qu'il existe un unique élément E_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\frac{1}{2}[E_n(X+1) + E_n(X)] = \frac{X^n}{n!} .$$

2°) On s'intéresse maintenant aux propriétés de la suite de polynômes $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que :

a) $E_0 = 1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E_n(0) + E_n(1) = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E'_n = E_{n-1}$.

d) Montrer que les conditions a,b,c caractérisent la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ([illegible] ...)

e) Préciser E_n pour $n \leqslant 4$.

3°) a) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$.

b) Montrer que, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, on a $E_{2p}(1) = E_{2p}(0) = 0$ et $E_{2p-1}(\frac{1}{2}) = 0$.

4°) Etudier les variations de E_n sur $[0,1]$ selon la parité de n . On montrera notamment que, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, 0 et 1 sont les seules racines de E_{2p} dans $[0,1]$, $\frac{1}{2}$ est la seule racine de E_{2p+1} dans $[0,1]$ et $(-1)^{p+1} E_{2p+1}(0) > 0$.

Partie II

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $a_n = E_n(0)$, où E_n est défini dans la première partie .

1°)a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!}$.

c) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leqslant 1$.

2°) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

a) Prouver que, pour tout réel x et tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^1 E_{2k+2}(t) f^{(2k+3)}(x+t)dt = a_{2k+1}[f^{(2k+1)}(x+1)+f^{(2k+1)}(x)] + \int_0^1 E_{2k}(t) f^{(2k+1)}(x+t)dt$$

b) En déduire que, pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+1)+f(x)] + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}[f^{(2k+1)}(x+1)+f^{(2k+1)}(x)]\right) + R_{2n+1}(x) .$$

où l'on exprimera $R_{2n+1}(x)$ sous la forme d'une intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction faisant intervenir $f^{(2n+1)}$ et E_{2n} .

c) Soient $u \in]-1,1[$ et, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $f(t) = e^{ut}$.

Prouver que : $$\frac{2}{1+e^u} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}.u^{2k+1}$$

d) Conclure que, pour tout u dans $]-1,1[$, on a : $\frac{2}{1+e^u} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.u^k$.

3°)a) Montrer, en utilisant les préliminaires, que, pour tout réel x et tout réel z de $]-1,1[$,

on a : $$\frac{2e^{zx}}{1+e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x).z^n .$$

b) En déduire que : $\forall t \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[, \quad \frac{2}{e^t+e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n E_n(\frac{1}{2})t^n$. Dans la suite du problème, on note, pour n dans $\mathbb{N}$, $e_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$. Les nombres e_n sont appelés les nombres d'Euler .

4°)a) Prouver que, pour tout réel x , tout réel y et tout entier naturel n, on a :

$$E_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{E_k(x).y^{n-k}}{(n-k)!} .$$

b) Prouver que, pour tout réel x et tout entier naturel n, on a :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e_k(x-\frac{1}{2})^{n-k}}{2^k(n-k)!} .$$

Partie III

Non corrigé.

Soit (Ω, B, P) un espace probabilisé sur lequel seront définies les variables aléatoires considérées ci-dessous .

1°)a) Vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2.dt}{\pi(e^t+e^{-t})}$ existe et vaut 1 . En déduire que l'application θ définie par $\theta(t) = \frac{2}{\pi(e^t+e^{-t})}$, est une densité de probabilité . On dira, dans la suite, qu'une v.a.r. Y suit la loi E si elle admet θ pour densité .

b) On suppose que Y suit la loi E . Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et représenter graphiquement F_Y .

Montrer que Y admet des moments de tous les ordres . Préciser l'espérance de Y .