PARTIE I

Q1 Soit V' un élément non nul de E orthogonal à V.

(V,V') est une famille d'éléments non nuls et orthogonaux de E, (V,V') est donc une famille libre de E. E étant de dimension 2, (V,V') est une base orthogonale de E.

Soit X un élément de E de coordonnées (α,β) dans la base (V,V'). $X=\alpha V+\beta V'$

$\langle U,X\rangle = 1$ et $\langle V,X\rangle=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\langle U,\alpha V+\beta V'\rangle = \alpha\langle U,V\rangle+\beta\langle U,V'\rangle \\ 0=\langle V,\alpha V+\beta V'\rangle = \alpha\|V\|^2 \end{cases}$

Notons que $\|V\|^2$ n'est pas nul car $V\neq 0$.

De plus $\langle U,V'\rangle=0 \Rightarrow U$ orthogonal à $V' \Rightarrow U\in \mathrm{Vect}(V')^{\perp}=\mathrm{Vect}(V) \Rightarrow (U,V)$ liée.

Ainsi $\|V\|^2\neq 0$ et $\langle U,V'\rangle\neq 0$.

Alors $\langle U,X\rangle=1$ et $\langle V,X\rangle=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ et $\beta=\dfrac{1}{\langle U,V'\rangle}$.

$X=\dfrac{1}{\langle U,V'\rangle}V'$ est l'unique élément de E tel que : $\langle U,X\rangle=1$ et $\langle V,X\rangle=0$.

$\exists(!)\,X\in E,\ \langle U,X\rangle=1$ et $\langle V,X\rangle=0$.

Q2 a) Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{C}(U,V)$ et soit $\lambda\in[0,1]$.

$\langle U,X\rangle\geqslant 0$, $\langle U,Y\rangle\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$, $1-\lambda\geqslant 0$; donc

$\lambda\langle U,X\rangle+(1-\lambda)\langle U,Y\rangle\geqslant 0$; $\langle U,\lambda X+(1-\lambda)Y\rangle\geqslant 0$.

On montre de même que $\langle V,\lambda X+(1-\lambda)Y\rangle\geqslant 0$ et ainsi $\lambda X+(1-\lambda)Y\in\mathcal{C}(U,V)$.

$\forall(X,Y)\in\mathcal{C}^2(U,V),\ \forall\lambda\in[0,1],\ \lambda X+(1-\lambda)Y\in\mathcal{C}(U,V)$. $\mathcal{C}(U,V)$ est convexe.

b) (U,U') est une famille orthogonale d'éléments non nuls de E donc (U,U') est une famille libre de E. Comme $\dim E=2$, (U,U') est une base de E.

Soit X un élément de E de coordonnées (α,β) dans la base (U,U').

$\langle U,X\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle U,\alpha U+\beta U'\rangle \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha\langle U,U\rangle+\beta\langle U,U'\rangle = \alpha\|U\|^2$.

$\langle U,X\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 0$.

$\forall X = \alpha U+\beta U' \in E$, $\langle U,X\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 0$.

