PARTIE I

Q1) a) $(f-ae)\circ(f-be) = f^2 - af - bf + abe^2 = a^2p + b^2q - (a+b)(ap+bq) + abe$

$(f-ae)\circ(f-be) = a^2p + b^2q - a^2p - bap - abq - b^2q + ab(p+q) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\underline{\underline{(f-ae)\circ(f-be) = 0_{\mathcal{L}(E)}}}$. En particulier: $\underline{\underline{f^2 = (a+b)f - abe}}$.

b) Montrons que $E = \mathrm{Ker}(f-ae) \oplus \mathrm{Ker}(f-be)$; c'est-à-dire que :

$\forall u \in E, \exists ! (u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}(f-ae) \oplus \mathrm{Ker}(f-be)$.

→ Analyse/Unicité. Soit $u \in E$. Supposons que $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \mathrm{Ker}(f-ae)$ et $u_2 \in \mathrm{Ker}(f-be)$.

$u = u_1 + u_2$ et $f(u) = f(u_1) + f(u_2) = au_1 + bu_2$. $\begin{cases} u = u_1 + u_2 \\ f(u) = au_1 + bu_2 \end{cases}$

$au - f(u) = (a-b)u_2$ et $bu - f(u) = (b-a)u_1$; $\underline{\underline{u_1 = \frac{1}{b-a}(bu - f(u)) \text{ et } u_2 = \frac{1}{a-b}(au - f(u))}}$.

→ Synthèse/Existence.

Soit $u \in E$. Posons $u_1 = \frac{1}{b-a}(bu - f(u))$ et $u_2 = \frac{1}{a-b}(au - f(u))$.

. $u_1 + u_2 = \frac{1}{b-a}(bu - f(u) - au + f(u)) = \frac{b-a}{b-a}u = u$.

. $f(u_1) = \frac{1}{b-a}(bf(u) - f^2(u)) = \frac{1}{b-a}(bf(u) - (a+b)f(u) + abu) = \frac{a}{b-a}(bu - f(u)) = au_1$;

Donc $u_1 \in \mathrm{Ker}(f-ae)$. $0 = (f-ae)\circ(f-be) = f^2 - (a+b)f + abe$

. $f(u_2) = \frac{1}{a-b}(af(u) - f^2(u)) = \frac{1}{a-b}(af(u) - (a+b)f(u) + abu) = \frac{b}{a-b}(au - f(u)) = bu_2$.

Donc $u_2 \in \mathrm{Ker}(f-be)$. Par conséquent $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \mathrm{Ker}(f-ae)$ et $u_2 \in \mathrm{Ker}(f-be)$.

Ceci achève de prouver que: $\underline{\underline{E = \mathrm{Ker}(f-ae) \oplus \mathrm{Ker}(f-be)}}$.

c) Si $\mathrm{Ker}(f-ae) = \{0_E\}$: $E = \mathrm{Ker}(f-be)$; $f - be = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $f = be$.

Alors $f = ap + bq = be = b(p+q)$; $ap = bp$; $(a-b)p = 0$; $p = 0$ ou $a = b$!!

Donc $\underline{\underline{\mathrm{Ker}(f-ae) \neq \{0_E\}}}$. On montre de même que $\underline{\underline{\mathrm{Ker}(f-be) \neq \{0_E\}}}$.

d) De c) il résulte que $a \in \mathrm{Spec} f$ et $b \in \mathrm{Spec} f$. $\{a,b\} \subset \mathrm{Spec} f$.

De plus $(f-ae)\circ(f-be) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\mathrm{Spec} f \subset \{x \in \mathbb{C} \mid (x-a)(x-b) = 0\} = \{a,b\}$

Finalement $\underline{\underline{\mathrm{Spec} f = \{a,b\}}}$.

Comme : $E = \mathrm{Ker}(f-ae) \oplus \mathrm{Ker}(f-be)$: $\underline{\underline{f \text{ est diagonalisable}}}$.

Q2 a) $f-ae = ap+bq-ap-aq=(b-a)q$ et $f-be=ap+bq-bp-bq=(a-b)p$.

$$p=\frac{1}{a-b}(f-be) \text{ et } q=\frac{1}{b-a}(f-ae).$$

b) $p\circ q=\frac{1}{a-b}\frac{1}{b-a}(f-be)\circ(f-ae)=-\frac{1}{(a-b)^2}(f^2-(a+b)f+abe)=-\frac{1}{(a-b)^2}(f-ae)\circ(f-be)=0_{\mathcal{L}(E)}$

$q\circ p=\frac{1}{b-a}\frac{1}{a-b}(f-ae)\circ(f-be)=0_{\mathcal{L}(E)}$.

$$p\circ q=q\circ p=0_{\mathcal{L}(E)}.$$

$f^2=(a+b)f-abe$

$p\circ p=\frac{1}{(a-b)^2}(f-be)^2=\frac{1}{(a-b)^2}[f^2-2bf+b^2e]\overset{\downarrow}{=}\frac{1}{(a-b)^2}[(a+b)f-abe-2bf+b^2e]$

$p\circ p=\frac{1}{(a-b)^2}[(a-b)f-b(a-b)e]=\frac{1}{a-b}(f-be)=p$; de même $q\circ q=q$.

$$p\circ p=p \text{ et } q\circ q=q.$$

c) Soit $r\in\mathbb{N}$ et $r\geq 2$. $f=ap+bq$ donc $f^r=(ap+bq)^r \overset{\text{ap et bq commutent}}{=} \sum_{k=0}^{r} C_r^k (ap)^k\circ(bq)^{r-k}$

$f^r=(ap+bq)^r=(bq)^r+\sum_{k=1}^{r-1}C_r^k a^k b^{r-k} p^{k-1}\circ \underbrace{p\circ q}_{=0_{\mathcal{L}(E)}}\circ q^{r-k-1}+(ap)^r$

$f^r=b^rq^r+a^rp^r=b^rq+a^rp$

$p\circ p=p$ donne $p^r=p$ pour $r\geq 1$
$q\circ q=q$ —— $q^r=q$ pour $r\geq 1$

$\forall r\in[\![2,+\infty[\![$, $f^r=a^rp+b^rq$; ceci vaut aussi pour $r=0$ et 1.

