PARTIE I

Q1 Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. $u(x) = 0_H$. Alors $\phi(x, u(x)) = \phi(x, 0_H) = 0$.

iii) donne alors $x = 0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ et <u>u est injective.</u>

b admet alors au plus un antécédent par u dans E. Comme $u(y_0) = b$, y_0 est l'unique antécédent de b par u dans E.

<u>y_0 est alors la seule solution de (I).</u>

Q2 Soit $(x, y, z) \in E^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\langle \lambda x + y, z\rangle = \phi(u(\lambda x + y), z) = \phi(\lambda u(x) + u(y), z) = \lambda \phi(u(x), z) + \phi(u(y), z)$.

  <u>$\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.</u>

  ϕ est un produit scalaire.

- $\langle x, y\rangle = \phi(u(x), y) \underset{i)}{=} \phi(x, u(y)) = \phi(u(y), x) = \langle y, x\rangle$; <u>$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.</u>

- $\langle x, x\rangle = \phi(u(x), x) \underset{ii)}{\geqslant} 0$; <u>$\langle x, x\rangle \geqslant 0$.</u>

- $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \phi(u(x), x) = 0 \underset{iii)}{\Rightarrow} x = 0_E$; <u>$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.</u>

<u>Les quatre points précédents montrent que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.</u>

Q3 a) E est de dimension finie donc $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel euclidien.

<u>Ainsi il existe un unique élément z de V tel que : $\|z - y_0\| = \min_{y \in V} \|y - y_0\|$;</u>

<u>z est la projection orthogonale de y_0 sur V.</u>

b) $z \in V$ et $z - y_0 \in V^\perp$.

Soit $y \in V$. $y - z \in V$ et $z - y_0 \in V^\perp$ donc $y - z$ et $z - y_0$ sont orthogonaux

Pythagore donne alors $\|(y-z)+(z-y_0)\|^2 = \|y-z\|^2 + \|z-y_0\|^2$.

Ainsi $\|y-y_0\|^2 = \|y-z\|^2 + \|z-y_0\|^2 \geqslant \|z-y_0\|^2$; $\|y-y_0\| \geqslant \|z-y_0\|$.

Alors $z \in V$ et $\forall y \in V$, $\|z-y_0\| \leqslant \|y-y_0\|$.

$z \in V$ et $\|z-y_0\| = \min_{y \in V} \|y-y_0\|$. z est pseudo-solution de (I) dans V.

Soit z' une seconde pseudo-solution de (I). $z' \in V$ et $\|z'-y_0\| = \min_{y \in V} \|y-y_0\|$.

Alors $\|z'-y_0\| = \|z-y_0\|$.

$$\|z-y_0\|^2 = \|z'-y_0\|^2 = \|(z'-z)+(z-y_0)\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ z'-z \in V \text{ et } z-y_0 \in V^\perp}}{=} \|z'-z\|^2 + \|z-y_0\|^2 ;$$

$\|z-y_0\|^2 = \|z'-z\|^2 + \|z-y_0\|^2$; $\|z'-z\|^2 = 0$; $\|z'-z\| = 0$; $z'-z = 0_E$; $z' = z$.

z est l'unique pseudo-solution de (I).

Q4 a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j \rangle x_j = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle = 0$.

Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ est orthogonal à $e_1, e_2, \dots, e_n$ donc à V.

Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ est un élément de V ; ainsi $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in V \cap V^\perp = \{0_E\}$.

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j = 0_E$. La liberté de $(e_1, \dots, e_n)$ donne $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. M est inversible.

b) $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ et ainsi $z = \sum_{j=1}^{n} z_j e_j$.

$z - y_0 \in V^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \langle z - y_0, e_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \langle z, e_i \rangle = \langle y_0, e_i \rangle$.

$z - y_0 \in V^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \ \langle \sum_{j=1}^{n} z_j e_j, e_i \rangle = \phi(u(y_0), e_i)$

$z - y_0 \in V^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \ \sum_{j=1}^{n} z_j \langle e_j, e_i \rangle = \phi(b, e_i)$

$z - y_0 \in V^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \ \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j \rangle z_j = \phi(e_i, b) \Leftrightarrow \Pi Z = C$

$z - y_0 \in V^\perp \Leftrightarrow \Pi Z = C$.

c) soit $z \in V$ de matrice Z dans B. $z - y_0 \in V^\perp \Leftrightarrow \Pi Z = C \Leftrightarrow Z = \Pi^{-1} C$.

Ainsi il existe un élément z appartenant à V (et un seul) tel que $z - y_0$ est orthogonal à V.

Q3 indique alors que z est l'unique pseudo-solution de (I) dans V.

(I) admet une unique pseudo-solution dans V.

La matrice dans la base B de cette pseudo-solution de (I) dans V est $\Pi^{-1} C$.

PARTIE II : Application

Q1 soit f un élément de S. $f'' = af - b$. Comme f est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et $f'' = af - b$.
a, f et b sont continues sur $[0,1]$ donc f'' est continue sur $[0,1]$.
Ainsi f est de classe C^2 sur $[0,1]$.

un élément de S est de classe C^2 sur $[0,1]$.

