

PRÉLIMINAIRE

o) Rappel.. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\ln x < x - 1$

Notons que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n - S_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n - S_n) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} - T_n = (S_{n+1} - S_n) - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \stackrel{\text{(rappel)}}{<} \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = 0$!
D'où $(T_n)_{n \geq 1}$ est déclinante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = T_{n+1} - T_n - \ln(1 + \frac{1}{n+1}) + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} + \ln\frac{n+1}{n}$; donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+2}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} \uparrow \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = 0$
d'où $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
 $-\ln x > -(x-1)$ (rappel!)

Par conséquent $((S_n), (T_n))$ est un couple de suites adjacées. Ces deux suites convergent et ont la même limite τ .

Remarque.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \tau \leq T_n$ (avec $S_n < \tau < T_n$; donc $S_1 < \tau < T_1$; $2 < \tau < 3$)

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \tau$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. En faisant le produit on obtient:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{\ln n} - 1 \right) = \tau \times 0 = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$; donc $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$

PREMIÈRE PARTIE

Q1 Rappel.. $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$, ou: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq E(x) \leq x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{k} - 1 \leq E\left(\frac{n}{k}\right) \leq \frac{n}{k}$

D'où $\sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{k}$

Par conséquent: $n(S_n - n) \leq \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) \leq n(S_n)$. Supposons $n \geq 2$ et divisons par n :

D'où $\frac{S_n}{\ln n} - \frac{1}{\ln n} \leq \frac{1}{n \ln n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) \leq \frac{S_n}{\ln n}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\ln n} = s$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{\ln n} - \frac{1}{\ln n} \right) = s - 0 = s$; finalement: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n \ln n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) \right] = s$

Q2 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(p, q) \in A_n$; si $p \leq q$ alors $p^2 \leq pq \leq n$, donc $p \leq \sqrt{n}$, par conséquent $p \leq E(\sqrt{n})$.

De même si $q \leq p$ alors $q \leq E(\sqrt{n})$.

D'où $(p, q) \in A_n \Rightarrow p \leq E(\sqrt{n})$ ou $q \leq E(\sqrt{n})$.

Par conséquent $A_n = B_n \cup C_n$ où $B_n = \{(p, q) \in A_n \mid p \leq E(\sqrt{n})\}$ et $C_n = \{(p, q) \in A_n \mid q \leq E(\sqrt{n})\}$.

$\text{card } A_n = \text{card } B_n + \text{card } C_n - \text{card } (B_n \cap C_n)$. Est clair que: $\text{card } C_n = \text{card } B_n$

Calculons $\text{card } A_n$, $\text{card } B_n$ et $\text{card } (B_n \cap C_n)$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. ($1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$ et $pq \leq n$) $\Leftrightarrow (p \in [1, n] \text{ et } 1 \leq q \leq \frac{n}{p}) \Leftrightarrow (p \in [1, n] \text{ et } q \in [1, E(\frac{n}{p})])$

Donc $\text{card } A_n = \sum_{p=1}^n E\left(\frac{n}{p}\right)$ (pour tout $p \in [1, n]$ il y a $E\left(\frac{n}{p}\right)$ manières de choisir q).

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

$(p, q) \in B_n \Leftrightarrow (1 \leq p \leq n, 1 \leq q \leq n, pq \leq n \text{ et } p \leq q \in \mathbb{R})$

$(p, q) \in B_n \Leftrightarrow (1 \leq p \leq E(\sqrt{n}) \text{ et } 1 \leq q \leq \frac{n}{p}) \Leftrightarrow (p \in [1, E(\sqrt{n})] \text{ et } q \in [1, E(\frac{n}{p})])$.

Donc $\text{card } B_n = \sum_{p=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{p}\right)$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$: $p \leq E(\sqrt{n}) \text{ et } q \leq E(\sqrt{n}) \Rightarrow p \leq \sqrt{n} \text{ et } q \leq \sqrt{n} \Rightarrow pq \leq n$

Donc $(p, q) \in B_n \cap C_n \Leftrightarrow (1 \leq p \leq E(\sqrt{n}), 1 \leq q \leq E(\sqrt{n}) \text{ et } pq \leq n) \Leftrightarrow p \in [1, E(\sqrt{n})] \text{ et } q \in [1, E(\sqrt{n})]$.

Donc $\text{card } (B_n \cap C_n) = \text{card } ([1, E(\sqrt{n})] \times [1, E(\sqrt{n})]) = (E(\sqrt{n}))^2$

Finalement: $\sum_{p=1}^n E\left(\frac{n}{p}\right) = \text{card } A_n = \text{card } B_n + \text{card } C_n - \text{card } (B_n \cap C_n) = 2\text{card } B_n - [E(\sqrt{n})]^2 = 2 \sum_{p=1}^n E\left(\frac{n}{p}\right) - [E(\sqrt{n})]^2$

Pour finir $\sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{k}{n}\right) = 2 \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{k}{n}\right) - [E(\sqrt{n})]^2$

b) Il s'agit en fait de montrer: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) - \ln n \right) = 2\Gamma - 1$

Il faut donc montrer: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) - \ln n - \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n} \right] = 2\Gamma - 1$ (Voir a))

Notons déjà que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n} < \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{\sqrt{n}} \leq 1$; comme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n} = 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{\sqrt{n}} = 1$

Pour avoir (E) il suffit donc d'avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) - \ln n \right) = 2\Gamma$ ou encore:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{2} \ln n \right) = \Gamma$; soit encore:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) - \ln \sqrt{n} \right) = \Gamma$. Il suffit donc cette dernière égalité.