Donc $\forall r\in\mathbb{N}$, $f^r=a^rp+b^rq$.

Supposons $ab\neq 0$. Alors $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

$f\circ(\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q)=(ap+bq)\circ(\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q)=p^2+\frac{a}{b}\underbrace{p\circ q}_{=0}+\frac{b}{a}\underbrace{q\circ p}_{=0}+q^2=p+q=e$

De même : $(\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q)\circ f=e$.

Par conséquent f est bijective et $f^{-1}=\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q=a^{-1}p+b^{-1}q$. Soit $r\in\mathbb{N}$,

$f^r\circ(a^{-r}p+b^{-r}q)=(a^rp+b^rq)\circ(a^{-r}p+b^{-r}q)=p^2+a^rb^{-r}p\circ q+b^ra^{-r}q\circ p+q^2=p+q=e$

De même $(a^{-r}p+b^{-r}q)\circ f^r=e$. Donc $(f^r)^{-1}=a^{-r}p+b^{-r}q$; soit : $f^{-r}=a^{-r}p+b^{-r}q$.

donc $\forall r \in \mathbb{N}$, $f^r = a^r p + b^r q$ et $f^{-r} = a^{-r} p + b^{-r} q$.

Par conséquent : $\forall r \in \mathbb{Z}$, $f^r = a^r p + b^r q$.

d) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$; p est un projecteur. De même q est un projecteur.

p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{a-b}(f-be)\right) = \mathrm{Im}(f-be)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{a-b}(f-be)\right)$
$= \mathrm{Ker}(f-be)$.

p est la projection sur $\mathrm{Im}(f-be)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-be)$. De même :

q ——— $\mathrm{Im}(f-ae)$ ——— $\mathrm{Ker}(f-ae)$.

Notons encore que la base de p est $\mathrm{Ker}(p-e) = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{a-b}(f-be-ae+be)\right) = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{a-b}(f-ae)\right) = \mathrm{Ker}(f-ae)$

De même $\mathrm{Ker}(q-e) = \mathrm{Ker}(f-be)$.

Finalement : p (resp. q) est la projection sur $\mathrm{Ker}(f-ae)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f-be)$) parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-be)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f-ae)$).

Q3 a) $F = \mathrm{Vect}(p,q)$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$!

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tq $\alpha p + \beta q = 0 \overset{*}{\Rightarrow} \alpha p \circ p + \beta q \circ p = 0 \circ p = 0$; $\alpha p^2 = 0$; $\alpha p = 0$; $\alpha = 0$ car p n'est pas nul. On a alors $\beta q = 0$ donc $\beta = 0$ car q n'est pas nul.

$\overset{*}{\to}$ en composant à droite par p.

$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$, $\alpha p + \beta q = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

La famille (p,q) est libre ; c'est donc une base de F. $\dim F = 2$.

Soient $g = xp + yq$ et $g' = x'p + y'q$ deux éléments de F.

$g \circ g' = (xp+yq) \circ (x'p + y'q) = xx' p^2 + xy' p \circ q + x'y\, q \circ p + yy' q^2 = xx'p + yy'q$.

donc $\forall (g,g') \in F^2$, $g \circ g' \in F$. F est stable pour $\circ$.

b) Soit $g = xp + yq \in F$. g est un endomorphisme de E. Par conséquent :

g projecteur de $E \Leftrightarrow g^2 = g \underset{\text{voir a)...}}{\Leftrightarrow} x^2 p + y^2 q = xp + yq \underset{(p,q)\text{ libre}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 = x \\ y^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0,1\} \\ \text{et} \\ y \in \{0,1\} \end{cases}$

Il y a donc dans F exactement quatre projecteurs : $1p+1q$, $0p+1q$, $1p+0q$, $0p+0q$.

Les projecteurs de F sont donc e, q, p, $0_{\mathcal{L}(E)}$.

c) Soit $g = xp + yq \in F$. $g \in \mathcal{R}(f) \Leftrightarrow g^2 = f \Leftrightarrow x^2 p + y^2 q = ap + bq \underset{(p,q)\text{ libre}}{\Leftrightarrow} x^2 = a$ et $y^2 = b$

Soit δ_a (resp. δ_b) une racine carrée de a (resp. b). $g \in \mathcal{R}(f) \Leftrightarrow x \in \{-\delta_a, \delta_a\}$ et $y \in \{-\delta_b, \delta_b\}$.

Envisageons trois cas..

<u>1er cas</u>.. $a \neq 0$ et $b \neq 0$. $R(f) \cap F$ contient alors 4 éléments :

$-S_a p - S_b q$, $-S_a p + S_b q$, $S_a p - S_b q$, $S_a p + S_b q$.

<u>2ème cas</u>.. $a = 0$ et $b \neq 0$ $R(f) \cap F$ contient alors 2 éléments : $-S_b q$ et $S_b q$.

<u>3ème cas</u>.. $a \neq 0$ et $b = 0$ $R(f) \cap F$ contient alors 2 éléments : $-S_a p$ et $S_a p$.