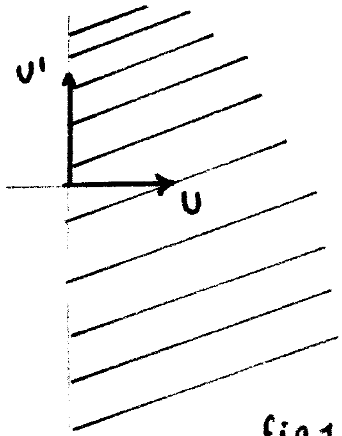


fig 1

c] • (U,V) libre

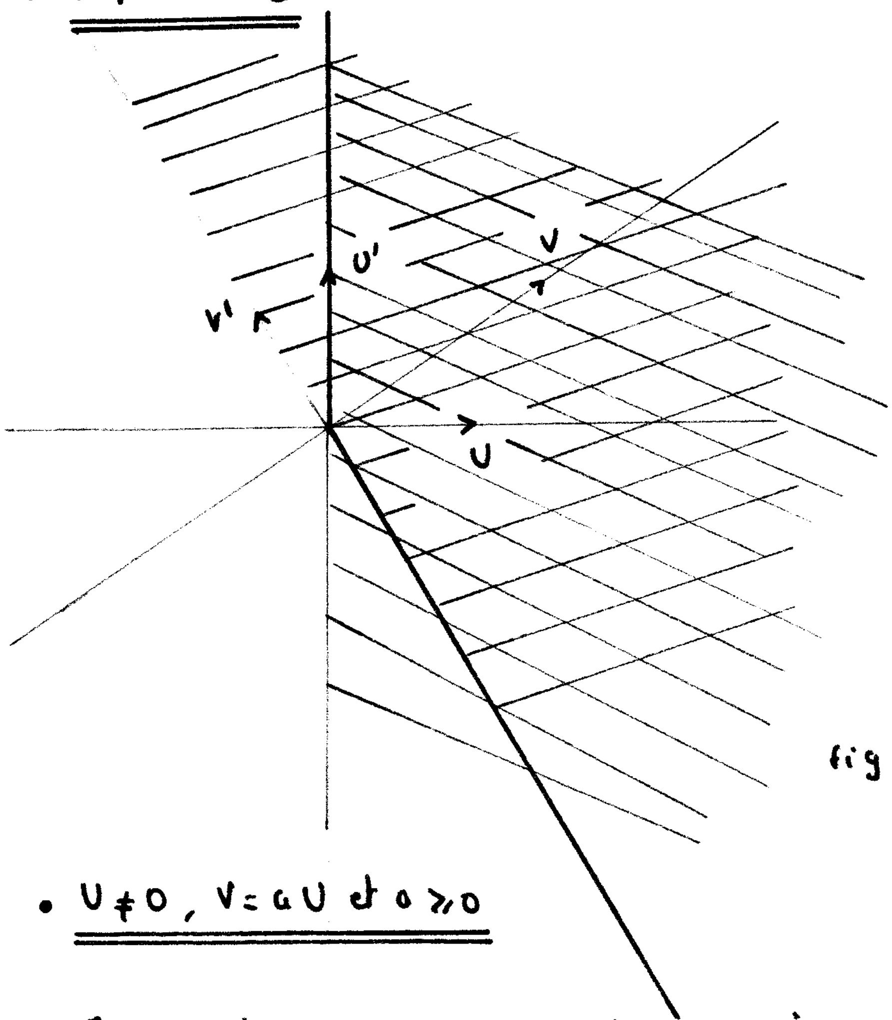
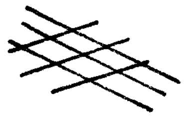


fig 2



$G(U,V)$

• $U \neq 0$, $V = aU$ et $a \geq 0$

$G(U,V) = \{X \in E \mid \langle U,X\rangle \geq 0\}$ ... voir la figure 1.

• $U \neq 0$, $V = aU$ et $a < 0$.

Soit $X \in E$; $X \in G(U,V) \Leftrightarrow \langle U,X\rangle \geq 0$ et $a\langle U,X\rangle \geq 0 \overset{a<0}{\Leftrightarrow} \langle U,X\rangle = 0$.

$G(U,V) = (\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$

• $U = V = 0$. $G(U,V) = \mathbb{R}^2$.

d) Soit W un élément de E tel que : $\forall X \in \mathcal{C}(U,V)$, $\langle W, X \rangle \geq 0$.

1er cas.. (U,V) est libre.

Alors (U,V) est une base de E. $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $W = \lambda U + \mu V$.

D'après Q 1, $\exists X \in E$, $\langle U, X \rangle = 1$ et $\langle V, X \rangle = 0$.

$\langle U, X \rangle \geq 0$ et $\langle V, X \rangle \geq 0$ donc X appartient à $\mathcal{C}(U,V)$.

Alors $0 \leq \langle W, X \rangle = \lambda \langle U, X \rangle + \mu \langle V, X \rangle = \lambda$; $\lambda \geq 0$.

On démontre de même que : $\mu \geq 0$.