$\sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} \left(\frac{n}{k} - 1 \right) < \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} \frac{n}{k} = n S_{E(\sqrt{n})}$; $n S_{E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n}) < \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) \leq n S_{E(\sqrt{n})}$

Donc $S_{E(\sqrt{n})} - \frac{E(\sqrt{n})}{n} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) \leq S_{E(\sqrt{n})}$

Donc $S_{E(\sqrt{n})} - \frac{E(\sqrt{n})}{n} - \ln \sqrt{n} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) - \ln \sqrt{n} \leq S_{E(\sqrt{n})} - \ln \sqrt{n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n} = 0$. Pour avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) - \ln \sqrt{n} \right) = \Gamma$

Il suffit d'avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{E(V_n)} - b_n V_n) = 0$ (car on a arriver !).

Or d'après le précédent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{E(V_n)} - b_n (E(V_n))) = 0$.

$$S_{E(V_n)} - b_n V_n = S_{E(V_n)} - b_n (E(V_n)) + b_n (E(V_n))$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|V_n| < E(V_n) < V_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{V_n} < \frac{E(V_n)}{V_n} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{E(V_n)}{V_n} \right) = 1$; par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \left(\frac{E(V_n)}{V_n} \right) = 0$

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{E(V_n)} - b_n V_n) = 0$.

(ceci achève de prouver que) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) - b_n n \right] = 2\beta - 1$

Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) - b_n n = (2\beta - 1)$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) = n b_n n + (2\beta - 1)n + n E_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = 0$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n E\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n E\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=n+1}^n E\left(\frac{k}{n}\right). \text{ Or } \forall k \in [n+1, n] \text{, } 1 < \frac{k}{n} < \frac{n+1}{n} < 2 \text{, donc}$$

$$\sum_{k=1}^n E\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n E\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=n+1}^n 1 = \ln b_n (n) + (2\beta - 1) n + n E_n - n$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n E\left(\frac{k}{n}\right) - 2 \sum_{k=1}^n E\left(\frac{n}{k}\right) = \ln b_n (n) + (2\beta - 1) n + n E_n - 2(n b_n n + (2\beta - 1)n + n E_n).$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E\left(\frac{k}{n}\right) - 2E\left(\frac{n}{k}\right)] = \frac{1}{n} [\ln b_n \frac{dn}{n} + dn E_n - n - dn E_n] \\ = 2 \ln 2 + 2 E_2 - 3 - 2 E_n = 2 \ln 2 - 1 + 2(E_n - E_n)$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} (E_n - E_n) = 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E\left(\frac{k}{n}\right) - 2E\left(\frac{n}{k}\right)] \right] = 2 \ln 2 - 1.$$

Q3) Quelques remarques sur la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right)$ n'imposent.

Notons que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^* - X$ où $X = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{Z}^* \right\}$

$$\begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \frac{1}{n}^+} \left(\frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right) \right) = 1 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \frac{1}{n}^-} \left(\frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right) \right) = 0 \quad (\dots \text{à détailler}). \text{ Notons que } f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \\ \text{soit } n \in \mathbb{Z}^*. \end{array}$$

Donc f est discontinue en tout point de X mais possède une limite finie à droite et à gauche en ces points.

Notons que f n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ au sens de notre définition car $[0, 1]$ contient une infinité d'éléments de X ; mais notons que f est continue

par morceaux sur tout segment $[a, b]$ de $[0, s]$; donc f est localement intégrable sur $[0, s]$.

Remarque : $\int_0^t f(t) dt$ existe. $\forall t \in [0, s]$, $0 \leq f(t) = (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) < 1$

Dès que $a \mapsto \int_a^s f(t) dt$ est continue sur $[0, s]$.

De plus : $\forall a \in [0, 1]$, $\int_a^s f(t) dt \leq \int_a^s dt = s - a \leq 1$.

f est de croissance et majorée sur $[0, 1]$ donc f admet une limite finie à 0 (" $\leftarrow \rightarrow$ ")

Par conséquent : $\int_0^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt$ existe. ... équation fausse ...

Notons que : $\int_0^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt$ et par conséquent : $\int_0^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt$

$$\text{soit } n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 2. \quad \int_{\frac{1}{n}}^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt = \int_{\frac{1}{n}}^s \frac{dt}{t} - \sum_{k=2}^n \left[\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k-1}} E(\frac{1}{t}) dt \right] = -\ln \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^n (k-1) \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k-1}} dt$$

$$\left(\epsilon \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1} \right] \Rightarrow E(\frac{1}{t}) = k-1 \right)$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt = \ln n - \sum_{k=2}^n (k-1) \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt = \ln n - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 1 - \gamma_n. \text{ Par passage à la limite :}$$

$$\underline{\int_0^s (\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})) dt = 1 - \gamma}$$

DEUXIÈME PARTIE

Q1 Montrons l'inégalité de gauche. Elle est claire pour $t = n$ ($e^{-t} \geq 0$!).

Supposons $t \in [0, n]$, $1 - \frac{t}{n} > 0$.