Q2 a) • Soit $f \in E$. f est de classe C^2 sur $[0,1]$, alors f'', a et f sont dans H.
Ainsi $-f''+af$ est un élément de H.

<u>u est une application de E dans H.</u>

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f,g) \in E^2$, $u(\lambda f+g) = -(\lambda f+g)'' + a(\lambda f+g) = \lambda(-f''+af) + (-g''+ag) = \lambda u(f) + u(g)$.

<u>u est une application linéaire de E dans H.</u>

b) Soit $(f,g) \in E^2$.

$$\phi(u(f),g) = \int_0^1 u(f)(t)g(t)\,dt = \int_0^1 (-f''(t)+a(t)f(t))g(t)\,dt$$

$$\phi(u(f),g) = -\int_0^1 f''(t)g(t)\,dt + \int_0^1 a(t)f(t)g(t)\,dt.$$

Une intégration par parties simple donne :

$$\int_0^1 \underset{u'}{f''(t)}\,\underset{v}{g(t)}\,dt = [f'(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt \underset{g(0)=g(1)=0.}{=} -\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$$

Ainsi <u>$\forall (f,g) \in E^2$, $\phi(u(f),g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt + \int_0^1 a(t)f(t)g(t)\,dt$.</u>

c) Soit $(f,g) \in E^2$.

• $\phi(f,u(g)) = \phi(u(g),f) = \int_0^1 g'(t)f'(t)\,dt + \int_0^1 a(t)g(t)f(t)\,dt = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt + \int_0^1 a(t)f(t)g(t)\,dt.$

<u>$\phi(f,u(g)) = \phi(u(f),g)$.</u>

• $\phi(f,u(f)) = \int_0^1 (f'(t))^2\,dt + \int_0^1 a(t)(f(t))^2\,dt.$

$\forall t \in [0,1]$, $(f'(t))^2 \geqslant 0$ et $a(t)(f(t))^2 \geqslant 0$; $\int_0^1 (f'(t))^2\,dt \geqslant 0$ et $\int_0^1 a(t)(f(t))^2\,dt \geqslant 0$.

Alors <u>$\phi(f,u(f)) \geqslant 0$.</u>

- Supposons $\phi(f,u(f))=0$.

  Alors $\int_0^1 (f'(t))^2 dt + \int_0^1 a(t) f^2(t) dt = 0$, $\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq 0$ et $\int_0^1 a(t) f^2(t) dt \geq 0$.

Ainsi $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = \int_0^1 a(t) f^2(t) dt = 0$.

$t \mapsto a(t) f^2(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, $a(t) f^2(t) = 0$ et $a(t) > 0$. Ainsi $\forall t \in [0,1]$, $f^2(t) = 0$. $f = 0_E$!

$\phi(f,u(f)) = 0 \Rightarrow f = 0_E$.

u vérifie les conditions i), ii) et iii) de la partie I.

Q3 f_0 est de classe C^2 sur $[0,1]$.

f_0 solution de (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [0,1], & -f_0''(x) + 1 \times f_0(x) = 1 \\ f_0(0) = f_0(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [0,1], & f_0(x) - f_0''(x) = 1 \\ f_0(0) = f_0(1) = 0 \end{cases}$.

f_0 solution de (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in [0,1], & \alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma - \alpha e^x - \beta e^{-x} = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0, & \alpha e + \beta e^{-1} + \gamma = 0 \end{cases}$

f_0 solution de (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = -1 \\ \alpha e + \beta e^{-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha = -\dfrac{1}{e+1} \\ \beta = -\dfrac{e}{e+1} \end{cases}$

Ainsi f_0 est solution de (II) si et seulement si $\alpha = -\dfrac{1}{e+1}$, $\beta = -\dfrac{e}{e+1}$, $\gamma = 1$.

Il existe un unique triplet (α,β,γ) de réels tel que f_0 soit solution de II :

$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(-\dfrac{1}{e+1}, -\dfrac{e}{e+1}, 1\right)$. On a alors $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x) = 1 - \dfrac{e^x + e^{-x+1}}{e+1}$.

Q4 a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. e_k est de classe C^2 sur $[0,1]$, $e_k(0) = 0$ et $e_k(1) = \sin(k\pi) = 0$

Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $e_k \in E$.

