PRÉLIMINAIRE

Dans cette partie n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

Si $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(K)$, on appelle trace de A la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ des éléments diagonaux de A et on la note $\operatorname{tr} A$ ou $\operatorname{tr}(A)$.

Q1 Montrer que l'application tr qui à tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe sa trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2 a) Montrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) Montrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(K)$ ont même trace (on pourra utiliser a)).

Q3 Soient $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E. Montrer que la trace de $M_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$.

Nous définirons alors la trace de f comme la trace de l'une de ses matrices dans une base de E. Nous la noterons $\operatorname{tr}(f)$.

PARTIE I : Caractérisation des endomorphismes laissant stables les droites vectorielles

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (de dimension non nulle ?).

On rappelle que :

- un endomorphisme f de E est une homothétie vectorielle s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\, \mathrm{Id}_E$;
- si E est de dimension 1 tout endomorphisme de E est une homothétie vectorielle ;
- un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E si $f(F) \subset F$.

Dans cette partie f est un endomorphisme de E.

Q1 On suppose dans cette question que f laisse stable toutes les droites vectorielles de E.

On se propose de montrer que f est une homothétie vectorielle.

a) Montrer que pour tout élément non nul x de E il existe un élément λ_x de $\mathbb{K}$ et un seul tel que $f(x) = \lambda_x\, x$.

b) Soit a un élément non nul de E. On pose $\lambda = \lambda_a$.

Montrer que si x est un élément de $\operatorname{Vect}(a)$, $f(x) = \lambda\, x$.

Soit x un élément de E n'appartenant pas à $\operatorname{Vect}(a)$. Montrer que l'on a encore $f(x) = \lambda\, x$ (on pourra faire intervenir $x + a$, λ_{x+a}, λ_x, ...).

En déduire que f est une homothétie vectorielle.

c) Énoncer et démontrer une réciproque du résultat obtenu dans ce qui précède et conclure cette question.

Q2 Montrer que f est une homothétie vectorielle si et seulement si pour tout élément x de E, $\big(x, f(x)\big)$ est liée (*utiliser Q1*).

Q3 a) Ici on suppose que f commute avec tout endomorphisme de E.

Soit $D = \operatorname{Vect}(b)$ une droite vectorielle de E. Soit p la projection sur D parallèlement à un supplémentaire H de D. Notons que $f \circ p = p \circ f$.

Utiliser p pour montrer que D est stable par f (on pourra s'intéresser à $f(b)$). Que dire alors de f ?

b) Énoncer et démontrer une réciproque et conclure cette question.

Q4 Utiliser Q3 pour trouver l'ensemble des éléments A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA$ (*on est prié de faire un petit effort de construction*).

PARTIE II : Une caractérisation des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans cette partie n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

Q1 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \Phi_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$ ($\Phi_A(M)$ est la trace de AM).

Montrer que Φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2 Réciproquement soit Φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On se propose de montrer qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une seule, telle que $\Phi = \Phi_A$.

Message perso : tu vois mon Ambroise, ici je suggère...

a) On suppose que $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\Phi = \Phi_A$.

$\big(E_{ij}\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{pq} = \Phi(E_{qp})$.

b) Achever de résoudre le problème posé.

Q3 Application Soit Φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \Phi(MN) = \Phi(NM)$.

A est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\Phi = \Phi_A$

a) Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(K),\ \Phi_{AM} = \Phi_{MA}$. En déduire que $\forall M \in \mathcal{M}_n(K),\ AM = MA$.

b) Montrer alors qu'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que : $\Phi = \lambda\ \mathrm{tr}$.

c) Énoncer et démontrer une réciproque du résultat obtenu dans ce qui précède.

Q4 Énoncer sans démonstration, des résultats analogues aux précédents pour les formes linéaires de $\mathcal{L}(E)$.

PARTIE III Caractérisations des endomorphismes de trace nulle

Q1 On se propose de montrer par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, si f est un endomorphisme de trace nulle d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$, alors il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

a) Montrer que la propriété est vraie pour $n = 1$.

On suppose alors la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}^*$. On se propose alors de la montrer pour $n+1$. On se donne un espace vectoriel E de dimension $n+1$ sur $\mathbb{K}$ et un endomorphisme f de E de trace nulle.

b) Examiner le cas où f est nul.

On suppose maintenant f non nul.

c) Montrer que f n'est pas une homothétie vectorielle. En déduire qu'il existe un élément e_1 de E tel que $(e_1, f(e_1))$ soit une famille libre de E. On pose alors $e_2 = f(e_1)$.

d) Montrer qu'il existe un supplémentaire H de la droite vectorielle D engendrée par e_1 qui contient e_2 (*on pourra utiliser le théorème de la base incomplète*).

On note p la projection sur H parallèlement à D. On pose $\forall y \in H,\ g(y) = p\big(f(y)\big)$.

Montrer que g définit un endomorphisme de H. Montrer que la trace de g est nulle (*on pourra s'intéresser à la matrice de* f *dans une base* $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ *et à la matrice de* g *dans* $(e_2, e_3, \ldots, e_{n+1})$).

e) Conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Dans la suite de cette partie n *est un élément de* $\mathbb{N}^*$ *et* E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension* n*.*

Q2 On considère une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On pose $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \Psi_D(M) = DM - MD$.

a) Montrer que Ψ_D est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}\Psi_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si α_1, α_2, ..., α_n sont deux à deux distincts.

c) On suppose que α_1, α_2, ..., α_n sont deux à deux distincts.

Montrer que $\operatorname{Im}\Psi_D$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Q3 Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que la trace de f est nulle si et seulement si il existe deux endomorphismes g et h de E tels que $f = g \circ h - h \circ g$ (*on pourra utiliser Q1 et Q2*) ?

b) Dans ce qui précède est-il possible d'imposer à g et h d'avoir une trace nulle ?