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \geq 0 \Leftrightarrow e^{-t} \geq (1 - \frac{t}{n})^n \Leftrightarrow -t \geq n \ln(1 - \frac{t}{n}) \Leftrightarrow \ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n} = (1 - \frac{t}{n}) - 1$$

Notons au vu que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\ln x \leq x - 1$ donc $\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq (1 - \frac{t}{n}) - 1$ donc $e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \geq 0$.

Montrons l'inégalité de droite. $(1 - \frac{t}{n})^n \geq 0 \quad t \geq \gamma_n \text{ donc } \frac{t}{n} \geq 1$

$$\text{Supposons } t \in [\gamma_n, n]. \quad e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t} \leq \left(\frac{t}{n} \right)^n e^{-t} = \frac{t^n}{n^n} e^{-t}.$$

Supposons $t \in [0, \gamma_n]$.

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq \frac{t^n}{n^n} e^{-t} \Leftrightarrow (1 - \frac{t}{n}) e^{-t} \leq (1 - \frac{t}{n})^n \Leftrightarrow \ln(1 - \frac{t}{n}) - t \leq n \ln(1 - \frac{t}{n})$$

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq \frac{t^n}{n^n} e^{-t} \Leftrightarrow 0 \leq n \ln(1 - \frac{t}{n}) - \ln(1 - \frac{t}{n}).$$

Etudions donc $h : t \mapsto t + n \ln(1 - \frac{t}{n})$. $h(1 - \frac{t}{n})$ sur $[0, \gamma_n]$. Notons au fait que h est positive sur

h est dérivable sur cet intervalle et $\forall t \in [0, \gamma_n]$, $h'(t) = 1 + n(-\frac{1}{n}) - \frac{-t/n}{1-t/n} = \frac{n-1}{n-t}$.

$$\forall t \in [0, \gamma_n], h'(t) = 1 - \frac{n}{n-t} + \frac{2t}{n-t^2} = \frac{1}{(n-t)(n-t^2)} [(n-t)(n-t') - n(n-t') + 2t(n-t')]$$

$$\forall t \in [0, \gamma_n], h'(t) = \frac{1}{(n-t)(n-t^2)} [t(t^2 - 2t + n)] = \frac{t}{(n-t)(n-t^2)} [(t-1)^2 + n-1] \geq 0$$

h est continue sur $[0, \gamma_n]$ et $h(0) = 0$ donc $\forall t \in [0, \gamma_n], h(t) \geq 0$. Cela achève Q1 !

Q2 a) $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , partout sur $[1, +\infty[$ et négative sur $[0, 1]$.
 $e^{-t} \ln t \geq 0$. $\int_0^1 e^{-t} \ln t dt$ converge donc $\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt$ aussi.

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 e^{-t} \ln t) = 0. \exists A \in [1, +\infty[, \forall t \in [A, +\infty[, 0 \leq t^2 e^{-t} \ln t \leq 1.$$

$\forall t \in [A, +\infty[, 0 \leq e^{-t} \ln t \leq 1/t^2$. $\int_A^{\infty} 1/t^2 dt$ converge ; $\int_A^{\infty} e^{-t} \ln t dt$ aussi. Donc $\int_1^{\infty} e^{-t} \ln t dt$ converge.
 Finalement : $\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt$ converge.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{n}{n+1} (1 - (1 - \frac{t}{n})^{n+1})$ adéquate notamment en $t \mapsto (1 - \frac{t}{n})^n$

$$\forall t \in [0, n] \quad \int_t^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \left[\frac{n}{n+1} (1 - (1 - \frac{t}{n})^{n+1}) dt \right]_t^n - \int_t^n \frac{n}{n+1} (1 - (1 - \frac{t}{n})^{n+1}) \frac{1}{n} dt.$$

$$\text{Remarquer que : } \forall t \in [0, n], (1 - (1 - \frac{t}{n})^{n+1}) = (1 - (1 - \frac{t}{n})) \left[\sum_{k=0}^n (1 - \frac{t}{n})^k \right] = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^n (1 - \frac{t}{n})^k$$

$$\text{Donc } \int_t^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1} t n - \frac{n}{n+1} (1 - (1 - \frac{t}{n})^{n+1}) \Big|_t^n - \int_t^n \frac{n}{n+1} \times \frac{t}{n} \left(\sum_{k=0}^n (1 - \frac{t}{n})^k \right) \frac{1}{n} dt$$

$$\int_t^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1} t n - \frac{n}{n+1} \frac{t}{n} \left(\sum_{k=0}^n (1 - \frac{t}{n})^k \right) \Big|_t^n - \int_t^n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1 - \frac{t}{n})^k dt$$

En faisant tendre t vers 0 on obtient : 1°. l'exposante de L_n est à 0,

$$L_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1} t n - 0 - \int_0^n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1 - \frac{t}{n})^k dt = \frac{n}{n+1} t n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-n) \frac{1}{k+1} \left[(1 - \frac{t}{n})^{k+1} \right]_0^n$$

$$L_n = \frac{n}{n+1} t n + \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} (-1) = \frac{n}{n+1} (t n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}) = \frac{n}{n+1} (-\gamma_n - \frac{1}{n+1})$$

$$L_n = -\frac{n}{n+1} \gamma_n - \frac{n}{(n+1)^2}. \text{ En particulier } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = -\gamma.$$

$$\forall t \in [0, n] \quad 0 \leq (e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n) | \ln t | \leq \frac{t^2}{n} e^{-t} | \ln t |$$

$$\text{Donc } 0 \leq \int_0^n (e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n) | \ln t | dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n t^2 e^{-t} | \ln t | dt \quad (\dots \text{la classe d'intégrales convergent})$$