Ainsi $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^2$, $W = \lambda U + \mu V$.

2e cas.. $U \neq 0$, $V = aU$ et $a \geq 0$.

$\mathcal{C}(U,V) = \{X \in E \mid \langle U, X \rangle \geq 0\}$.

Soit U' un vecteur non nul orthogonal à U. (U,U') est une base de E.

$\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $W = \alpha U + \beta U'$

$\langle U, U' \rangle = 0 \geq 0$ donc $U' \in \mathcal{C}(U,V)$.

Alors $0 \leq \langle W, U' \rangle = \alpha \langle U, U' \rangle + \beta \langle U', U' \rangle = \beta \|U'\|^2$; $\beta \geq 0$

$\langle U, -U' \rangle \quad -\langle U, U' \rangle = 0 \geq 0$; $-U' \in \mathcal{C}(U,V)$.

Alors $0 \leq \langle W, -U' \rangle = \alpha \langle U, -U' \rangle + \beta \langle U', -U' \rangle = -\beta \|U'\|^2$; $-\beta \geq 0$

Ainsi $\beta = 0$. $W = \alpha U$. $\quad \langle U, U \rangle = \|U\|^2 \geq 0$; $U \in \mathcal{C}(U,V)$ et

alors $0 \leq \langle W, U \rangle = \alpha \langle U, U \rangle = \alpha \|U\|^2$; $\alpha \geq 0$.

Posons $\lambda = \alpha$ et $\mu = 0$. $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^2$ et $W = \lambda U + \mu V$. $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^2$, $W = \lambda U + \mu V$.

3ème cas.. $U \neq 0$, $V = aU$ et $a < 0$.

$\mathcal{C}(U,V) = (\mathrm{Vect}(U))^\perp$. Soit U' un élément non nul de E orthogonal à U.

$U' \in \mathcal{C}(U,V)$ et $-U' \in \mathcal{C}(U,V)$. $\quad 0 \leq \langle W, U' \rangle$ et $0 \leq \langle W, -U' \rangle = -\langle W, U' \rangle$

Alors $\langle W, U' \rangle = 0$; $W \in (\mathrm{Vect}(U'))^\perp = \mathrm{Vect}(U)$.

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $W = \gamma U$.

- Supposons $\gamma \geq 0$. En posant $\lambda = \gamma$ et $\mu = 0$ on a : $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ et $W = \lambda U + \mu V$.
- Supposons $\gamma < 0$. En posant $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{\gamma}{a}$ on a : $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $W = \gamma U = \mu a U = \mu V = \lambda U + \mu V$.

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2,\ W = \lambda U + \mu V$.

4ième cas.. $U = V = 0$. $\quad \mathcal{C}(U, V) = \mathbb{R}^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}^2, \langle W, x \rangle \geq 0$. $\forall x \in \mathbb{R}^2, \langle W, x \rangle \geq 0$ et $\langle W, -x \rangle \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^2, \langle W, x \rangle = 0$, $\quad W \in \mathbb{R}^{2\perp} = \{0\}$. $\quad W = 0$.

En posant $\lambda = 0$ et $\mu = 0$ on obtient : $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, $W = \lambda U + \mu V$.

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2,\ W = \lambda U + \mu V$.

Dans tous les cas : $\underline{\underline{\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2,\ W = \lambda U + \mu V}}$.

PARTIE II

Q1) a) Soit $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$ et soit $\lambda \in [0,1]$.

$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) = f((\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) V + (1 - \lambda t_1 - (1-\lambda) t_2) U)$. Un calcul simple donne :

$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) = f(\lambda (t_1 V + (1-t_1) U) + (1-\lambda)(t_2 V + (1-t_2) U))$ $\quad 1 - \lambda t_1 - (1-\lambda) t_2 = \lambda(1-t_1) + (1-\lambda)(1-t_2)$!

La convexité de f donne alors :

$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \leq \lambda f(t_1 V + (1-t_1) U) + (1-\lambda) f(t_2 V + (1-t_2) U) = \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda) \varphi(t_2)$.

