PRÉLIMINAIRE

Q1 • tr est de toute évidence une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $M=(m_{ij})$ et $N=(n_{ij})$ deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$.

$tr(\lambda M+N) = tr((\lambda m_{ij}+n_{ij})) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda m_{ii}+n_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + \sum_{i=1}^{n} n_{ii} = \lambda tr(M)+tr(N)$.

Ainsi tr est linéaire.

Par conséquent tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

Q2 a) Soit $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$. Posons $C=AB=(c_{ij})$ et $D=BA=(d_{ij})$. $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ et $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$.

$tr(AB)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = tr(BA)$.

$\forall (A,B)\in M_n(\mathbb{K})\times M_n(\mathbb{K})$, $tr(AB)=tr(BA)$.

b) Soit M et N deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{K})$. $\exists P\in GL_n(\mathbb{K})$, $N=P^{-1}MP$.

$tr(N)=tr(P^{-1}(MP)) \underset{a)}{=} tr((MP)P^{-1}) = tr(M)$.

Deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

Q3 $\mathcal{B}$ est une base de E et f est un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}'$ une seconde base de E. $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}'}(f)$ sont deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{K})$ donc elles ont même trace. $tr(M_{\mathcal{B}}(f))=tr(M_{\mathcal{B}'}(f))$.

Ainsi $tr(M_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.

PARTIE I : Caractérisation des endomorphismes laissant stable les droites vectorielles.

Q1 a) Soit x un élément non nul de E. Soit D la droite vectorielle de E engendrée par x.
$f(D) \subset D$. Ainsi $f(\mathrm{Vect}(x)) \subset \mathrm{Vect}(x)$. Alors $\mathrm{Vect}(f(x)) \subset \mathrm{Vect}(x)$.
En particulier $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. $\exists! \lambda_x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda_x x$ car (x) est une base de $\mathrm{Vect}(x)$.

$\forall x \in E - \{0_E\}$, $\exists! \lambda_x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda_x x$.

b) • Soit $x \in \mathrm{Vect}(a)$. $\exists \gamma \in \mathbb{K}$, $x = \gamma a$. $f(x) = f(\gamma a) = \gamma f(a) = \gamma \lambda a = \lambda(\gamma a) = \lambda x$.

$\forall x \in \mathrm{Vect}(a)$, $f(x) = \lambda x$.

• Soit x un élément de E n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(a)$. Notons qu'alors la famille (a, x) est libre.

En effet supposons (a, x) liée. $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ et $\alpha a + \beta x = 0_E$.

Si $\beta = 0$, $\alpha a = 0_E$ et $a \neq 0_E$ donc $\alpha = 0$!!

Si $\beta \neq 0$, $x = -\frac{\alpha}{\beta} a$ donc $x \in \mathrm{Vect}(a)$!!

$\exists! \lambda_x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda_x x$ et $\exists! \lambda_{x+a} \in \mathbb{K}$, $f(x+a) = \lambda_{x+a}(x+a)$ car

$x \neq 0_E$ ($x \notin \mathrm{Vect}(a)$) et $x + a \neq 0_E$ ($x + a = 0_E \Rightarrow x = -a \Rightarrow x \in \mathrm{Vect}(a)$).

Alors $\lambda_{x+a}(x+a) = f(x+a) = f(x) + f(a) = \lambda_x x + \lambda a$.

Ainsi $(\lambda_{x+a} - \lambda_x) x + (\lambda_{x+a} - \lambda) a = 0$. Comme (x, a) est libre :

$\lambda_{x+a} - \lambda_x = \lambda_{x+a} - \lambda = 0$. Ainsi $\lambda_{x+a} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+a} = \lambda$. Alors $\lambda_x = \lambda$.

Par conséquent $f(x) = \lambda x$.

Finalement $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$. $f = \lambda\, \mathrm{Id}_E$; f est une homothétie vectorielle.

Tout endomorphisme de E qui laisse stable toutes les droites vectorielles de E est une homothétie vectorielle.

c) Réciproquement montrons que toute homothétie vectorielle de E laisse stable toutes les droites vectorielles de E.

Soit h une homothétie vectorielle de E. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $h = \lambda Id_E$.