$B = (e_1, \dots, e_n)$ est une famille d'éléments de E.

b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\phi(e_i,e_j) = \int_0^1 \sin(i\pi t)\sin(j\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 [\cos(i\pi t - j\pi t) - \cos(i\pi t + j\pi t)]\,dt$$

$$\phi(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(\pi t(i-j))\,dt - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\pi t(i+j))}{\pi(i+j)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(\pi t(i-j))\,dt.$$

Si $i=j$: $\phi(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = 1/2$

Si $i \neq j$: $\phi(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\pi t(i-j))}{\pi(i-j)}\right]_0^1 = 0.$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \phi(e_i,e_j) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$\langle e_i,e_j\rangle = \phi(u(e_i),e_j)$. $\forall x \in [0,1],\ u(e_i)(x) = -e_i''(x) + e_i(x) = (i\pi)^2 e_i(x) + e_i(x)$

$\langle e_i,e_j\rangle = \phi((1+ \quad e_i, e_j) = (1+(i\pi)^2)\phi(e_i,e_j)$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle e_i,e_j\rangle = \begin{cases} \frac{1+(i\pi)^2}{2} & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\phi(e_i,b) = \int_0^1 \sin(i\pi t)\times 1\,dt = \left[-\frac{1}{i\pi}\cos(i\pi t)\right]_0^1 = -\frac{1}{i\pi}((-1)^i - 1).$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \phi(e_i,b) = \frac{1}{i\pi}(1-(-1)^i)$$

c) $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une famille orthogonale de E (pour ϕ, … et $\langle\ ,\ \rangle$) constituée d'éléments non nuls. $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une famille libre de E.

d) $V = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ est libre donc $B = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de V.

Il résulte de I Q4 que II admet une pseudo-solution et une seule :

$z = \sum_{i=1}^n z_i e_i$ avec $Z = M^{-1}C$ (si l'on reprend les notations de I)

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = \langle e_i, e_i \rangle = \dfrac{1+(i\pi)^2}{2}$ et $c_i = \varphi(e_i, b) = \dfrac{1-(-1)^i}{i\pi}$.

$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \alpha_2 & \\ (0) & & \ddots \ \alpha_n \end{pmatrix}$. $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha_1 & & (0) \\ & 1/\alpha_2 & \\ (0) & & \ddots \ 1/\alpha_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $z_i = \dfrac{c_i}{\alpha_i} = \dfrac{2}{i\pi} \dfrac{1-(-1)^i}{1+(i\pi)^2}$.

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(1-(-1)^i)}{i\pi\,(1+(i\pi)^2)} e_i \ . \quad \forall x \in [0,1],\ z(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(1-(-1)^i)}{i\pi\,(1+(i\pi)^2)} \sin(i\pi x).$$

Q5

```
program pseudo;

var n,k:integer;x,t:real;
function fonction(x:real):real;

var a:real;

begin
fonction:=1-(exp(x)+exp(-x+1))/(exp(1)+1);

end;

function pseudo_sol(n:integer;x:real):real;

var i:integer;s:real;

begin

s:=0;
for i:=1 to n do
if odd(i) then s:=s+sin(pi*x*i)/i/(sqr(i*pi)+1);


pseudo_sol:=4*s/pi;
end;
begin

write('Donner n. n=');readln(n);
writeln;

x:=0;

for k:=0 to 10 do
    begin
    t:=pseudo_sol(n,x);
    writeln('Pseudo en ',x:4:2,' : ',t,'. Delta : ',fonction(x)-t);
    x:=x+0.1;
    end;
end.
```

```
Donner n. n=10

Pseudo en 0.00 :  0.0000000000E+00. Delta :  0.0000000000E+00
Pseudo en 0.10 :  4.1406120465E-02. Delta : -1.2151474823E-04
Pseudo en 0.20 :  7.2884476571E-02. Delta :  8.9588960350E-05
Pseudo en 0.30 :  9.5457458599E-02. Delta : -7.1920390042E-05
Pseudo en 0.40 :  1.0867984184E-01. Delta :  6.3483461417E-05
Pseudo en 0.50 :  1.1324209251E-01. Delta : -6.0976473492E-05
Pseudo en 0.60 :  1.0867984184E-01. Delta :  6.3483460963E-05
Pseudo en 0.70 :  9.5457458599E-02. Delta : -7.1920388223E-05
Pseudo en 0.80 :  7.2884476572E-02. Delta :  8.9588959554E-05
Pseudo en 0.90 :  4.1406120466E-02. Delta : -1.2151474738E-04
Pseudo en 1.00 :  1.6328708314E-12. Delta :  2.0051079757E-12


Donner n. n=100

Pseudo en 0.00 :  0.0000000000E+00. Delta :  0.0000000000E+00
Pseudo en 0.10 :  4.1284399407E-02. Delta :  2.0631000552E-07
Pseudo en 0.20 :  7.2973956104E-02. Delta :  1.0942733297E-07
Pseudo en 0.30 :  9.5385458576E-02. Delta :  7.9632400229E-08
Pseudo en 0.40 :  1.0874325753E-01. Delta :  6.7774521995E-08
Pseudo en 0.50 :  1.1318105157E-01. Delta :  6.4466462391E-08
Pseudo en 0.60 :  1.0874325753E-01. Delta :  6.7774067247E-08
Pseudo en 0.70 :  9.5385458576E-02. Delta :  7.9634219219E-08
Pseudo en 0.80 :  7.2973956105E-02. Delta :  1.0942665085E-07
Pseudo en 0.90 :  4.1284399408E-02. Delta :  2.0631085818E-07
Pseudo en 1.00 :  1.7202399500E-12. Delta :  1.9177388571E-12
```

pas mal, non ?