# SUJET 1

Pour tout réel $x$ on note $[x]$ la partie entière de $x$ (vous pouvez si vous le souhaitez utiliser la notation $E(x)$).

Dans les parties I et II du problème :

$f$ est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. $g$ est une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $G$ est la primitive de $g$ sur $\mathbb{R}^+$ qui prend la valeur 0 en 0. **(H1)**

Notons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

On se propose d'étudier des conditions dans lesquelles les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,\mathrm{d}t$, et la série de terme général $f(k)g(k)$ sont de même nature.

## PARTIE I

Dans cette partie on suppose que :

$f$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$ et que $g$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ **(H2)**.

**Q1** Montrer que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

**Q2** Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, la série de terme général $f(k)\,g(k)$ et les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,\mathrm{d}t$ convergent (on pourra utiliser Q1 c)).

**Q3** Ici on suppose que le réel $\ell$ n'est pas nul et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente. Montrer que la série de terme général $f(k)\,g(k)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ sont divergentes.

**Q4** Ici on pose $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = 1 + \dfrac{1}{t+1}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(t) = \dfrac{1}{t+1}\cdot$ Montrer que $f$ et $g$ ont les bonnes qualités (H1+H2) et que les hypothèses de la question précédente sont vérifiées.

Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,\mathrm{d}t$.

**Q5** $\alpha$ est un réel appartenant à $]0,+\infty[$ et $\beta$ un réel appartenant à $]0,1]$.

On pose $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^\alpha}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(t) = \dfrac{1}{(1+t)^\beta}$.

Montrer que $f$ et $g$ ont les bonnes qualités (H1+H2), que $\ell = 0$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Etudier la nature de la série de terme général $f(k)\,g(k)$ et des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,\mathrm{d}t$.

---

## PARTIE II

---

Dans cette partie on suppose que :

$f$ et $g$ sont positives sur $\mathbb{R}^+$, que $f$ admet pour limite 0 en $+\infty$ et que $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, on note $u_k$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,k[,\ u_k(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [k,+\infty[,\ u_k(x) = g(k)$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

**Q0** Soit $(v_n)_{n \geqslant n_1}$ une suite convergente de réels. Notons $L$ sa limite. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} v_{[x]} = L$ (on utilisera les définitions).

**Q1** a) Soit $x$ un élément de $\mathbb{R}^+$. Donner la valeur de $u_k(x)$, pour tout élément $k$ de $\mathbb{N}$.

Montrer que la série de terme général $u_k(x)$ est convergente.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

Soit $x$ un élément de $\mathbb{R}^+$. Exprimer $S(x)$ à l'aide de $g$ et de $[x]$.

b) $k$ et $n$ sont dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $u_k$, $S_n$ et $S$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

**Q2** Dans cette question $\alpha$ est un réel strictement positif et $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = x^\alpha$ (pour les puristes $g(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+\,*},\ g(x) = x^\alpha$).

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \right) = \frac{1}{\alpha+1}.$$

En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left( \frac{1}{x^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{[x]} k^\alpha \right) = \frac{1}{\alpha+1}$.

Trouver un équivalent de $S$ en $+\infty$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ On suppose plus généralement ici que $g$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{G(n+1)}{G(n)} = 1$.

Cette limite suppose donc qu'il existe $n_0$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \in [\![ n_0, +\infty [\![,\ G(n) > 0$.

a) Montrer qu'il existe un élément $a$ de $\mathbb{R}^+$ tel que $g(a) > 0$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$ (on pourra utiliser la croissance de $g$ sur $[a, x]$).

b) Montrer que si $n$ appartient à $\mathbb{N}^*$ : $G(n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g(k) \leqslant G(n+1) - G(1)$ (encore la croissance de $g$... sur $[k, k+1]$).

c) Utiliser ce qui précède pour montrer que $S$ et $G$ sont équivalentes en $+\infty$ (on commencera par montrer que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} G([x])$).

d) Trouver une application $g$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, continue, positive et croissante, ne vérifiant pas : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{G(n+1)}{G(n)} = 1$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_k(t)\, f'(t)\, \mathrm{d}t$, pour tout élément $k$ de $\mathbb{N}^*$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_n(t)\, f'(t)\, \mathrm{d}t$, pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$.

c) $n$ est un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\left| \int_0^{n+1} S(t)\, f'(t)\, \mathrm{d}t \right| = \int_0^{n+1} (-S(t)\, f'(t))\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} (-S_n(t)\, f'(t))\, \mathrm{d}t$$

d) Montrer en utilisant c) que si la série de terme général $f(k)\, g(k)$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\, f'(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

Montrer la réciproque.

e) On suppose que $g$ est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{G(n+1)}{G(n)} = 1$. Montrer que la série de terme général $f(k)\, g(k)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G(t)\, f'(t)\, \mathrm{d}t$ sont de même nature.

## PARTIE III

Dans cette partie on suppose que :

> $f$ est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g(x) = x^\alpha$ où $\alpha$ est un réel de l'intervalle $]-1, +\infty[$.

**Q0** Soit $a$ un élément de $\mathbb{N}$ et $\varphi$ une fonction continue (par morceaux) et positive sur $[a, +\infty[$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que la série de terme général $\displaystyle\int_p^{p+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

**Q1** On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1}\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |x^{\alpha+1}\,f(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \left(x^{\alpha+1} f(x)\right) = 0$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

c) Montrer, à l'aide d'un exemple, que ce dernier résultat peut être faux si $\alpha = -1$.

**Q2** On suppose toujours que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1}\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que $h : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f(x)| \leqslant h(x)$.

b) Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,h(t)\,\mathrm{d}t$ puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser Q1).

**Q3** Ici $\alpha$ est strictement positif et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que pour tout élément $p$ de $\mathbb{N}$ :

$$\left| f(p) - \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_p^{p+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire la convergence absolue de la série de terme général $v_p = p^\alpha \left[ f(p) - \displaystyle\int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right]$.

c) Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge alors la série de terme général $p^\alpha\,|f(p)|$ converge.

d) Montrer que si $f$ est positive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,f(t)\,\mathrm{d}t$ et la série de terme général $p^\alpha\,f(p)$ sont de même nature.