$\boxed{\text{D.S. 13}}$ Sujet 3

Jeudi 25 mars

Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Une partie $\mathcal{C}$ de F est convexe si le segment qui joint deux points quelconques de $\mathcal{C}$ est contenu dans $\mathcal{C}$, autrement dit si :

$$\forall U \in \mathcal{C},\ \forall V \in \mathcal{C},\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda U + (1-\lambda)V \in \mathcal{C}.$$

F est une partie convexe de F !

Soit $\mathcal{C}$ un convexe de F. Une application h de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$, est convexe si :

$$\forall U \in \mathcal{C},\ \forall V \in \mathcal{C},\ \forall \lambda \in [0,1],\ h(\lambda U + (1-\lambda)V) \leqslant \lambda h(U) + (1-\lambda)h(V).$$

Dans tout le problème, $E = \mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique que l'on note $< .,. >$. $\|.\|$ est la norme euclidienne associée.

Partie I

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que si U et V sont deux éléments de E, linéairement indépendants, il existe un élément X de E tel que :

$$< U, X >= 1 \text{ et } < V, X >= 0.$$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ U et V sont deux éléments de E.

On note $\mathcal{C}(U,V)$ l'ensemble des éléments X de E tels que : $< U, X > \geqslant 0$ $\boxed{\text{et}}$ $< V, X > \geqslant 0$.

a) Montrer que $\mathcal{C}(U,V)$ est une partie convexe de E.

b) Ici on suppose que U n'est pas nul et que U' est un élément non nul de E orthogonal à U. Montrer que (U,U') est une base de E.

Soit X un élément de E de coordonnées (α,β) dans cette base. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que $< U, X > \geqslant 0$. Dessiner l'ensemble des éléments X de E tel que $< U, X > \geqslant 0$.

c) Dessiner $\mathcal{C}(U,V)$ en envisageant les quatre cas suivants :

- (U,V) est libre
- $U \neq 0$ et $V = aU$ avec a réel positif ou nul.
- $U \neq 0$ et $V = aU$ avec a réel strictement négatif.
- $U = V = 0$! !

d) Soit W un élément de E tel que : $\forall X \in \mathcal{C}(U,V),\ < W, X > \geqslant 0$.

Montrer que l'on peut trouver deux éléments λ et μ appartenant à $\mathbb{R}^+$, tels que $W = \lambda U + \mu V$ (on distinguera les quatre cas précédents et on pourra utiliser Q1).

Partie II

Dans cette partie f est une application de $E = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose en outre que f est convexe.

Q1 Soit U et V deux éléments de E. On pose : $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = f(tV + (1-t)U)$.

a) Montrer que φ est convexe sur $[0,1]$ (on utilisera la définition d'une fonction convexe).

b) Montrer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 de f. Vérifier que :

$$\forall t \in [0,1],\ \varphi'(t) = < \nabla f(tV + (1-t)U), V - U >$$

c) Ecrire une équation de la tangente à la courbe représentative de φ au point d'abscisse 0.

Déduire de ce qui précède que :

$$f(V) \geqslant f(U) + < \nabla f(U), V - U > \quad (1)\ .$$

d) facultatif : envisager une réciproque.

Q2 Soit U un élément de E. Montrer que f possède un minimum en U si et seulement si $\nabla f(U) = 0$.

Q3 Ici $\forall X = (x, y) \in E,\ f(X) = x + y^2$. Montrer que f est convexe. f possède-t-elle un minimum ?

Partie III

f et g sont deux applications de E dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que g est **convexe** et qu'il existe en outre des éléments de E pour lesquels g prend des valeurs strictement négatives.

On pose $\mathcal{C} = \{X \in E \mid g(X) \leqslant 0\}$. On dira qu'un élément X de $\mathcal{C}$ rend f minimale sur $\mathcal{C}$ si : $\forall Y \in \mathcal{C},\ f(X) \leqslant f(Y)$.

Q1 Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe de E.

Q2 Soit X un point de $\mathcal{C}$ tel que $g(X) < 0$. Montrer en utilisant la continuité de g que l'on peut trouver une boule ouverte de centre X contenue dans $\mathcal{C}$.

Q3 On suppose que X rend f minimale sur $\mathcal{C}$.

a) Montrer que si $g(X) < 0$ alors $\nabla f(X) = 0$

b) On suppose ici que $g(X) = 0$. On suppose de plus qu'il existe Y dans E tel que : $\Big(< Y, \nabla f(X) > \Big) < 0$ et $\Big(< Y, \nabla g(X) > \Big) < 0$.

On pose $\forall t \in [0,1],\ \ell_1(t) = f(X + tY) = f((1-t)X + t(Y + X))$ et $\ell_2(t) = g(X + tY) = g((1-t)X + t(Y + X))$.

Repréciser ℓ_1' et ℓ_2'. Montrer que $\ell_1'(0) < 0$ et $\ell_2'(0) < 0$.

Montrer alors que l'on peut trouver un élément t de $]0,1[$ tel que $\ell_1(t) < f(X)$ $\boxed{\text{et}}$ $\ell_2(t) < g(X)$.

En déduire une contradiction.

Ainsi si Y est un élément de E tel que $\Big(< Y, \nabla g(X) > \Big) < 0$ alors $\Big(< Y, \nabla f(X) > \Big) \geqslant 0$ non ?

c) On suppose encore ici que $g(X) = 0$.

Montrer, à l'aide de (1) que $\big(\nabla g\big)(X)$ n'est pas nul.

Montrer que si Y est un élément de E tel que $\Big(< Y, \nabla g(X) > \Big) = 0$ il peut être considéré comme limite d'une suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de E tels que : $\Big(< Y_n, \nabla g(X) > \Big) < 0$.

En déduire que : $\forall Y \in E,\ \Big(< Y, \nabla g(X) > \Big) \leqslant 0 \Rightarrow \Big(< Y, \nabla f(X) > \Big) \geqslant 0$.

d) Montrer que si X rend f minimale sur $\mathcal{C}$ alors il existe un réel positif ou nul λ tel que :

$$\lambda\, g(X) = 0 \text{ et } \nabla f(X) + \lambda\, \nabla g(X) = 0 \quad (2)$$

(on pourra considérer $\mathcal{C}(-\nabla f(X), -\nabla g(X))$ si $\nabla f(X) \neq 0$ et utiliser I)

Partie IV

On confond ici les élément de E et les éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

a et b sont deux réels. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$ et $\forall X \in E,\ f(X) = {}^tXAX$.

$\forall X = (x, y) \in E,\ g(X) = x^2 + y^2 - 1$.

Q1 Montrer que g est convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur E. Calculer ses dérivées partielles premières.

Q2 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et vérifier que $\forall X \in E,\ \nabla f(X) = 2AX$.

Q3 En utilisant (2), montrer que si X réalise le minimum de f sur $\mathcal{C}$, ou bien $X = 0$ ou bien X est un vecteur propre de A.

Q4 Démontrer que $X = 0$ réalise le minimum de f sur $\mathcal{C}$ si $a - b^2 > 0$.

Q5 Montrer que si $a - b^2 \leqslant 0$, A possède au moins une valeur propre strictement négative et qu'alors $X = 0$ ne peut réaliser le minimum de f sur $\mathcal{C}$.

Comment peut-on définir le point X qui rend f minimale sur $\mathcal{C}$ dans le cas $a - b^2 < 0$. Déterminer ce point si $a = 3$ et $b = 2$.