$\forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2, \forall \lambda \in [0,1]$, $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \leq \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda) \varphi(t_2)$; $\underline{\underline{\varphi \text{ est convexe sur } [0,1]}}$.

b) Posons $U = (u_1, u_2)$ et $V = (v_1, v_2)$.

$\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(tV + (1-t) U) = f(t v_1 + (1-t) u_1, t v_2 + (1-t) u_2)$.

$\to$ $t \mapsto t v_1 + (1-t) u_1$ et $t \to t v_2 + (1-t) u_2$ sont C^1 sur $[0,1]$.

$\to$ $\forall t \in [0,1]$, $(t v_1 + (1-t) u_1, t v_2 + (1-t) u_2) \in \mathbb{R}^2$!!

$\to$ f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par composition φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. En particulier $\underline{\underline{\varphi \text{ est dérivable sur } [0,1]}}$.

$\forall t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = [1 \times v_1 + (-1) u_1] \frac{\partial f}{\partial x_1}(t v_1 + (1-t) u_1, t v_2 + (1-t) u_2) + [1 \times v_2 + (-1) u_2] \frac{\partial f}{\partial x_2}(\ldots, \ldots)$

$\forall t\in[0,1],\ \varphi'(t)=(v_1-u_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(tV+(1-t)U)+(v_2-u_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(tV+(1-t)U).$

Comme $V-U=(v_1-u_1,v_2-u_2)$ et $\operatorname{grad} f(tV+(1-t)U)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(tV+(1-t)U),\frac{\partial f}{\partial x_2}(tV+(1-t)U)\right)$.

$\forall t\in[0,1],\ \varphi'(t)=\langle \operatorname{grad} f(tV+(1-t)U),\ V-U\rangle.$

c) $y=\varphi'(0)(x-0)+\varphi(0)$ est une équation de la tangente à la courbe représentative de φ au point d'abscisse 0. Notons que $\varphi'(0)=\langle \operatorname{grad} f(U),V-U\rangle$ et $\varphi(0)=f(U)$.

Cette tangente est en dessous de la courbe représentative de φ.

Ainsi $\forall t\in[0,1],\ \varphi(t)\geq\varphi'(0)(t-0)+\varphi(0)$.

En particulier $\varphi(1)\geq\varphi'(0)(1-0)+\varphi(0)$.

ce qui donne : $f(V)\geq\langle \operatorname{grad} f(U),V-U\rangle+f(U)$.

Finalement : $\forall (U,V)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ f(V)\geq f(U)+\langle \operatorname{grad} f(U),V-U\rangle.$ (1)

d) Supposons (1) et montrons que f est convexe.

Etape 1.- Fixons U et V dans $\mathbb{R}^2$. Posons $\forall t\in[0,1],\ \varphi(t)=f(tV+(1-t)U)$ et montrons que φ est convexe sur $[0,1]$.

Par exemple montrons que : $\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ \varphi(y)\geq\varphi'(x)(y-x)+\varphi(x)$.

Soit $(x,y)\in[0,1]^2$.

$$\varphi(y)-\varphi(x)=f(yV+(1-y)U)-f(xV+(1-x)U)\overset{(1)}{\geq}\langle \operatorname{grad} f(xV+(1-x)U),\ yV+(1-y)U-xV-(1-x)U\rangle$$

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geq\langle \operatorname{grad} f(xV+(1-x)U),\ (y-x)(V-U)\rangle$$

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geq(y-x)\langle \operatorname{grad} f(xV+(1-x)U),\ V-U\rangle=(y-x)\varphi'(x).$$

Ainsi $\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ \varphi(y)\geq(y-x)\varphi'(x)+\varphi(x)$. φ est convexe sur $[0,1]$.

Etape 2.- Montrons que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $(U,V) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Soit $\lambda \in [0,1]$.

Posons $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(tV+(1-t)U)$. φ est convexe sur $[0,1]$.