Q4 a) $J^2 = 3J$ et une récurrence immédiate donne : $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $J^r = 3^{r-1} J$.

b) $A = I_3 + J$. I_3 et J commutent donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $A^r = \sum_{\ell=0}^{r} C_r^\ell I_3^{r-\ell} J^\ell$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$

$$A^r = I_3 + \sum_{\ell=1}^{r} C_r^\ell 3^{\ell-1} J = I_3 + \frac{1}{3}\sum_{\ell=1}^{r} C_r^\ell 3^\ell J = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{\ell=0}^{r} C_r^\ell 3^\ell - 1\right) J$$

$$A^r = I_3 + \frac{1}{3}\left[(3+1)^r - 1\right] J$$

$\forall r \in \mathbb{N}^*$, $A^r = I_3 + \frac{1}{3}(4^r - 1) J$. Mieux : $\forall r \in \mathbb{N}$, $A^r = I_3 + \frac{1}{3}(4^r - 1) J$!

c) $\forall r \in \mathbb{N}$, $A^r = (I_3 - \frac{1}{3} J) + 4^r \frac{1}{3} J$

$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Posons $a = 1$, $b = 4$, $B = I_3 - \frac{1}{3} J$ et $C = \frac{1}{3} J$.

On a alors $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, $B \in M_3(\mathbb{C})$, $C \in M_3(\mathbb{C})$ et $\forall r \in \mathbb{N}$, $A^r = a^r B + b^r C$.

d) Notons f, p, q les endomorphismes de $\mathbb{C}^3$ de matrices A, B et C dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

$p \neq 0$, $q \neq 0$ et : $e = p + q$, $f = ap + bq$, $f^2 = a^2 p + b^2 q$.

les racines carrées de $a = 1$ sont -1 et 1 ; celles de $b = 4$ sont -2 et 2

Par conséquent $R(f) \cap F = \{-p - 2q, -p + 2q, p - 2q, p + 2q\}$.

<u>$-B - 2C$, $-B + 2C$, $B - 2C$ et $B + 2C$ sont quatre matrices de $M_3(\mathbb{C})$ ayant pour carré A.</u>

<u>Exercice de contrôle</u>.. 1. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2.. Trouver toutes les matrices T de $M_3(\mathbb{C})$ qui commutent avec D.

Trouver toutes les matrices Δ de $M_3(\mathbb{C})$ telles que : $\Delta^2 = D$.

3.. En déduire l'ensemble des éléments $M \in M_3(\mathbb{C})$ tels que $M^2 = A$.

... $\widehat{F_1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. $\widehat{F_4} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

PARTIE II

Q1 Soit $P=\sum_{r=0}^{q} a_r X^r$ un élément de $\mathbb{C}[X]$.

$$P(f)=\sum_{r=0}^{q} a_r f^r=\sum_{r=0}^{q} a_r \sum_{k=1}^{n} x_k^r p_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{q} a_r x_k^r\right) p_k=\sum_{k=1}^{n} P(x_k)\, p_k .$$

$$\underline{\underline{P(f)=\sum_{k=1}^{n} P(x_k)\, p_k}} .$$

Q2 a) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Les zéros de U sont $x_1,x_2,\dots,x_n$; les zéros de U_i sont donc $x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$. Comme $L_i=\frac{1}{U_i(x_i)}U_i$, les zéros de L_i sont ceux de U_i.

Par conséquent $\forall j\in[\![1,n]\!]-\{i\}$, $L_i(x_j)=0$. De plus $L_i(x_i)=\frac{1}{U_i(x_i)}U_i(x_i)=1$

Finalement : $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $L_i(x_j)=\begin{cases}0 \text{ si } j\neq i\\ 1 \text{ si } j=i\end{cases}$.

<u>Remarque</u>.. On retrouve une fois encore les polynômes d'interpolation de Lagrange.

b) D'après Q1.. $U(f)=\sum_{k=1}^{n} U(x_k)\, p_k=\sum_{k=1}^{n} 0\, p_k=0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>$U(f)$ est l'endomorphisme nul.</u> En particulier : <u>$\mathrm{Spec}\, f\subset\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$</u>

c) Soit $i\in[\![1,n]\!]$, $L_i(f)=\sum_{k=1}^{n} L_i(x_k)\, p_k=p_i$ car $L_i(x_k)=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq i\\ 1 \text{ si } k=i\end{cases}$

$$\underline{\underline{\forall i\in[\![1,n]\!],\ L_i(f)=p_i}} .$$

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $p_j\circ p_i=L_j(f)\circ L_i(f)=(L_jL_i)(f)=\sum_{k=1}^{n} L_j(x_k)L_i(x_k)\, p_k$

Supposons $i\neq j$; alors $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $k\neq i$ ou $k\neq j$; $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $L_j(x_k)L_i(x_k)=0$; $p_j\circ p_i=0_{\mathcal{L}(E)}$

Supposons $i=j$; $p_j\circ p_i=p_i\circ p_i=\sum_{k=1}^{n}(L_i(x_k))^2 p_k=p_i$ car $L_i(x_k)=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq i\\ 1 \text{ si } k=i\end{cases}$

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ p_j\circ p_i=\begin{cases}0_{\mathcal{L}(E)} & \text{si } j\neq i\\ p_i & \text{si } j=i\end{cases}}}$

<u>Remarque</u>.. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, p_i est un projecteur ; p_i est la projection sur $\mathrm{Im}\, p_i=\mathrm{Ker}(p_i-e)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p_i$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$, $(f-x_ie)\circ p_i=(X-x_i)(f)\circ L_i(f)=((X-x_i)L_i)(f)\overset{U=(X-x_i)U_i}{=}\left(\frac{1}{U_i(x_i)}U\right)(f)$

$(f-x_ie)\circ p_i=[U_i(x_i)]^{-1}U(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$

$$\underline{\underline{\forall i\in[\![1,n]\!],\ (f-x_ie)\circ p_i=0_{\mathcal{L}(E)}}} .$$

(Q3) a) Soit $i\in [\![1,n]\!]$. $(f-x_i e)\circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$; $\forall x\in E$, $(f-x_i e)(p_i(x)) = 0_E$

donc $\forall y\in \operatorname{Im} p_i$, $(f-x_i e)(y)=0$; $\forall y\in \operatorname{Im} p_i$, $y\in \operatorname{Ker}(f-x_i e) = F_i$.