Soit D une droite de E. $\exists a \in E - \{0_E\}$, $D = Vect(a)$.

$h(D) = h(Vect(a)) = Vect(h(a)) = Vect(\lambda a) \subset Vect(a) = D$; D est stable par h.

h laisse stable toutes les droites de E. ↑ avec égalité si $\lambda \neq 0$!

<u>Toute homothétie vectorielle de E laisse stable toutes les droites de E.</u>

<u>L'ensemble des endomorphismes laissant stable toutes les droites de E est l'ensemble des homothéties vectorielles de E.</u>

Q2 * Supposons que f est une homothétie vectorielle. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f = \lambda Id_E$.

Pour tout x dans E, $(x, f(x)) = (x, \lambda x)$ donc $(x, f(x))$ est liée !

* Réciproquement supposons que pour tout x dans E, $(x, f(x))$ est liée.

Montrons alors que f est une homothétie vectorielle. D'après Q1 il suffit de montrer que f laisse stable toutes les droites vectorielles.

Soit D une droite vectorielle de E. $\exists a \in E - \{0_E\}$, $D = Vect(a)$.

$(a, f(a))$ est liée. $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ et $\alpha a + \beta f(a) = 0_E$.

Si $\beta = 0$: $\alpha a = 0$ et $a \neq 0_E$ donc $\alpha = 0$!! Ainsi $\beta \neq 0$; $f(a) = -\frac{\alpha}{\beta} a \in Vect(a) = D$.

Alors $f(D) = f(Vect(a)) = Vect(f(a)) \subset D$. $f(D) \subset D$ et ceci pour toute droite vectorielle de E ; f est une homothétie vectorielle de E.

Finalement <u>f est une homothétie vectorielle de E si et seulement si pour tout élément x de E, $(x, f(x))$ est liée.</u>

Q3 a) $f \circ p = p \circ f$ donc $\forall x \in E$, $f(p(x)) = p(f(x))$. En particulier $f(p(b)) = p(f(b))$.

$b \in D = Ker(p - Id_E)$ donc $p(b) = b$. Ainsi $p(f(b)) = f(b)$.

Alors $f(b) \in Ker(p - Id_E) = D$. Donc $Vect(f(b)) \subset D$. Ainsi $f(D) \subset D$.

f laisse stable toutes les droites vectorielles de E. <u>f est une homothétie vectorielle.</u>

b) Supposons que f est une homothétie vectorielle de E. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f = \lambda Id_E$.

$\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $f o g = (\lambda\, id_E) o g = \lambda (id_E o g) = \lambda g = \lambda\, g o Id_E = g o (\lambda Id_E) = g o f$.

Ainsi f commute avec tous les endomorphismes de E.

* les homothéties vectorielles de E commutent avec tous les endomorphismes de E.

* l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E est l'ensemble des homothéties vectorielles de E (... c'est le centre de $\mathcal{L}(E)$).

(Q4) Posons $\mathcal{S} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ (\lambda I_n) M = \lambda M = M(\lambda I_n)$; $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I_n \in \mathcal{S}$. $Vect(I_n) \subset \mathcal{S}$.
- Soit $A \in \mathcal{S}$. Posons $E = \mathbb{K}^n$. Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{K}^n$. Soit g un endomorphisme quelconque de E et M sa matrice dans $\mathcal{B}$.

$M_{\mathcal{B}}(g o f) = M_{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}(f) = MA \overset{A \in \mathcal{S}}{=} AM = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(f o g)$. Alors $g o f = f o g$.

Ainsi $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $g o f = f o g$. f est donc une homothétie vectorielle. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f = \lambda Id_E$.

Alors $A = M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(\lambda Id_E) = \lambda M_{\mathcal{B}}(Id_E) = \lambda I_n$; ainsi $A \in Vect(I_n)$.

$\forall A \in \mathcal{S}$, $A \in Vect(I_n)$. $\mathcal{S} \subset Vect(I_n)$.

Finalement $\mathcal{S} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\} = Vect(I_n)$.

l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires de $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice .- Retrouver ce résultat sans utiliser les endomorphismes.

PARTIE II : Une caractérisation des formes linéaires sur $M_n(\mathbb{K})$.