$f(\lambda U+(1-\lambda)V) = \varphi(1-\lambda) = \varphi(\lambda \times 0+(1-\lambda)\times 1) \leq \lambda\varphi(0)+(1-\lambda)\varphi(1)$

$f(\lambda U+(1-\lambda)V) \leq \lambda f(0\times V+(1-0)U)+(1-\lambda)f(1\times V+(1-1)\times U) = \lambda f(U)+(1-\lambda)f(V)$.

$\forall (U,V)\in(\mathbb{R}^2)^2, \forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda U+(1-\lambda)V) \leq \lambda f(U)+(1-\lambda)f(V)$.

f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi f convexe sur $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall (U,V)\in(\mathbb{R}^2)^2$, $f(V) \geq f(U)+\langle \text{grad} f(U), V-U\rangle$.

(Q2) • Supposons que f possède un minimum en $U\in E$. $E=\mathbb{R}^2$ est un ouvert et f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\text{grad} f(U)=0$.

• Réciproquement supposons que $\text{grad} f(U)=0$.

$\forall V\in E=\mathbb{R}^2$, $f(V) \geq f(U)+\langle \text{grad} f(U), V-U\rangle = f(U)+\langle 0, V-U\rangle = f(U)$.

$\forall V\in E$, $f(V)\geq f(U)$. f possède un minimum en U.

Ainsi f possède un minimum en U si et seulement si $\text{grad} f(U)=0$.

(Q3) Soient $X=(x_1,x_2)$ et $Y=(y_1,y_2)$ deux éléments de E. Soit $\lambda\in[0,1]$.

$f(\lambda X+(1-\lambda)Y)-(\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y)) = \lambda x_1+(1-\lambda)y_1+(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)^2-\lambda(x_1+x_2^2)-(1-\lambda)(y_1+y_2^2) =$

$\lambda^2x_2^2+2\lambda(1-\lambda)x_2y_2+(1-\lambda)^2y_2^2-\lambda x_2^2-(1-\lambda)y_2^2 = \lambda(\lambda-1)x_2^2+2\lambda(1-\lambda)x_2y_2+(1-\lambda)(1-\lambda-1)y_2^2 =$

$-\lambda(1-\lambda)(x_2^2-2x_2y_2+y_2^2) = -\lambda(1-\lambda)(x_2-y_2)^2 \leq 0$.

Ainsi $\forall (X,Y)\in E^2, \forall\lambda\in[0,1]$, $f(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y)$. f est convexe.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E=\mathbb{R}^2$ (fonction polynôme) et $\forall X\in E$, $\frac{\partial f}{\partial x}(X)=1$.

Ainsi f n'a pas de point critique sur l'ouvert $E=\mathbb{R}^2$.

Alors f ne possède pas de minimum sur E.

PARTIE III

Q1 Soit $(x,y)\in\mathcal{C}$ et soit $\lambda\in[0,1]$.

$\lambda\in[0,1]$, $1-\lambda\in[0,1]$, $g(x)\leq 0$ et $g(y)\leq 0$ donc $\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\leq 0$.

Comme g est convexe : $g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\leq 0$; ainsi $\lambda x+(1-\lambda)y\in\mathcal{C}$.

$\forall\lambda\in[0,1]$, $\forall(x,y)\in\mathcal{C}^2$, $\lambda x+(1-\lambda)y\in\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est convexe.

Q2 $x\in\mathcal{C}$ et $g(x)<0$. g est continue en x donc :

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$, $\exists\alpha\in\mathbb{R}^*_+$, $\forall y\in E$, $\|y-x\|<\alpha\Rightarrow |g(y)-g(x)|<\varepsilon\Rightarrow g(x)-\varepsilon<g(y)<g(x)+\varepsilon$

Posons $\varepsilon=-g(x)$. $\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$.

Alors $\exists\alpha\in\mathbb{R}^*_+$, $\forall y\in E$, $\|y-x\|<\alpha\Rightarrow g(x)-(-g(x))<g(y)<g(x)+(-g(x))=0$.

$\forall y\in E$, $\|y-x\|<\alpha\Rightarrow g(y)<0$.