Par conséquent $\underline{\operatorname{Im} p_i \subset F_i}$.

p_i n'est pas l'endomorphisme nul donc $\operatorname{Im} p_i \neq \{0_E\}$; par conséquent $\operatorname{Ker}(f-x_i e) = F_i \neq \{0_E\}$

x_i est valeur propre de f.

Donc $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \operatorname{Spec} f$. On nous avions vu que : $\operatorname{Spec} f \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Finalement $\operatorname{Spec} f = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

b) Pour $r=0$ (1) donne : $e = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

Soit $x\in E$. $x = e(x) = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_n(x) \in \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2 + \dots + \operatorname{Im} p_n$

donc $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2 + \dots + \operatorname{Im} p_n$ $(\subset E\,!)$

$\forall i\in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{Im} p_i \subset F_i$; $E\subset \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2 + \dots + \operatorname{Im} p_n \subset F_1 + F_2 + \dots + F_n$.

Donc $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2 + \dots + \operatorname{Im} p_n \subset F_1 + F_2 + \dots + F_n \subset E$

Clairement alors : $E = \operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2 + \dots + \operatorname{Im} p_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n$

donc $E = F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$

↑ $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont les sous-espaces propres de f.

Par conséquent f est diagonalisable.

$\operatorname{Im} p_i \subset F_i$ pour tout $i\in [\![1,n]\!]$; comme $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont en somme directe il en est de même pour $\operatorname{Im} p_1, \operatorname{Im} p_2, \dots, \operatorname{Im} p_n$.

Supposons que : $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{Im} p_{i_0} \subsetneq F_{i_0}$; alors $\dim \operatorname{Im} p_{i_0} < \dim F_{i_0}$

$\dim E = \dim(\operatorname{Im} p_1 + \dots + \operatorname{Im} p_n) \underset{\uparrow}{=} \dim \operatorname{Im} p_1 + \dots + \dim \operatorname{Im} p_n \underline{<} \dim F_1 + \dots + \dim F_n = \dim E$!

la somme est directe

Par conséquent : $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{Im} p_i = F_i$.

Exercice. Retrouver ce résultat sans considération de dimension.

Soit $i\in [\![1,n]\!]$, p_i est la projection sur $\operatorname{Im} p_i = F_i$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p_i$

Il reste plus qu'à prouver que $\operatorname{Ker} p_i = G_i = \bigoplus_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} F_k$

Soit $k\in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $\forall x\in F_k$, $p_i(x) = p_i(p_k(x)) = (p_i\circ p_k)(x) \overset{\downarrow}{=} 0_E$; $F_k \subset \operatorname{Ker} p_i$

$p_i\circ p_k = 0_{\mathcal{L}(E)}$

↑ p_k est une projection sur F_k donc $p_k(x) = x$ car $x\in F_k$.

Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $F_\ell \subset \operatorname{Ker} p_i$; $\displaystyle\bigoplus_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n} F_\ell \subset \operatorname{Ker} p_i$; $G_i \subset \operatorname{Ker} p_i$

Réciproquement soit $x \in \operatorname{Ker} p_i$. $x = e(x) = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_{i-1}(x) + 0_E + p_{i+1}(x) + \dots + p_n(x)$

$x = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_{i-1}(x) + p_{i+1}(x) + \dots + p_n(x)$

donc $x \in \displaystyle\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n} \operatorname{Im} p_\ell = \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n} F_\ell = \bigoplus_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n} F_\ell = G_i$; $\operatorname{Ker} p_i \subset G_i$

Finalement : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\operatorname{Ker} p_i = G_i$

Exercice.. Retrouver ce résultat avec des considérations de dimensions.

Q4 a) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que : $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n = 0_{\mathcal{L}(E)}$; $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell p_\ell = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\underbrace{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell p_\ell \circ p_i}$ $= 0_{\mathcal{L}(E)} \circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (on a composé à droite par p_i l'égalité)

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i p_i \circ p_i = 0_{\mathcal{L}(E)}$; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0_{\mathcal{L}(E)} = \alpha_i p_i \circ p_i = \alpha_i p_i$

Comme $p_1, p_2, \dots, p_n$ ne sont pas nuls : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i = 0$.

ceci achève de prouver que $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est libre.

Par conséquent $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est une famille libre et génératrice de F.

$(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est une base de F. $\dim F = n$.

b) Soit $g \in F$. $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $g = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell p_\ell$

$$g^2 = \Big(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell p_\ell\Big)^2 = \Big(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell p_\ell\Big) \circ \Big(\sum_{\ell'=1}^{n} \alpha_{\ell'} p_{\ell'}\Big) = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{\ell'=1}^{n} \alpha_\ell \alpha_{\ell'} p_\ell \circ p_{\ell'}$$

$$g^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \alpha_\ell p_\ell \circ p_\ell \quad (p_\ell \circ p_{\ell'} = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ si } \ell' \neq \ell \text{ ; } p_\ell \circ p_{\ell'} = p_\ell \text{ si } \ell' = \ell).$$

$$g^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2 p_\ell .$$

$(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est libre.

$$g \in R(f) \Leftrightarrow g^2 = f \Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2 p_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell p_\ell \Leftrightarrow \forall \ell \in [\![1,n]\!],\ \alpha_\ell^2 = x_\ell$$

1er cas.. $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $x_\ell \neq 0$; pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, x_ℓ possède deux racines carrées distinctes S_ℓ et $-S_\ell$

$$g \in R(f) \Leftrightarrow \exists (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n,\ g = \sum_{\ell=1}^{n} \varepsilon_\ell S_\ell p_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \varepsilon_\ell S_\ell p_\ell \ (\text{ok?})$$

Il y a autant d'éléments dans $R(f) \cap F$ que d'éléments dans $\{-1,1\}^n$!

donc $\operatorname{card}(R(f) \cap F) = 2^n$.