(Q1) • $\forall M \in M_n(\mathbb{K})$, $tr(AM) \in \mathbb{K}$. $\forall M \in M_n(\mathbb{K})$, $\phi_A(M) \in \mathbb{K}$. ϕ_A est une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(M,N) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$.

$\phi_A(\lambda M+N) = tr(A(\lambda M+N)) = tr(\lambda AM+AN) = \lambda\, tr(AM)+tr(AN) = \lambda\, \phi_A(M)+\phi_A(N)$.

Ainsi ϕ_A est linéaire.

Finalement ϕ_A est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

(Q2) a) Notons que l'on nous propose une analyse du problème ... qui conduira vers l'unicité ... et la synthèse !

Soit $A=(a_{ij})$ un élément de $M_n(\mathbb{K})$ tel que $\phi = \phi_A$.

• Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$. Posons $E_{qp} = (e_{ij})$ et $AE_{qp} = (b_{ij})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj}$.

$\phi_A(E_{qp}) = tr(AE_{qp}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{ki}$.

Rappelons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j)=(q,p) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Alors $\phi_A(E_{qp}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{ki} \underset{\substack{\uparrow \\ e_{ki}=0 \text{ si } k \neq q}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{iq} e_{qi} \underset{\substack{\uparrow \\ e_{qi} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=p \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}}}{=} a_{pq}$. $\phi_A(E_{qp}) = a_{pq}$.

Si $A=(a_{ij})$ est un élément de $M_n(\mathbb{K})$ tel que $\phi = \phi_A$: $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{pq} = \phi(E_{qp})$.

Donc il existe au plus une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\phi = \phi_A$.

b) SYNTHÈSE (EXISTENCE) !! Soit $A=(a_{ij})$ la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \phi(E_{ji})$. Montrons que $\phi = \phi_A$.

ϕ et ϕ_A étant deux formes linéaires sur $M_n(\mathbb{K})$ pour montrer qu'elles sont égales il suffit de prouver qu'elles coïncident sur la base canonique $(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ de $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\phi_A(E_{ij}) = \mathrm{Tr}(AE_{ij}) \underset{\substack{\uparrow\\ a)}}{=} a_{ji} = \phi(E_{ij})$!

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\phi_A(E_{ij}) = \phi(E_{ij})$. Ainsi les formes linéaires ϕ_A et ϕ de $M_n(\mathbb{K})$ sont égales. $\phi = \phi_A$.

Ainsi $\underline{\underline{\exists !\, A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K}),\ \phi = \phi_A}}$ $\underline{\left(A = \left(\phi(E_{ji})\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right)}$.

Finalement $\underline{\underline{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}),\mathbb{K}) = \{\phi_A\ ;\ A\in M_n(\mathbb{K})\}}}$.

Q3 a) Soit $M\in M_n(\mathbb{K})$.

$\forall N\in M_n(\mathbb{K})$, $\phi_{AM}(N) = \mathrm{tr}((AM)N) = \mathrm{tr}(A(MN)) = \phi_A(MN) = \phi(MN)$.

$\forall N\in M_n(\mathbb{K})$, $\phi_{MA}(N) = \mathrm{tr}((MA)N) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{"}\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)\text{"}}}{=} \mathrm{tr}(N(MA)) = \mathrm{tr}(NMA) = \mathrm{tr}(ANM) = \phi_A(NM) = \phi(NM)$

Alors $\forall N\in M_n(\mathbb{K})$: $\phi_{AM}(N) = \phi(MN) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{hypothèse}}}{=} \phi(NM) = \phi_{MA}(N)$. Ainsi $\phi_{AM} = \phi_{MA}$.

$\underline{\underline{\forall M\in M_n(\mathbb{K}),\ \phi_{AM} = \phi_{MA}}}$.

Soit $M\in M_n(\mathbb{K})$. ϕ_{AM} est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ donc il existe une unique matrice Q de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\phi_{AM} = \phi_Q$.

Nécessairement $Q = AM$!! or $\phi_{AM} = \phi_{MA}$, ainsi $Q = MA$!