$\forall y\in E$, $\|y-x\|<\alpha\Rightarrow g(y)\leq 0$!

$\forall y\in E$, $\|y-x\|<\alpha\Rightarrow y\in\mathcal{C}$. La boule ouverte de centre x et de rayon α est contenue dans $\mathcal{C}$.

Il existe une boule ouverte de centre x contenue dans $\mathcal{C}$.

Q3 a) $g(x)<0$ donc il existe une boule ouverte de centre x, $B(x,\alpha)$, contenue dans $\mathcal{C}$.

x rend minimum f sur $\mathcal{C}$ donc x rend minimum f sur l'ouvert $B(x,\alpha)$.

Comme f est de classe C^1 sur $B(x,\alpha)$: $\operatorname{grad} f(x)=0$.

b) $\forall t\in[0,1]$, $\varphi_1(t)=f(x+ty)=f(t(y+x)+(1-t)x)$.

II Q1 nous permet de dire que φ_1 est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1]$, $\varphi_1'(t)=\langle\nabla f(t(y+x)+(1-t)x),y\rangle$

$\forall t\in[0,1]$, $\varphi_1'(t)=\langle\nabla f(x+ty),y\rangle$.

De même φ_2 est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1]$, $\varphi_2'(t)=\langle\nabla g(x+ty),y\rangle$.

$\varphi_1'(0)=\langle\nabla f(x),y\rangle<0$ et $\varphi_2'(0)=\langle\nabla g(x),y\rangle<0$.

f et g sont de classe C^1 sur E donc ℓ_1 et ℓ_2 sont de classe C^1 sur $[0,1]$. En particulier ℓ_1' et ℓ_2' sont continues en 0.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0,1], \ |t| < \eta \Rightarrow |\ell_1'(t) - \ell_1'(0)| < \varepsilon.$

Posons $\varepsilon = -\ell_1'(0)$. $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0,1], \ |t| < \eta \Rightarrow |\ell_1'(t) - \ell_1'(0)| < \varepsilon.$

$\forall t \in [0,1] \cap]-\eta, \eta[, \ \ell_1'(0) = -\varepsilon < \ell_1'(t) - \ell_1'(0) < \varepsilon = -\ell_1'(0)$

$\forall t \in [0,1] \cap]-\eta, \eta[, \ \ell_1'(t) - \ell_1'(0) < -\ell_1'(0)$; $\forall t \in [0,1] \cap]-\eta, \eta[, \ \ell_1'(t) < 0$.

Posons $\alpha = \min(1, \frac{\eta}{2})$. $\forall t \in [0, \alpha], \ \ell_1'(t) < 0$. Alors ℓ_1 est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$. Ainsi $\forall t \in]0, \alpha], \ \ell_1(t) < \ell_1(0) = f(x)$. Rappelons que $\alpha \in]0,1]$.

On montre de même que $\exists \beta \in]0,1], \forall t \in]0, \beta], \ \ell_2(t) < \ell_2(0) = g(x)$.

Choisissons t dans $]0, \alpha[\cap]0, \beta[$. Alors $\ell_1(t) < f(x)$ et $\ell_2(t) < g(x)$... et $t \in]0,1[$.

Ainsi $\underline{\underline{\exists t \in]0,1[, \ \ell_1(t) < f(x) \text{ et } \ell_2(t) < g(x)}}$.

Alors $f(x+ty) < f(x)$ et $g(x+ty) < g(x) = 0$.

Ainsi $x + ty \in \mathcal{E}$ et $f(x+ty) < f(x)$. Ceci contredit le fait que x rend minimum f sur $\mathcal{E}$.

Donc $\underline{\underline{\text{si } y \text{ est un élément de } E \text{ tel que } \langle y, \nabla g(x) \rangle < 0 \text{ alors } \langle y, \nabla f(x) \rangle \geq 0}}$.

<u>c)</u> $g(x) = 0$. Supposons $\nabla g(x) = 0$.

(1) donne : $\forall y \in E, \ g(y) \geq g(x) + \langle \nabla g(x), y - x \rangle = g(x) = 0$.