De plus $\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} | \ln t | dt$ est convergente (même démonstration que dans Q2 a))

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^2 e^{-t} | \ln t | dt \text{ est un réel ; par conséquent : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n t^2 e^{-t} | \ln t | dt = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n) | \ln t | dt = 0.$$

$$|\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt - \int_0^{\infty} (1 - \frac{t}{n})^n | \ln t | dt | = |\int_0^{\infty} (e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n) | \ln t | dt| \leq \int_0^{\infty} (e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n) | \ln t | dt$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} [\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt - \int_0^{\infty} (1 - \frac{t}{n})^n | \ln t | dt] = 0 ; \text{ par conséquent } L - (-\gamma) = 0.$$

$$\text{Finalement : } L \leq \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma.$$

Q3 a) $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $[0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 donc

$$n = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt \text{ existe } \left(\frac{e^{-t}-1}{t} \Big|_0^1 = -1 ; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1 \right).$$

$t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall t \in [1, +\infty[, 0 < \frac{e^{-t}}{t} < e^{-t}$

De plus $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ aussi.

$$\text{Soit } \varepsilon \in]0, 1]. \int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} (1-e^{-t}) dt = [\ln t (1-e^{-t})]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \ln t e^{-t} dt$$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = -\ln \varepsilon (1-e^{-\varepsilon}) - \int_\varepsilon^1 \ln t e^{-t} dt. \ln \varepsilon (1-e^{-\varepsilon}) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon \ln \varepsilon \text{ et}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0. \text{ Par conséquent : } \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt = - \int_0^1 e^{-t} \ln t dt. \text{ (au passage nous avons utilisé l'équivalence de 0)}$$

$$\text{Soit } A \in [1, +\infty[. \int_1^A \frac{e^{-t}}{t} dt = [e^{-t} \ln t]_1^A - \int_1^A (-e^{-t}) \ln t dt = e^{-A} \ln A + \int_1^A e^{-t} \ln t dt$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} \ln A = 0 \text{ donc } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt. \text{ (au passage nous avons utilisé l'équivalence de 0).}$$

$$\text{Finalement } n - N = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = - \int_0^1 e^{-t} \ln t dt - \int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = -(-\delta).$$

$$\underline{n - N = 0}.$$

b) On prend les mèmes et on recommence ! Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt + \boxed{\int_x^\infty \frac{dt}{t} \cdot \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt} = N + \delta + \ln x - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x + \delta$$

$$\text{Donc } \underline{\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x + \delta}.$$

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t} dt \text{ converge donc } \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt = 0 ; \text{ soit } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x + \delta \right) = 0,$$

$$\text{on encaise } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x \right) = -\delta$$

$$\underline{c)} \text{ Soit } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}_+^*. \int_\varepsilon^A \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-bt}}{t} dt = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-u}}{u} du - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-v}}{v} dv$$

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ converge pour tout } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ donc } \int_\varepsilon^A \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \text{ existe et vaut } \int_\varepsilon^A \frac{e^{-u}}{u} du - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-v}}{v} dv$$

$$\text{Soit encore } \int_\varepsilon^A \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du = e^{-\beta\varepsilon} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ avec } \beta \in S(a\varepsilon, b\varepsilon)$$

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = e^{-\beta\varepsilon} f_u(b\varepsilon/a\varepsilon) = e^{-\beta\varepsilon} f_u(b/a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta\varepsilon = 0 \text{ donc } \int_0^b \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \text{ existe et vaut } \frac{b}{a}.$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \frac{b}{a}.$$

(7)

Achève cette démonstration partiellement par le calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{t^2} dt$. $t \mapsto \frac{t-1}{t^2}$ est continue sur $[0, 1]$ et intégrable par continuité au 0 et 1 donc $\int_0^1 \frac{t-1}{t^2} dt$ existe.

Soir $(\alpha, \beta) \in]0, 1[^2$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{t-1}{t^2} dt = - \int_{-\ln \alpha}^{-\ln \beta} \frac{e^{u-1}}{e^u} e^u du = \int_{-\ln \alpha}^{-\ln \beta} \frac{e^{-2u} - e^{-u}}{u} du, \text{ donc } \int_0^1 \frac{t-1}{t^2} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-2u} - e^{-u}}{u} du$$

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u} du = \ln 2.$$

PARTIE III

Q1 Soit f une fonction sur \mathbb{R}_+^* telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge ; montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge. Soit F la primitive de f sur \mathbb{R}_+^* qui vaut 0 en 0.