2ème cas. $\exists l_0 \in [\![1,n]\!]$, $x_{l_0}=0$. $x_1, x_2, \dots, x_{l_0-1}, x_{l_0+1}, \dots, x_n$ sont alors non nuls et possèdent deux racines carrées distinctes.

Notons δ_k et $-\delta_k$ les deux racines carrées de x_k pour tout $k \in [\![1,n]\!]-\{l_0\}$.

$g \in R(f) \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \alpha_k^2 = x_k \Leftrightarrow \alpha_{l_0}=0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]-\{l_0\}, \alpha_k \in \{-\delta_k, \delta_k\}$

Il y a donc 2^{n-1} éléments dans $R(f)\cap F$.

c) Soit $g=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k$ un élément de F. $g \in \mathcal{L}(E)$, par conséquent g est un projecteur si et seulement si $g\circ g = g$.

$g\circ g = g \Leftrightarrow g^2 = g \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k \underset{(p_1,p_2,\dots,p_n) \text{ est libre}}{\Leftrightarrow} \forall k \in [\![1,n]\!], \alpha_k^2=\alpha_k \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \alpha_k = 0$ ou 1

$g\circ g = g \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \alpha_k \in \{0,1\} \Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n$.

Il y a donc autant de projecteurs dans F que d'éléments dans $\{0,1\}^n$.

F contient exactement 2^n projecteurs.

Q5 Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons H_i le sous-espace propre de h associé à la valeur propre x_i : $H_i = \mathrm{Ker}(f - x_i e)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. $E = \bigoplus_{k=1}^{n} H_k = H_i \oplus \left(\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} H_k\right)$

Posons $\hat{H}_i = \bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} H_k$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, H_i et $\hat{H}_i$ sont supplémentaires. Notons q_i la projection sur H_i parallèlement à $\hat{H}_i$ (pour tout $i \in [\![1,n]\!]$).

Montrons alors que : $\forall r \in \mathbb{N}$, $h^r = x_1^r q_1 + x_2^r q_2 + \dots + x_n^r q_n$.

Fixons r dans $\mathbb{N}$ et u dans E.

$\exists! (u_1, u_2, \dots, u_n) \in H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$, $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $u_i \in H_i = \mathrm{Ker}(h - x_i e)$; $h(u_i) = x_i u_i$ donc $h^r(u_i) = x_i^r u_i$ (récurrence immédiate)

De plus $u = u_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} u_k$ où $u_i \in H_i$ et $\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} u_k \in \hat{H}_i$ donc $q_i(u) = u_i$;

Résumons : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $h^r(u_i) = x_i^r u_i$ et $q_i(u) = u_i$.

Donc $h^r(u) = \sum_{i=1}^{n} h^r(u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r u_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^r q_i(u) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^r q_i\right)(u)$ ceci pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $u \in E$.

Donc $\forall r \in \mathbb{N}$, $h^r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r q_i$. Ne reste plus qu'à dire que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $q_i \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ceci est clair car $\mathrm{Im}\, q_i = H_i \neq \{0_E\}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Q6 a) $\boxed{n=N}$ $\dim E = N$ et f a N valeurs propres distinctes $x_1, x_2, \dots, x_N$ donc les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont des droites vectorielles.

$F_1, F_2, \dots, F_N$ sont des droites vectorielles.

$\forall i \in [\![1,N]\!]$, $e_i \in F_i - \{0_E\}$. Donc $e_1, e_2, \dots, e_N$ sont N vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes ; $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ est alors une famille libre de E qui est de dimension N.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_N)$ est alors une base de E car $\dim E = N$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_N)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f.

b) $g \in \mathcal{L}(E)$ et $g \circ f = f \circ g$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $f(e_i) = x_i e_i$ car $e_i \in F_i$

$g(f(e_i)) = f(g(e_i))$ donne $f(g(e_i)) = g(x_i e_i) = x_i g(e_i)$; $g(e_i) \in F_i$

F_i est une droite vectorielle et e_i un vecteur non nul de F_i ; $F_i = \mathrm{Vect}(e_i)$.

Donc $g(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_i)$; $\exists \mu_i \in \mathbb{C}$, $g(e_i) = \mu_i e_i$.

$\forall i \in [\![1,N]\!]$, $\exists \mu_i \in \mathbb{C}$, $g(e_i) = \mu_i e_i$.

Montrons que $g = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_n p_n$. g et $\sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k$ étant deux endomorphismes de E pour montrer qu'ils sont égaux montrons qu'ils coïncident sur $\mathcal{B}$.

Montrons alors que : $\forall i \in [\![1,N]\!]$, $g(e_i) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k p_k(e_i)$

Soit $i \in [\![1,N]\!]$ et $k \in [\![1,N]\!]$.

si $k \neq i$ $p_k(e_i) = 0$ car $e_i \in \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} F_j = G_k = \mathrm{Ker}\, p_k$. Si $k = i$, $p_k(e_i) = p_i(e_i) = e_i$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k(e_i) = \mu_i p_i(e_i) = \mu_i e_i = g(e_i)$.

Ceci achève de montrer que : $g = \sum_{k=1}^{N} \mu_k p_k$ et donc que $g \in F$.

c) Soit $g \in R(f)$. $g \circ f = f^2 \circ f = f^3 = f \circ f^2 = f \circ g$; g commute avec f donc $g \in F$.