Finalement $AM = MA$. $\underline{\underline{\forall M\in M_n(\mathbb{K}),\ AM = MA}}$.

b) $\forall M\in M_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$: d'après I Q4, $\exists \lambda\in\mathbb{K}$, $A = \lambda I_n$.

Alors $\forall M\in M_n(\mathbb{K})$, $\phi(M) = \phi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{tr}(\lambda I_n M) = \lambda \mathrm{tr}(M)$.

Ainsi $\underline{\underline{\phi = \lambda\, \mathrm{tr}}}$.

Si ϕ est une forme linéaire de $M_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (M,N) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $\phi(MN) = \phi(NM)$

alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\phi = \lambda \mathrm{tr}$.

c) Montrons la réciproque. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $\vec{\phi} = \lambda \mathrm{tr}$ et montrons que

$\vec{\phi}$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (M,N) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $\vec{\phi}(MN) = \vec{\phi}(NM)$.

. tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ donc $\vec{\phi} = \lambda \mathrm{tr}$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

. $\forall (M,N) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$, $\vec{\phi}(MN) = \lambda \mathrm{tr}(MN) = \lambda \mathrm{tr}(NM) = \vec{\phi}(NM)$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $\vec{\phi} = \lambda \mathrm{tr}$, $\vec{\phi}$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ telle que

$\forall (M,N) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$, $\vec{\phi}(MN) = \vec{\phi}(NM)$.

Ainsi $\{\phi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \mid \forall (M,N) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}),\ \phi(MN) = \phi(NM)\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{tr})$.

(Q4) E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Q1 * Si $f \in \mathcal{L}(E)$, l'application φ_f définie par $\forall g \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_f(g) = \mathrm{tr}(f \circ g)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Q2 * Si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme f de E tel que $\varphi = \varphi_f$.

Q3 * Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

$\left(\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E),\ \varphi(f \circ g) = \varphi(g \circ f)\right) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(f) = \lambda \mathrm{tr}(f)$.

PARTIE III Caractérisations des endomorphismes de trace nulle.

Q1 a) $n=1$. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 1. Soit f un endomorphisme de trace nulle. Soit $\mathcal{B}=(e_1)$ une base de E.

Il existe α dans $\mathbb{K}$ tel que $M_{\mathcal{B}}(f)=(\alpha)$. $tr(f)=0$ donc $tr(M_{\mathcal{B}}(f))=0$.

Ainsi $\alpha=0$. $M_{\mathcal{B}}(f)=0_{M_1(\mathbb{K})}$!

Il existe donc une base de E telle que la matrice de f dans cette base ait tous (!) ses coefficients diagonaux nuls. La propriété est vraie pour $n=1$.

Dans la suite E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n+1$ et f est un endomorphisme de E de trace nulle. On a également supposé que la propriété est vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$.

b) Si $f=0_{\mathcal{L}(E)}$ la matrice de f dans toute base de E est la matrice nulle donc a tous ses coefficients diagonaux nuls. C'est très exactement ce qu'il fallait prouver.

c) Si f n'est pas $0_{\mathcal{L}(E)}$. Supposons que f est une homothétie vectorielle.
Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f=\lambda Id_E$. $0=tr(f)=\lambda\, tr(Id_E)=\lambda(n+1)$. Alors $\lambda=0$. $f=0_{\mathcal{L}(E)}$!!
Donc f n'est pas une homothétie vectorielle.
I Q2 indique alors que l'on peut trouver e_1 dans E tel que $(e_1, f(e_1))$ soit libre.

d) $e_2=f(e_1)$. (e_1,e_2) est une famille libre de E. Elle se complète (... si nécessaire) en une base $(e_1,e_2,\dots,e_{n+1})$ de E.

Posons $D=\mathrm{Vect}(e_1)$ et $H=\mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_{n+1})$.
(e_1) est une base de D, $(e_2,\dots,e_{n+1})$ est une base de H et $(e_1,e_2,\dots,e_{n+1})$ est une base de E. Ainsi D et H sont supplémentaires dans E. H est alors un supplémentaire de la droite vectorielle D engendrée par e_1 qui contient e_2.

Il existe un supplémentaire H de la droite vectorielle D engendrée par e_1 qui contient e_2.

p est la projection sur H parallèlement à D. $\forall z \in E$, $p(z) \in H$.