Alors $\forall y \in E, \ g(y) \geq 0$. Ceci contredit le fait qu'il existe des éléments de E pour lesquels g prend des valeurs strictement négatives.

Ainsi $\underline{\underline{\text{si } g(x) = 0 : \ \nabla g(x) \neq 0}}$.

Soit Y un élément de E tel que $\langle Y, \nabla g(X) \rangle = 0$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = Y - \frac{1}{n+1} \nabla g(X)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle Y_n, \nabla g(X) \rangle = \langle Y, \nabla g(X) \rangle - \frac{1}{n+1} \|\nabla g(X)\|^2 = -\frac{1}{n+1} \|\nabla g(X)\|^2 < 0$

$\nabla g(X) \neq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle Y_n, \nabla g(X) \rangle < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\|Y_n - Y\| = \frac{1}{n+1} \|\nabla g(X)\|$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|Y_n - Y\| = 0$. $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge vers Y.

Si Y est un élément de E tel que $\langle Y, \nabla g(X) \rangle = 0$, Y est limite d'une suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle Y_n, \nabla g(X) \rangle < 0$.

Alors nécessairement $\langle Y_n, \nabla f(X) \rangle \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$0 \leq \langle Y_n, \nabla f(X) \rangle = \langle Y_n - Y, \nabla f(X) \rangle + \langle Y, \nabla f(X) \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \langle Y_n - Y, \nabla f(X) \rangle + \langle Y, \nabla f(X) \rangle$. (*)

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \langle Y_n - Y, \nabla f(X) \rangle \leq \|Y_n - Y\| \, \|\nabla f(X)\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par encadrement il vient alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\langle Y_n - Y, \nabla f(X) \rangle) = 0$.

En passant à la limite dans (*) on obtient $\langle Y, \nabla f(X) \rangle \geq 0$.

Par conséquent : $\forall Y \in E$, $\langle Y, \nabla g(X) \rangle = 0 \Rightarrow \langle Y, \nabla f(X) \rangle \geq 0$.

Alors avec c) : $\forall Y \in E$, $\langle Y, \nabla g(X) \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle Y, \nabla f(X) \rangle \geq 0$.

d) Supposons que X est admissible et minimise f sur $\mathcal{C}$.

1er cas.. $\nabla f(X) = 0$. Alors $\lambda = 0$ convient.

2ème cas.. $\nabla f(X) \neq 0$. Nécessairement $g(X) = 0$ ($g(X) < 0 \Rightarrow \nabla f(X) = 0$).

Alors $\forall Y \in E$. $\langle Y, \nabla g(X) \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle Y, \nabla f(X) \rangle \geq 0$.

Posons $U = -\nabla f(x)$ et $V = -\nabla g(x)$.

Soit $y \in \mathcal{C}(U,V)$. $\langle U, y\rangle \geqslant 0$ et $\langle V, y\rangle \geqslant 0$.

Alors $\langle \nabla f(x), y\rangle \leqslant 0$ et $\langle \nabla g(x), y\rangle \leqslant 0$.

Or $\langle \nabla g(x), y\rangle \leqslant 0$ donne également $\langle \nabla f(x), y\rangle \geqslant 0$.

Alors $\langle \nabla f(x), y\rangle = 0$. Donc $\langle U, y\rangle = 0$ et $U = -\nabla f(x) \neq 0$.

Alors $y \in \mathrm{Vect}(U)^{\perp}$. Donc $\mathcal{C}(U,V) \subset (\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$.

Si nous observons les résultats de I φ 2 d), $\mathcal{C}(U,V) \subset (\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$ n'est possible que pour U non nul et $V = aU$ avec $a < 0$.

Ainsi $-\nabla g(x) = -a\nabla f(x)$. Posons $\lambda = -\frac{1}{a}$. $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(*)}$, $\lambda g(x) = 0$ et

$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$.

Ainsi si x est f minimale sur $\mathcal{C}$ alors il existe un réel positif ou nul λ tel que : $\lambda g(x) = 0$ et $\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$.