Par conséquent $R(f) \subset F$ et donc $R(f) = R(f) \cap F$.

Notons alors que $R(f)$ a 2^N éléments si aucun des x_i n'est nul et 2^{N-1} éléments si l'un des x_i est nul.

Q7 a) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A-\lambda I_3$.

$$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda&1&-1\\1&-\lambda&-1\\-1&1&-\lambda\end{pmatrix};\ \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\begin{pmatrix}-1&1&-\lambda\\1&-\lambda&-1\\-\lambda&1&-1\end{pmatrix}};\ \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\lambda L_1}}{\begin{pmatrix}-1&1&-\lambda\\0&1-\lambda&-1-\lambda\\0&-\lambda+1&\lambda^2-1\end{pmatrix}};\ \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\begin{pmatrix}-1&1&-\lambda\\0&1-\lambda&-1-\lambda\\0&0&\lambda^2+\lambda\end{pmatrix}}$$
... est une réduite de Gauss de $A-\lambda I_3$.

$\lambda\in\operatorname{Spec}A \iff A-\lambda I_3$ non inversible $\iff \begin{pmatrix}-1&1&-\lambda\\0&1-\lambda&-1-\lambda\\0&0&\lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$ non inversible $\iff 1-\lambda=0$ ou $\lambda^2+\lambda=0 \iff \lambda\in\{-1,0,1\}$

$\underline{\operatorname{Spec}A=\{-1,0,1\}}$. Nous posons $x_1=-1$, $x_2=0$ et $x_3=1$.

$U=(X+1)X(X-1)$; $U_1=X(X-1)$ et $U_1(x_1)=2$; $U_2=(X+1)(X-1)$ et $U_2(x_2)=-1$; $U_3=(X+1)X$ et $U_3(x_3)=2$.

$\underline{L_1=\frac{1}{2}X(X-1)=\frac{1}{2}(X^2-X)\ ;\ L_2=-X^2+1\ ;\ L_3=\frac{1}{2}(X^2+X).}$

$A_1=L_1(A)=\frac{1}{2}(A^2-A)$, $A_2=L_2(A)=-A^2+I_3$, $A_3=L_3(A)=\frac{1}{2}(A^2+A)$.

Notons que $A^2=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. Il vient alors $\underline{A_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}}$.

Soit ℓ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est A.
$\operatorname{Spec}\ell=\{x_1,x_2,x_3\}$. Posons $\forall i\in[\![1,3]\!]$, $H_i=\operatorname{Ker}(\ell-x_ie)$ et $\widehat{H}_i=\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3}H_k$
Pour tout $i\in[\![1,3]\!]$, notons q_i la projection sur H_i // à $\widehat{H}_i$.

1°.. $n=N=3$.

2.. $\forall i\in[\![1,3]\!]$, $q_i\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

3.. $\forall r\in\mathbb{N}$, $\ell^r=\sum_{k=1}^{3}x_k^r q_k$

4.. $\forall i\in[\![1,3]\!]$, $q_i=L_i(\ell)$; $\forall i\in[\![1,3]\!]$, A_i est la matrice de q_i dans la base canonique.

5.. $R(\ell)=R(\ell)\cap\operatorname{Vect}(q_1,q_2,q_3)$ $(N=n=3)$

6.. $g\in R(\ell)=R(\ell)\cap F \iff \exists(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{C}^3$, $g=\alpha_1q_1+\alpha_2q_2+\alpha_3q_3$ avec $\begin{cases}\alpha_1^2=x_1=-1=i^2\\\alpha_2^2=x_2=0\\\alpha_3^2=x_3=1=1^2\end{cases}$

donc $R(\ell)=\{iq_1+q_3,\ iq_1-q_3,\ -iq_1+q_3,\ -iq_1-q_3\}$

donc $\underline{\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\mid M^2=A\}=\{iA_1+A_3,\ iA_1-A_3,\ iA_1+A_3,\ -iA_1-A_3\}}$

PARTIE III

(Q1) a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\exists x \in E$, $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Montrons que $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \alpha_2 u^2(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E$.

Montrons par une récurrence finie que : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_i = 0$.

. $0_E = u^{n-1}(0_E) = u^{n-1}(\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \alpha_2 u^2(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x))$

$0_E = \alpha_0 u^{n-1}(x) + \alpha_1 u^n(x) + \alpha_2 u^{n+1}(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{2n-2}(x) = \alpha_0 u^{n-1}(x)$ $\quad (u^l(x) = 0_E$ pour $l \geq n)$

donc $\alpha_0 = 0$ car $u^{n-1}(x) \neq 0_E$

. Supposons $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_i = 0$ pour $i \in [\![0, n-2]\!]$ et montrons que $\alpha_{i+1} = 0$

$\alpha_{i+1} u^{i+1}(x) + \alpha_{i+2} u^{i+2}(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E$. Composons par u^{n-2-i} ;

$\alpha_{i+1} u^{n-1}(x) + \alpha_{i+2} u^n(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{2n-3-i}(x) = 0_E$; or $u^l(x) = 0_E$ pour $l \geq n$ donc :

$\alpha_{i+1} u^{n-1}(x) = 0_E$; $\alpha_{i+1} = 0$ car $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. ceci achève la récurrence.

Par conséquent la famille $\underline{(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)) \text{ est libre}}$. Notons que nécessairement $\underline{n \leq N}$.

b) $P \in \mathbb{C}[X]$. $\exists! (\varphi, R) \in \mathbb{C}[X]^2$, $P = \varphi X^n + R$ avec $\deg R < n$.

→ Supposons que X^n divise P. $R = 0$. $P = \varphi X^n$. $P(u) = (\varphi X^n)(u) = \varphi(u) \circ u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$

→ Réciproquement supposons que : $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $0_{\mathcal{L}(E)} = P(u) = \varphi(u) \circ u^n + R(u) = R(u)$.