• Si $y \in H$, $g(y) = p(f(y)) \in H$. g est une application de H dans H.

• p et f sont linéaires donc g est linéaire.

Ainsi g est un endomorphisme de H. Reprenons la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ du début de d) $\mathcal{B}' = (e_2, \dots, e_n)$ est une base de H.

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$. Soit A' la matrice de g dans $\mathcal{B}'$.

$f(e_1) = e_2$ et $f(e_1) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} e_i$. Ainsi $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ $a_{i1} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Alors $tr(f) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ii} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{ii}$ car $a_{11} = 0$.

$\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $p(e_i) = \begin{cases} 0_E & \text{si } i = 1 \\ e_i & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$ car p est la projection sur H parallèlement à D.

Alors $\forall j \in [\![2, n+1]\!]$, $g(e_j) = p(f(e_j)) = p\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\, p(e_i) = \sum_{i=2}^{n+1} a_{ij} e_i$.

Ainsi $A' = M_{\mathcal{B}'}(g) = M_{(e_2, \dots, e_{n+1})}(g(e_2), \dots, g(e_{n+1})) = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$.

Alors $tr(A') = \sum_{i=2}^{n+1} a_{ii}$.

Finalement $tr(g) = tr(A') = \sum_{i=2}^{n+1} a_{ii} = tr(f)$.

Comme $tr(f) = 0$: $tr(g) = 0$. g est un endomorphisme de H de trace nulle.

e) L'hypothèse s'applique à g car H est de dimension n.

Il existe alors une base $\hat{\mathcal{B}}' = (u_2, \dots, u_{n+1})$ de H telle que la matrice de g dans $\hat{\mathcal{B}}'$ ait tous ses ~~coefficients~~ diagonaux nuls.

Cela signifie que pour tout j dans $[\![2, n+1]\!]$ la composante de $g(u_j)$ sur l'élément u_j de la base $\hat{\mathcal{B}}'$ est nulle.

Posons $u_1 = e_1$. (u_1) est une base de D, $(u_2, \dots, u_{n+1})$ est une base de H et $E = D \oplus H$.

Alors $\hat{\mathcal{B}} = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ est une base de E. Posons $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ la matrice de f dans $\hat{\mathcal{B}}$.

Montrons que les coefficients diagonaux de $\hat{A}$ sont nuls.

Montrons donc que $\forall j\in [\![1,n+1]\!]$, $\hat{a}_{j,j}=0$. Cela revient aussi à prouver que pour tout $j\in [\![1,n+1]\!]$, la composante de $f(u_j)$ sur u_j dans $\hat{\mathcal{B}}$ est nulle.

- $f(u_1)=f(e_1)=e_2\in \mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_{n+1})=H=\mathrm{Vect}(u_2,\dots,u_{n+1})$; $f(u_1)\in \mathrm{Vect}(u_2,\dots,u_{n+1})$.
  Ainsi la composante de $f(u_1)$ sur u_1 dans $\hat{\mathcal{B}}$ est nulle. Alors $\hat{a}_{11}=0$.
- Soit $j\in [\![2,n+1]\!]$. $f(u_j)=\sum_{i=1}^{n+1}\hat{a}_{ij}u_i$. De plus $\forall i\in [\![1,n+1]\!]$, $p(u_i)=\begin{cases}0 & \text{si } i=1\\ u_i & \text{si } i\geq 2\end{cases}$.

  Alors $g(u_j)=p(f(u_j))=\sum_{i=1}^{n+1}\hat{a}_{ij}\,p(u_i)=\sum_{\underline{\underline{i=2}}}^{n+1}\hat{a}_{ij}u_i$.

  La composante de $g(u_j)$ sur u_j dans $\hat{\mathcal{B}}'$ étant nulle : $\hat{a}_{jj}=0$.

  Finalement $\forall j\in [\![1,n+1]\!]$, $\hat{a}_{jj}=0$.

Ainsi $\hat{\mathcal{B}}$ est une base de E telle que $M_{\hat{\mathcal{B}}}(f)$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

Ainsi la récurrence s'achève.