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \left[\frac{1}{t} F(t) \right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2} F(t) \right) dt = \frac{F(x)}{x} - \frac{F(1)}{1} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt \text{ pour tout } x \in [1, +\infty[$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge donc admet une limite finie en $+\infty$ ($\epsilon = \int_1^{+\infty} f(t) dt$). Par conséquent : $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > A \Rightarrow |F(x) - \epsilon| < \epsilon$ pour $\epsilon = 1$. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in]A, +\infty[$, $|F(x) - \epsilon| < 1$ ou $x-1 < F(x) < x+1$

Par conséquent F est bornée sur $[A, +\infty[$. f étant continue sur $[1, \max(1, A)]$, F est bornée sur ce segment. Ensuite F est bornée sur $[1, +\infty[$. Soit \tilde{n} un majorant de $|F'|$ sur $[1, +\infty[$.

$$\forall x \in [1, +\infty[, \left| \frac{F(x)}{x} \right| \leq \frac{\tilde{n}}{x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.$$

$\forall x \in [1, +\infty[, \frac{|F(t)|}{t^2} \leq \frac{\tilde{n}}{t^2}$; $\int_1^{+\infty} \frac{\tilde{n}}{t^2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{|F(t)|}{t^2} dt$ converge ; $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$ est évidemment convergente donc convergente. $x \mapsto \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

$$\text{Rappel ! } \forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \frac{F(x)}{x} - F(1) + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt = \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt \quad (F(1)=0)$$

$$\text{D'après ce qui précède : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt \quad (< +\infty!).$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge. Soit $f \in V$. Remarque.. $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$

... UCV

On appelle $V = V$ car $f : t \mapsto \frac{1}{t} f(t)$ appartient à V ($\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} f(t) dt$ converge) et il appartient aussi à U ($\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} f(t) dt$ diverge).

Q2 a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{f}(x) = - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$. $x \mapsto \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$ étant la primitive de $\ln \frac{f(t)}{t}$

sur \mathbb{R}_+^* qui prend la valeur 0 en 1 : \hat{f} est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \hat{f}'(x) = - \frac{f(x)}{x} \quad (\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ est une primitive constante}).$$

f est continue sur \mathbb{R}_+^* , \hat{f} est continue sur \mathbb{R}_+^* donc \hat{f} est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

b) Analyse .. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $f \in V$, $f \neq 0$ et $\hat{f} = \lambda f$.

cas 1 .. $\lambda = 0$; $\hat{f} = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{f}'(x) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\frac{\hat{f}(x)}{x} = 0$ donc \hat{f} est nulle !

cas 2 .. $\lambda \neq 0$; $f = \frac{1}{\lambda} \hat{f}$ est de classe C^1 . $f' = \frac{1}{\lambda} \hat{f}'$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda f'(x) = -\frac{\hat{f}(x)}{x}; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda x f'(x) + f(x) = 0. \quad (1)$$

Rappel. $h: x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x h'(x) = \alpha x^\alpha$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda x h'(x) + h(x) = \lambda x^\alpha + x^\alpha = (\alpha + \frac{1}{\lambda}) x^\alpha \dots$$

Par conséquent : $h: x \mapsto x^{-1/\lambda}$ est solution particulière de l'équation différentielle (1).

Utilisons la méthode de la variation de la constante pour obtenir f . Pour $u = \frac{t}{\lambda} \cdot f = u h$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 = \lambda x (u'(x) h(x) + u(x) h'(x)) + u(x) h(x) = \lambda x u'(x) h(x) + u(x) (\lambda x h'(x) + h(x))$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 = \lambda u'(x) h(x) = \lambda u'(x) x^{-1/\lambda};$$

d'où $u' \equiv 0$. u est constante sur \mathbb{R}_+^* . Par conséquent : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = C x^{-1/\lambda}$

Notons que C n'est pas nul car $f \neq 0$.

$$f \in V \text{ donc } \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge; } \int_1^x \frac{t^{-1/\lambda}}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t^{1/\lambda+1}} dt \text{ converge donc } \frac{1}{\lambda+1} > 1.$$

Finalement $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Synthèse .. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t^{-1/\lambda}$. f est continue et nulle sur \mathbb{R}_+^* .

$$\text{Soit } A \in \mathbb{R}_+^*. \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_x^A \frac{f(t)}{t} dt = \int_x^A \frac{1}{t^{1/\lambda+1}} dt = [\lambda t^{2/\lambda}]_x^A = \lambda A^{2/\lambda} + \lambda x^{-1/\lambda}$$

$$\text{Donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_x^A \frac{f(t)}{t} dt = \lambda x^{-1/\lambda} = \lambda f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Par conséquent $\int_x^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge et vaut $\lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc $\rightarrow \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge, $f \in V$;

$$\rightarrow \hat{f} = \lambda f;$$

$$\rightarrow f \neq 0.$$

λ est solution du problème.

c) L'ensemble des valeurs solutions du problème est \mathbb{R}_+^* .

(83) Soit $f \in V$. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\hat{f}'(t) = -\frac{f(t)}{t}$$

$$\int_1^y \hat{f}'(t) dt = [t \hat{f}'(t)]_1^y - \int_1^y t \hat{f}'(t) dt = y \hat{f}'(y) - \hat{f}'(1) + \int_1^y \hat{f}'(t) dt$$

$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \hat{f}'(t) dt$ existe et est finie; par conséquent $y \mapsto \int_1^y \hat{f}'(t) dt$ admet une limite finie à +∞.
Ensuite $y \mapsto y \hat{f}'(y)$ admet une limite finie à +∞.

Donc $\hat{f} \in U$ si $y + y\hat{f}(y)$ admet une limite finie à $+\infty$.