$R = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l X^l$ car $\deg R < n$. $R(u) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l u^l = 0_{\mathcal{L}(E)}$

En particulier $R(u)(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l u^l(x) = 0_E$. Comme $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$; $R = 0$. $P = \varphi X^n$. X^n divise P.

Par conséquent : $\underline{\underline{P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow X^n \text{ divise } P}}$.

c) Supposons $R(u) \neq \emptyset$. $\exists v \in \mathcal{L}(E)$, $v^2 = u$.

$v^{2n} = u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $v^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

ou $\underline{v^{2n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}}$; comme $v^{2n} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ il vient $2n \leq N$ (fin de a))

ou $\underline{v^{2n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}}$; comme $v^{2n-2} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ il vient $2n-1 \leq N$ (fin de a))

Dans les deux cas : $\underline{\underline{n \leq \frac{N+1}{2}}}$.

Q2 a) $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

Posons : $a_0=1$, $a_1=\frac{1}{2}$ et $\forall \ell\in[\![2,n]\!]$, $a_\ell=\frac{1}{\ell!}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-\ell+1)=\frac{1}{\ell!}\left(\frac{1}{2}\right)^\ell(-1)^{\ell-1}\prod_{i=1}^{\ell-1}(2i-1)$

Alors $\sqrt{1+x}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+o(x^n)$. Notons que $a_0=1$.

b) $P_n=\sum_{\ell=0}^{n-1}a_\ell X^\ell$. $\sqrt{1+x}=P_n(x)+a_nx^n+o(x^n)$. Notons que $P_n(0)=a_0=1$.

$\sqrt{1+x}=P_n(x)+a_nx^n+x^n\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to0}\varepsilon(x)=0$. Elevons au carré :

$1+x=(P_n(x))^2+a_n^2x^{2n}+x^{2n}(\varepsilon(x))^2+2a_nx^nP_n(x)+2x^n\varepsilon(x)P_n(x)+2a_nx^{2n}\varepsilon(x)$.

$\frac{1+x-(P_n(x))^2}{x^n}=a_n^2x^n+x^n(\varepsilon(x))^2+2a_nP_n(x)+2\varepsilon(x)P_n(x)+2a_nx^n\varepsilon(x)$.

Donc $\lim_{x\to0}\frac{1+x-(P_n(x))^2}{x^n}=2a_nP_n(0)$; $\lim_{x\to0}\frac{(P_n(x))^2-x-1}{x^n}=-2a_nP_n(0)=-2a_n$.

Par conséquent $x\longmapsto\frac{P_n^2(x)-x-1}{x^n}$ admet une limite finie en 0.

$P_n^2-X-1=\hat{Q}X^n+\hat{R}$ avec $\hat{Q}\in\mathbb{C}[X]$, $\hat{R}\in\mathbb{C}[X]$ et $\deg\hat{R}<n$ (division euclidienne de P_n^2-X-1 par X^n).

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{P_n^2(x)-x-1}{x^n}-\hat{Q}(x)=\frac{\hat{R}(x)}{x^n}$, donc $x\mapsto\frac{\hat{R}(x)}{x^n}$ admet une limite finie en 0. Supposons $\hat{R}=\sum_{\ell=0}^{n-1}\beta_\ell X^\ell\neq0$. Soit $i=\min\{k\in[\![0,n-1]\!]\mid\beta_k\neq0\}$

$\hat{R}(x)=\sum_{\ell=i}^{n-1}\beta_\ell x^\ell\underset{0}{\sim}\beta_ix^i$; $\frac{\hat{R}(x)}{x^n}\underset{0}{\sim}\beta_i\frac{x^i}{x^n}=\beta_i\frac{1}{x^{n-i}}$; $\left|\frac{\hat{R}(x)}{x^n}\right|\underset{0}{\sim}\frac{|\beta_i|}{|x|^{n-i}}$

Or $\lim_{x\to0}\frac{|\beta_i|}{|x|^{n-i}}=+\infty$ car $i<n$ et $\beta_i\neq0$.

ce qui donne : $\lim_{x\to0}\left|\frac{\hat{R}(x)}{x^n}\right|=+\infty$!! Donc $\hat{R}=0$

Finalement X^n divise P_n^2-X-1.

Q3) a) X^n divise $P_n^2 - X - 1$ donc $\exists T \in \mathbb{C}[X]$, $P_n^2 - X - 1 = T(X^n)$.

donc $P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - \frac{X}{\omega^2} - 1 = T\left(\frac{X}{\omega^2}\right)\left(\frac{X}{\omega^2}\right)^n$;

$$\omega^2 P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - X - \omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega^{2n}} T\left(\frac{X}{\omega^2}\right) X^n = \frac{1}{\omega^{2n-2}} T\left(\frac{X}{\omega^2}\right) X^n$$

Donc X^n divise $\omega^2 P_n^2\left(\frac{X}{\omega^2}\right) - X - \omega^2 = (Q_{n,\omega})^2 - X - \omega^2$ car $\frac{1}{\omega^{2n-2}} T\left(\frac{X}{\omega^2}\right) \in \mathbb{C}[X]$

De plus $Q_{n,\omega} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ car $P_n \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Par conséquent $\underline{Q_{n,\omega} \in S}$. De même $\underline{-Q_{n,\omega} \in S}$. Donc $\underline{\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\} \subset S}$.

b) Soient φ_1 et φ_2 deux éléments de S

X^n divise $\varphi_1^2 - X - \omega^2$ et $\varphi_2^2 - X - \omega^2$ donc $\underline{X^n \text{ divise}}$ $(\varphi_1^2 - X - \omega^2) - (\varphi_2^2 - X - \omega^2) = \underline{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}$

En particulier $(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)(0) = 0$ (0 est racine de $\varphi_1^2 - \varphi_2^2$ d'ordre au moins n !)

donc $\varphi_1^2(0) = \varphi_2^2(0)$; $\varphi_1(0) = \pm \varphi_2(0)$; $(\varphi_1 - \varphi_2)(0) = 0$ ou $(\varphi_1 + \varphi_2)(0) = 0$.