<u>Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, si f est un endomorphisme de trace nulle d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$, il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base ait tous ses coefficients diagonaux nuls.</u>

Q2 a) • $\forall M\in M_n(\mathbb{K})$, $DM-MD\in M_n(\mathbb{K})$ donc φ_D est une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$.

• Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et soit $(M,N)\in M_n(\mathbb{K})\times M_n(\mathbb{K})$

$\varphi_D(\lambda M+N)=D(\lambda M+N)-(\lambda M+N)D=\lambda DM+DN-\lambda MD-ND=\lambda(DM-MD)+(DN-ND)$

$\varphi_D(\lambda M+N)=\lambda\varphi_D(M)+\varphi_D(N)$; φ_D est linéaire.

Finalement <u>φ_D est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.</u>

b) * Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ soient deux à deux distincts.

Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Posons $D = (d_{ij})$, $U = (u_{ij}) = DM$ et $V = (v_{ij}) = MD$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $u_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj} = d_{ii} m_{ij} = \alpha_i m_{ij}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $v_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} = m_{ij} d_{jj} = \alpha_j m_{ij}$. Ainsi :

$M \in \operatorname{Ker} \psi_D \Leftrightarrow \psi_D(M) = 0_{M_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow DM - MD = 0_{M_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow DM = MD \Leftrightarrow U = V$.

$M \in \operatorname{Ker} \psi_D \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \alpha_i m_{ij} = \alpha_j m_{ij} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (\alpha_i - \alpha_j) m_{ij} = 0$.

$$M \in \operatorname{Ker} \psi_D \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow (\alpha_i - \alpha_j) m_{ij} = 0 \text{ et } \alpha_i - \alpha_j \neq 0 \\ \underline{\text{et}} \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ (\alpha_i - \alpha_i) m_{ii} = 0\ ! \end{cases}$$

$M \in \operatorname{Ker} \psi_D \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0 \Leftrightarrow M$ est une matrice diagonale.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts : $\operatorname{Ker} \psi_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.

Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne soient pas deux à deux distincts.

$\exists (p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, $\begin{cases} \alpha_p = \alpha_q \\ \text{et} \\ p \neq q \end{cases}$. Posons $E_{pq} = (e_{ij})$, $U' = (u'_{ij}) = D E_{pq}$ et

$V' = (v'_{ij}) = E_{pq} D$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ u'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} e_{kj} = d_{ii} e_{ij} = \alpha_i e_{ij} = \begin{cases} \alpha_p & \text{si } (i,j) = (p,q) \\ 0 & \text{si } (i,j) \neq (p,q) \end{cases}.$$

Ainsi $D E_{pq} = \alpha_p E_{pq}$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ v'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} d_{kj} = e_{ij} d_{jj} = \alpha_j e_{ij} = \begin{cases} \alpha_q & \text{si } (i,j) = (p,q) \\ 0 & \text{si } (i,j) \neq (p,q) \end{cases}$$

Ainsi $E_{pq} D = \alpha_q E_{pq}$.

Or $\alpha_p = \alpha_q$ donc $D E_{pq} = E_{pq} D$. Alors E_{pq} est une matrice de $\operatorname{Ker} \psi_D$ qui n'est pas diagonale car $p \neq q$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne sont pas deux à deux distincts : $\operatorname{Ker} \psi_D$ contient au moins une matrice qui n'est pas diagonale.

Finalement $\operatorname{Ker}\psi_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts.

c) Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts.

On note toujours $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\operatorname{Ker}\psi_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi $\operatorname{Ker}\psi_D = \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$. Comme la famille $(E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn})$ est libre, comme sous-famille d'une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est une base de $\operatorname{Ker}\psi_D$. Ainsi $\dim \operatorname{Ker}\psi_D = n$.

Alors $\operatorname{rg}\psi_D = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \dim \operatorname{Ker}\psi_D = n^2 - n = n(n-1)$.

Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls. $\mathcal{L}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par la famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \text{ et } i\neq j}$. Cette famille étant libre et de cardinal n^2-n $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de dimension n^2-n (*) donc de même dimension finie que $\operatorname{Im}\psi_D$.

Pour montrer que $\operatorname{Im}\psi_D = \mathcal{L}$ il suffit alors de prouver que $\operatorname{Im}\psi_D \subset \mathcal{L}$.