(9)

(94) $f \in V$. f est prolongeable par continuité en 0 et on a que f est prolongeable par continuité.

a] $f(0) \neq 0$. $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$. On a que: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\hat{f}(x)}{-f(0)h(x)} \right) = 1$ ou $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\hat{f}(x)}{-f(0)h(x)} - 1 \right) = 0$
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha < 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|t| \leq \alpha \Rightarrow |\hat{f}(t) - f(0)| < \varepsilon'$ avec $\varepsilon' = \frac{\varepsilon |f(0)|}{4}$!!
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que: $x < \alpha$. Alors $x < 1$.

Voir plus à la fin

$$\hat{f}(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_x^1 \frac{\hat{f}(t) - f(0)}{t} dt + \int_x^1 \frac{f(0)}{t} dt + \int_x^1 \frac{\hat{f}(t)}{t} dt$$

$$\hat{f}(x) = \int_x^1 \frac{\hat{f}(t) - f(0)}{t} dt + f(0)h(x) - f(0)h(x) + \int_x^1 \frac{\hat{f}(t)}{t} dt. \quad \begin{array}{l} \text{1. diviser par } -f(0) h(x) \\ \text{2. retrancher } 1 \\ \text{3. utiliser l'inégalité triangulaire} \end{array} \rightarrow$$

$$\left| \frac{\hat{f}(x)}{-f(0)h(x)} - 1 \right| \leq \underbrace{\left| \frac{1}{f(0)h(x)} \int_x^1 \frac{\hat{f}(t) - f(0)}{t} dt \right|}_{A(x)} + \underbrace{\frac{1}{|f(0)|h(x)} \left| f(0)h(x) + \int_x^1 \frac{\hat{f}(t)}{t} dt \right|}_{B(x)}$$

$$|A(x)| \leq \frac{1}{|f(0)h(x)|} \int_x^\alpha \frac{|\hat{f}(t) - f(0)|}{t} dt \leq \frac{1}{|f(0)h(x)|} \cdot \varepsilon' \int_x^\alpha \frac{dt}{t} = \frac{\varepsilon'}{|f(0)h(x)|} (\ln \alpha - \ln x)$$

$$|A(x)| \leq \varepsilon' \left[\frac{\ln \alpha}{|f(0)|h(x)} + \frac{1}{|f(0)|} \right] \quad (-h(x) = h(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln \alpha}{|f(0)|h(x)} + \frac{1}{|f(0)|} \right] = \frac{1}{|f(0)|} \quad \text{d'ac:}$$

$$\exists \alpha' \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ si } |x| < \alpha' \text{ alors: } 0 < \left[\frac{\ln \alpha}{|f(0)|h(x)} + \frac{1}{|f(0)|} \right] < \frac{2}{|f(0)|}$$

$$\text{Donc } |x| < \alpha' \text{ donne } |A(x)| < \varepsilon' \times \frac{2}{|f(0)|} = \frac{\varepsilon}{2} !$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = 0 \quad \text{d'ac: } \exists \alpha'' \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \alpha'' \Rightarrow |B(x)| < \varepsilon/2$$

$$\text{Donc } |x| < \alpha' \text{ et } |x| < \alpha' \text{ et } |x| < \alpha'' \text{ donne } \left| \frac{\hat{f}(x)}{-f(0)h(x)} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \beta \Rightarrow \left| \frac{\hat{f}(x)}{-f(0)h(x)} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\text{Par conséquent: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}(x)}{-f(0)h(x)} = 1.$$

$$\hat{f}(x) \underset{0}{\sim} -f(0)h(x). \quad (\text{On a } \int_0^1 \frac{1}{t} dt \text{ converge: } \int_0^1 \hat{f}(t) dt \text{ existe.})$$

b] $f(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \ell < +\infty$.

$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge car $f \in V$. $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 d'ac:

$\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt$ converge. Finalement: $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ existe.

$\int_0^t \frac{f(t)}{t} dt$ existe donc $\hat{f}: x \mapsto \int_x^t \frac{f(t)}{t} dt$ admet une limite finie en 0 ce qui montre que \hat{f} est intégrable pour continuité en 0. Par conséquent: $\int_0^t \hat{f}(t) dt$ existe.

Q5 a) Rappel - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x \right) = -\delta$

Soit $y \in U$ telle que $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\int_y^{\infty} f(t) dt + \ln y \right) = 0$.

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \int_y^{+\infty} \left(f(t) - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt = \int_y^{+\infty} f(t) dt + \ln y - \left(\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln y \right)$$

\uparrow
($\int_y^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ convergent)

Par passage à la limite en 0 on obtient: l'intégrale de $\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt$ et la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt = \delta$.

b) Considérons $f: t \mapsto \frac{1}{t(t+1)}$. f est continue et positive sur \mathbb{R}_+^* . On a $f(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2}$, par conséquent: $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ existe. Donc $f \in U$. Notons que: $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\int_y^{\infty} f(t) dt + \ln y \right) = 0$.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \int_y^A f(t) dt = \int_y^A \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[\ln \frac{t}{t+1} \right]_y^A = \ln \frac{A}{A+1} - \ln \frac{y}{y+1}$$

Donc $\int_y^{+\infty} f(t) dt = -\ln(y/y+1)$ car $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{A}{A+1} \right) = 0$.

Donc $\int_y^{+\infty} f(t) dt + \ln y = +\ln(y+1)$; $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\int_y^{+\infty} f(t) dt + \ln y \right) = 0$.

