SUJET 19

On rappelle que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x \leqslant x-1}$.

Préliminaire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \gamma_n = S_n - \ln n \quad \text{et} \quad \delta_n = \gamma_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Q1 Montrer que les suites $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et que leur limite commune, que nous noterons γ, appartient à $]0,1[$.

Q2 Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$.

Partie I

Q1 Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n\,\ln n}\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right)\right) = 1$.

Q2 a) n est dans $\mathbb{N}^*$.

En calculant de deux façons différentes le cardinal de $A_n = \{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant p \leqslant n,\ 1\leqslant q \leqslant n,\ pq \leqslant n\}$ montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) = 2\sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E\left(\frac{n}{k}\right) - \big(E(\sqrt{n})\big)^2.$$

b) En déduire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge vers 0 et telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{n}{k}\right) = n\,\ln n + (2\,\gamma-1)\,n + n\varepsilon_n.$$

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[E\left(\frac{2n}{k}\right) - 2E\left(\frac{n}{k}\right)\right]\right) = 2\,\ln 2 - 1$.

Q3 $\forall t \in]0,1],\ f(t) = \dfrac{1}{t} - E\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

a) Montrer que f est continue par morceaux sur $\left[\frac{1}{p},1\right]$ pour tout élément p de $[\![2,+\infty[\![$. En déduire que f est continue par morceaux sur $]0,1]$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et donner sa valeur en fonction de γ.

Partie II

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $\forall t \in [0,n],\ 0 \leqslant e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

b) Montrer que : $\forall t \in [0,\sqrt{n}[,\ e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{t^2}{n}\, e^{-t}$ (on pourra étudier $h : t \to t + n\,\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) - \ln\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)$).

Montrer que ceci vaut encore pour tout élément t de $[\sqrt{n}, n]$.

Q2 a) Montrer l'existence de $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\ln t\,\mathrm{d}t$.

b) n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $L_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t$. Dériver $t \to \dfrac{n}{n+1}\left[1-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n+1}\right]$.

Utiliser une intégration par parties pour montrer que $L_n = -\dfrac{n}{n+1}\,\gamma_n - \dfrac{n}{(n+1)^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n$.

Montrer simplement et de manière très propre que $L = -\gamma$ (on pourra utiliser Q1. et un passage à la limte bien justifié).

Q3 a) Justifier l'existence des intégrales $M = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $N = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et prouver que $M - N = \gamma$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+\,*},\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x + \gamma = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire proprement que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x\right) = -\gamma$.

c) a et b sont deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et donner sa valeur.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Partie III

U est l'ensemble des applications continues f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

V est l'ensemble des applications continues g de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q1 Soit f un élément de U.

a) Soit F la primitive de f sur $]0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. Montrer que F est bornéee sur $[1,+\infty[$.

b) Montrer que f est dans V en utilisant une intégration par parties.

c) A-t-on $U = V$?

Q2 Soit f un élément de V. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\,*},\ \widehat{f}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\,*}$ et préciser sa dérivée.

b) Soit λ un réel. On suppose qu'il existe un élément non nul f de V tel que $\widehat{f} = \lambda\, f$.

Montrer que λ n'est pas nul, que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\,*}$ et qu'il existe un réel non nul c tel que $\forall x \in \mathbb{R}^{+\,*},\ f(x) = c\, x^{-\frac{1}{\lambda}}$ (on pourra montrer que $x \to f(x)\, x^{\frac{1}{\lambda}}$ est constante). En déduire que λ est strictement positif.

c) On suppose que λ est strictement positif. Montrer qu'il existe un élément non nul f de V tel que $\widehat{f} = \lambda f$.

Q3 Soit f un élément de U. Montrer que $\widehat{f}$ est dans U si et seulement si $x \to x\,\widehat{f}(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

Q4 Soit f un élément de V ayant une limite finie ℓ à droite en 0.

a) On suppose ℓ non nul. Montrer que $\widehat{f}(x) \underset{0^+}{\sim} -\ell\, lnx$ (on pourra utiliser la définition de la limite. Fixer ε dans $\mathbb{R}^{+*}$ et commencer par montrer qu'il existe α dans $]0,1[$ tel que $\forall x \in]0,\alpha[,\ (\ell-\varepsilon)(\ln\alpha - \ln x) \leqslant \int_x^\alpha \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant (\ell-\varepsilon)(\ln\alpha-\ln x)$).

En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

b) On suppose ici que ℓ est nul et que f est $t \to \dfrac{f(t)}{t}$ admet une limite finie en 0.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Q5 a) Soit f un élément de U tel que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \ln x\right) = 0$.

Montrer alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(f(t) - \frac{e^{-t}}{t}\right)\mathrm{d}t = \gamma$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t(t+1)} - \frac{e^{-t}}{t}\right)\mathrm{d}t$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q6 a) f est un élément de V ayant une limite finie à droite en 0 notée ℓ.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\ell\,\ln(b/a)$.

b) Montrer l'existence et trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)-\arctan(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Partie IV

$\forall t \in]-\infty,0[,\ \Phi(t) = 0$ et $\forall t \in [0,+\infty[,\ \Phi(t) = e^{-t}$.

On pose : $\forall x \in]-\infty,0],\ \widehat{\Phi}(x) = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ \widehat{\Phi}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q1 Montrer que $\widehat{\Phi}$ est une densité de probabilité.

Q2 Montrer que :

- $\widehat{\Phi}(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$;
- $\forall x \in [1,+\infty[,\ \widehat{\Phi}(x) \leqslant e^{-x}$.

En déduire que si $\widehat{X}$ est une variable aléatoire de densité $\widehat{\Phi}$, $\widehat{X}$ admet des moments de tout ordre que l'on précisera.