Soit $N = (n_{ij})$ un élément de $\operatorname{Im}\psi_D$. $\exists M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\psi_D(M) = N$.

$N = DM - MD$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $n_{ii} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{ki} - \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{ki} = d_{ii} m_{ii} - m_{ii} d_{ii} = 0$.

Les éléments de la diagonale de N sont nuls. $N \in \mathcal{L}$.

$\operatorname{Im}\psi_D \subset \mathcal{L}$ et $\dim \operatorname{Im}\psi_D = \dim \mathcal{L} < +\infty$. $\operatorname{Im}\psi_D = \mathcal{L}$.

$\operatorname{Im}\psi_D$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

(*) $\operatorname{card}\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid i\neq j\} = n^2-n$!

(Q3) a) $f\in\mathcal{L}(E)$.

* Supposons que : $\exists (g,h)\in(\mathcal{L}(E))^2$, $f=g\circ h-h\circ g$. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. $M_\mathcal{B}(f)=M_\mathcal{B}(g)M_\mathcal{B}(h)-M_\mathcal{B}(h)M_\mathcal{B}(g)$.

$tr(M_\mathcal{B}(f))=tr(M_\mathcal{B}(g)M_\mathcal{B}(h))-tr(M_\mathcal{B}(h)M_\mathcal{B}(g))=0$
ε "$tr(AB)=tr(BA)$"

Ainsi $tr(f)=0$.

* Réciproquement supposons que la trace de f est nulle. D'après Q1 il existe une base $\hat{\mathcal{B}}$ de E telle que la matrice A de f dans la base $\hat{\mathcal{B}}$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

Considérons une matrice diagonale D de $M_n(K)$ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts (ex : $D=\mathrm{Diag}(1,2,3,\dots,n)$).

Alors d'après Q2 c) $A\in\mathrm{Im}\,\psi_D$. $\exists M\in M_n(K)$, $A=\psi_D(M)=DM-MD$.

Soient g et h les endomorphismes de E de matrices D et M dans $\hat{\mathcal{B}}$.

Alors $M_\mathcal{B}(f)=A=DM-MD=M_\mathcal{B}(g)M_\mathcal{B}(h)-M_\mathcal{B}(h)M_\mathcal{B}(g)=M_\mathcal{B}(g\circ h-h\circ g)$.

Ainsi $f=g\circ h-h\circ g$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall f\in\mathcal{L}(E),\ tr(f)=0\Leftrightarrow\exists(g,h)\in\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E),\ f=g\circ h-h\circ g}}$.

b) <u>Aucun problème pour g</u>. Il suffit de prendre $D=(1,2,\dots,n-1,-\sum_{k=1}^{n-1}k)$ ... si $n\geq 2$; on a alors $tr(g)=0$, non ?

Si $n=1$. Comme $tr(f)=0$: $f=0_{\mathcal{L}(E)}$. On peut donc prendre $g=0_{\mathcal{L}(E)}$ et alors $tr(g)=0$.

<u>Aucun problème pour h</u> non plus. Dans ce qui précède posons $\lambda=tr(M)$ et $\hat{M}=M-\frac{\lambda}{n}I_n$. Alors $tr(\hat{M})=tr(M)-\frac{\lambda}{n}tr(I_n)=\lambda-\frac{\lambda}{n}\times n=0$.

De plus : $\psi_D(\widehat{M}) = \psi_D(M - \frac{\lambda}{n} I_n) = \psi_D(M) - \frac{\lambda}{n}\psi_D(I_n) \underset{\uparrow}{=} \psi_D(M) = A$.

Alors $A = D\widehat{M} - \widehat{M}D$ avec $tr(\widehat{M}) = 0$. $\quad I_n \in \mathrm{Ker}\,\psi_D$

En posant $\hat{h} = h - \frac{\lambda}{n} Id_E$ on a $tr(\hat{h}) = 0$ et $f = g\circ\hat{h} - \hat{h}\circ g$.

Ainsi si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si $tr(f) = 0$ on peut trouver deux endomorphismes de E, g et h tels que $f = g\circ h - h\circ g$, $tr(g) = 0$ et $tr(h) = 0$.