Nous pouvons appliquer a) et donc que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t(t+1)} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt$ existe et vaut δ .

Finalement: $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t(t+1)} - e^{-t} \right) \frac{dt}{t} = \delta$.

c) 3ème demande avec $f: t \mapsto \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$

f est continue et positive sur \mathbb{R}_+^* et $f(t) \sim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}$; $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ aussi; $f \in U$.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \int_y^A f(t) dt = \int_y^A \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = \left[\ln |1-e^{-t}| \right]_y^A = \ln |1-e^{-A}| - \ln |1-e^{-y}|$$

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_y^A f(t) dt = -\ln |1-e^{-y}|$ car $\lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln |1-e^{-A}|) = 0$. Donc $\int_y^{+\infty} f(t) dt = -\ln [1-e^{-y}]$.

$$\int_y^{\infty} p(t) dt + b y = b y - b (y - e^{-t}) = -b \left(\frac{1-e^{-t}}{y} \right)$$

$$\frac{1-e^{-t}}{y} \underset{y \rightarrow 0^+}{\sim} 1 \text{ donc } \lim_{y \rightarrow 0^+} b \left(\frac{1-e^{-t}}{y} \right) = 0.$$

Orac $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\int_y^{\infty} p(t) dt + b y \right) = 0$; il existe alors l'existence de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{y-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt$

$$\text{et } \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{y-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt = 0. \text{ Donc } \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{y-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt = 0.$$

(96) a) B'est du coeur ! doit $\in \mathbb{R}_+^*$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \int_{a\epsilon}^b \frac{f(u)}{u} du = \int_{a\epsilon}^1 \frac{f(u)}{u} du + \int_1^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u} du.$$

$\int_1^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u} du$ existe donc $\exists \alpha \int_1^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u} dt$ a une limite finie en $+\infty$, par conséquent :

$$\int_{a\epsilon}^b \frac{f(u)}{u} du \text{ existe et vaut } \int_{a\epsilon}^1 \frac{f(u)}{u} du ; \text{ de même } \int_{b\epsilon}^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du = \int_{b\epsilon}^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du.$$

$$\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(a+t)-f(b+t)}{t} dt = \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u} du - \int_{b\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u} du = \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u} du. \text{ La Récurrence de la moyenne}$$

montre que : $\exists \alpha_\epsilon \in S(a\epsilon, b\epsilon)$ tel que : $\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(a+t)-f(b+t)}{t} dt = f(\alpha_\epsilon) \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{du}{u} = f(\alpha_\epsilon) \ln \frac{b}{a}$!

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \alpha_\epsilon = 0$ car $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} a\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} b\epsilon = 0$! De plus $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\alpha_\epsilon) = f(0)$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{f(a+t)-f(b+t)}{t} dt$ existe et vaut $f(0) \ln \frac{b}{a}$

b) Piège !! $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\operatorname{Arctan} u}{x} > 0$ et $\frac{\operatorname{Arctan} u}{x} \sim \frac{\pi/2}{x}$ donc

$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} u}{x} du$ diverge !

Réve !! Pour $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$. f est continue et positive sur \mathbb{R}_+^* .

$x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ aussi. $\frac{f(x)}{x} \sim \frac{1/x}{x} = \frac{1}{x^2}$; $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ aussi

Donc $f \in V$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \pi/2$

Nous pouvons appliquer (a) avec $a=2$ et $b=1$.

$\int_0^{+\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{x} dx$ existe et vaut $\frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2} \ln 2$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{1}{2x} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}}{x} dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

h) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2x} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} 2x - \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} 2x$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} 2x}{x} dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

PARTIE IV

Q3.. Exercice de catéde. Vérifier que $\hat{\phi}$ est une densité de probabilité.

a) Il s'agit de montrer que $\hat{\phi}$ est positive sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} sauf à un nombre fini de points et que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt = 1$.

Remarquons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ existe (II Q3a!), ceci légitime la définition de $\hat{\phi}$.

$\forall z \in \mathbb{R}_-$, $\hat{\phi}(z) = 0 > 0$! . Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; $\forall t \in [x, +\infty[$, $\frac{\hat{\phi}(t)}{t} = \frac{e^{-t}}{t} \geq 0$ donc $\hat{\phi}(z) - \int_z^x \frac{\hat{\phi}(t)}{t} dt \geq 0$. Finalement $\hat{\phi}$ est positive sur \mathbb{R} .

$\forall z \in \mathbb{R}_-$, $\hat{\phi}(z) = 0$. $\hat{\phi}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et continue à gauche en 0.

$x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\hat{\phi}(t)}{t} dt$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , donc à l'origine $\hat{\phi}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement $\hat{\phi}$ est continue sur \mathbb{R}^* donc sur \mathbb{R} sauf (peut-être) à un nombre fini de points.

Reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt$ existe et vaut 1 ; ou encore que $\int_0^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt$ existe et vaut 1.

Appliquer III Q4 a) à la restriction f de $\hat{\phi}$ à \mathbb{R}_+^* .

Si $f \in V$ car $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ existe ; $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} = 1 \neq 0$

ceci comme d'après III Q4 a) l'existence de $\int_0^1 f(t) dt$ donc de $\int_0^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt$

Notons encore que $\int_1^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt = \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ existe donc $f \in U$. D'après III Q3 $\tilde{f} \in U$ où

$y \mapsto y \tilde{f}(y)$ admet une limite en $+\infty$. Rappeler que $\tilde{f} \in U$ signifie $\int_1^{+\infty} \tilde{f}(t) dt$ converge.

Etudier donc $y \tilde{f}(y)$ à $+\infty$.

Soit $y \in \mathbb{R}^*$. $y \tilde{f}(y) = y \int_y^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = y \int_y^{+\infty} \frac{\hat{\phi}(t)}{t} dt = \int_y^{+\infty} \frac{y}{t} e^{-t} dt$

Donc $0 \leq y \tilde{f}(y) = \int_y^{+\infty} \frac{y}{t} e^{-t} dt \leq \int_y^{+\infty} e^{-t} dt$ car cette dernière intégrale existe.

$0 \leq y \tilde{f}(y) \leq \int_y^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-y}$. $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = 0$ donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} (y \tilde{f}(y)) = 0$

Par conséquent : $\int_1^{+\infty} \tilde{f}(t) dt$ existe ; $\int_1^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt$ aussi.

Par finie $\int_0^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt$ existe donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt$ aussi.

Reste à prouver que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt = 1$ ou que $\int_0^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt = 1$

Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}_+^*^2$.

$$\int_{-\varepsilon}^A \hat{\phi}(t) dt = \left[t \hat{\phi}(t) \right]_{-\varepsilon}^A - \int_{-\varepsilon}^A t \hat{\phi}'(t) dt \stackrel{\hat{\phi}'(t) = -\hat{\phi}(t)/t}{=} A \hat{\phi}(A) - \varepsilon \hat{\phi}(-\varepsilon) + \int_{-\varepsilon}^A \hat{\phi}(t) dt \stackrel{\hat{\phi}(t) = e^{-t}}{=} A \hat{\phi}(A) - \varepsilon \hat{\phi}(\varepsilon) + e^{-\varepsilon} - e^{-A}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} (A \hat{\phi}(A)) = 0 \text{ donc } \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \hat{\phi}(t) dt = -\varepsilon \hat{\phi}(\varepsilon) + e^{-\varepsilon}$$

$f \in V$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} = 1$; donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt \sim -\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -1$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \int_0^t f(t) dt) = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \phi(t)) = 0$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} = 1$: $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt = 1$ et donc $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt = 1$ ce qui achève de prouver que ϕ est une densité de probabilité.

b) * $\tilde{\phi}(x)$ est équivalente à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures... voir plus haut.

** Soit $x \in [1, +\infty[$

$\forall t \in [x, +\infty[, 0 \leq \frac{\phi(t)}{t} = \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-x}$; donc $\int_x^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x}$ (les deux intégrales coïncident).

Finallement: $\forall x \in [1, +\infty[, \tilde{\phi}(x) \leq e^{-x}$.

c) * Il s'agit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de montrer l'existence de $\int_0^{+\infty} t^n \tilde{\phi}(t) dt$ et d'établir sa valeur.

Le problème se ramène à l'étude de $\int_0^{+\infty} t^n \phi(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $t \mapsto t^n \phi(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

$$\int_{-\varepsilon}^A t^n \phi(t) dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \phi(t) \right]_{-\varepsilon}^A - \int_{-\varepsilon}^A \frac{t^{n+1}}{n+1} (-\phi'(t)) dt = \frac{A^{n+1}}{n+1} \phi(A) - \frac{\varepsilon^{n+1} \phi(\varepsilon)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_{-\varepsilon}^A t^n \phi'(t) dt.$$

Nous savons que: $\tilde{\phi}(x) \sim -\ln x$ donc $\tilde{\phi}(\varepsilon) \sim -\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon$; par conséquent: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon^{n+1} \tilde{\phi}(\varepsilon)) = 0$.

De plus: $0 \leq \frac{A^{n+1}}{n+1} \phi(A) \leq \frac{A^{n+1}}{n+1} e^{-A}$; par ailleurs: $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{n+1}}{n+1} \phi(A) = 0$.

En conséquence: $\int_0^{+\infty} t^n \phi(t) dt$ est de même nature que: $\frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

$t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R} et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^n (t^n e^{-t})) = 0$. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [A, +\infty[, 0 \leq t^n (t^n e^{-t}) \leq 1$

Comme $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ converge, $\int_A^{+\infty} t^n \phi(t) dt$ aussi.

$\int_0^{+\infty} t^n \phi(t) dt$ étant clairement convergente, $\int_0^{+\infty} t^n \phi(t) dt$ existe donc $\int_0^{+\infty} t^n \tilde{\phi}(t) dt$ aussi; ceci suffit à amener l'existence des moments d'ordre n de $\tilde{\phi}$. Reste à les calculer.

$$m_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n \tilde{\phi}(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1} \phi(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt. \text{ Pour } I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

$$\text{Soit } A \in \mathbb{R}_+^*. \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = \left[t^{n+1} (-e^{-t}) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1) t^n (-e^{-t}) dt = -A^{n+1} e^{-A} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

$$\text{À la limite } I_{n+1} = (n+1) I_n; \text{ par récurrence } I_{n+1} = n! I_0 \text{ et } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

$$\text{Donc } I_n = n!$$

$$\text{Finallement } m_n(x) = \frac{n!}{n+1}$$



Page 6 inverser le sens de la numérotation des dernières lignes
L'intégrale vaut $\ln b$.