Notons que l'on ne peut avoir $(\varphi_1 - \varphi_2)(0) = (\varphi_1 + \varphi_2)(0) = 0$.

Supposons que cela ait lieu ; $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.

Or $\exists T \in \mathbb{C}[X]$, $\varphi_1^2 - X - \omega^2 = X^n T$; donc $\varphi_1^2(0) - 0 - \omega^2 = 0$; alors $\omega^2 = 0$. $\omega = 0$!

Donc ou $[(\varphi_1 - \varphi_2)(0) = 0$ et $(\varphi_1 + \varphi_2)(0) \neq 0]$ ou $[(\varphi_1 + \varphi_2)(0) = 0$ et $(\varphi_1 - \varphi_2)(0) \neq 0]$.

Envisageons le cas : $(\varphi_1 - \varphi_2)(0) = 0$ et $(\varphi_1 + \varphi_2)(0) \neq 0$.

X^n divise $(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_2)$ et 0 n'est pas racine de $\varphi_1 + \varphi_2$ donc X^n divise $\varphi_1 - \varphi_2$.

Or $\deg(\varphi_1 - \varphi_2) \leq n-1$ car $\varphi_1 \in S_n$ et $\varphi_2 \in S_n$.

X^n divise $\varphi_1 - \varphi_2$ et $\deg(\varphi_1 - \varphi_2) \leq n-1$ donnent $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$; $\underline{\varphi_1 = \varphi_2}$.

Un raisonnement analogue prouve que si $(\varphi_1 - \varphi_2)(0) \neq 0$ et $(\varphi_1 + \varphi_2)(0) = 0$: $\varphi_1 = -\varphi_2$

Prouvons maintenant que : $S \subset \{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.

Soit $\varphi \in S$. φ et $Q_{n,\omega}$ étant des éléments de S : $\varphi = Q_{n,\omega}$ ou $\varphi = -Q_{n,\omega}$

Donc $\varphi \in \{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$; $\underline{S \subset \{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}}$.

Finalement : $\underline{S = \{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}}$.

c) X^n divise $\varphi_{n,\omega}^2 - X - \omega^2$ donc $\varphi_{n,\omega}^2(u) - u - \omega^2 e = 0$ (Q1)

Par conséquent $(\varphi_{n,\omega}(u))^2 = u + \omega^2 e$; $\underline{\underline{\varphi_{n,\omega}(u) \in R(u+\omega^2 e)}}$.

Donc $\underline{\underline{R(u+\omega^2 e) \neq \emptyset}}$. Notons que $\underline{\underline{-\varphi_{n,\omega}(u) \in R(u+\omega^2 e)}}$.

(Q4) $n = N$. $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ (avec $x \in E$ et $u^{n-1}(x) \neq 0_E$) est une famille libre de E ayant $n = N = \dim E$ éléments : $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est donc une base de E.

a) $v \in R(u+\omega^2 e)$. $v^2 = u + \omega^2 e$; $u = v^2 - \omega^2 e$.

$u \circ v = (v^2 - \omega^2 e) \circ v = v^3 - \omega^2 v = v \circ (v^2 - \omega^2 e) = v \circ u$; u et v commutent.

b) $v(x) \in E$ et $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E donc :

$\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $v(x) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell u^\ell(x)$. Posons $\underline{P = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell X^\ell}$.

Alors $\underline{\underline{P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ et } v(x) = (P(u))(x)}}$.

$(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ étant une base de E pour montrer que les deux endomorphismes v et $P(u)$ sont égaux il suffit de prouver que : $\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $v(u^\ell(x)) = (P(u))(u^\ell(x))$

Soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$. $(P(u))(u^\ell(x)) = (\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i)(u^\ell(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{i+\ell}(x) = u^\ell((\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i)(x))$

$P(u)(u^\ell(x)) = u^\ell(P(u)(x)) = u^\ell(v(x)) = v(u^\ell(x))$.

u et v commutent donc u^ℓ et v aussi.

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $(P(u))(u^\ell(x)) = v(u^\ell(x))$; $\underline{\underline{v = P(u)}}$.

$v^2 = u + \omega^2 e$; $P^2(u) - u - \omega^2 e = 0$; $(P^2 - X - \omega^2)(u) = 0$; X^n divise $P^2 - X - \omega^2$.

Comme $\deg P \leq n-1$: $P \in S$. $P = \varphi_{n,\omega}$ ou $P = -\varphi_{n,\omega}$.

Donc $v = P(u) = \varphi_{n,\omega}(u)$ ou $v = P(u) = -\varphi_{n,\omega}(u)$.

Par conséquent $R(u+\omega^2 e) \subset \{\varphi_{n,\omega}(u), -\varphi_{n,\omega}(u)\}$. Comme dans Q3 c) nous avons prouvé l'inclusion contraire nous avons : $\underline{\underline{R(u+\omega^2 e) = \{\varphi_{n,\omega}(u), -\varphi_{n,\omega}(u)\}}}$.

(Q5) $A - I = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0 \end{pmatrix}$; $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\4&0&0&0\\0&4&0&0 \end{pmatrix}$; $(A-I)^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\8&0&0&0 \end{pmatrix}$; $(A-I)^4 = 0$.

Donc $A = I + B$ avec $B^3 \neq 0$ et $B^4 = 0$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice A dans la base canonique et u l'endomorphisme de l' de matrice B dans la base canonique. $f = u + 1^2 e$. $u^3 \neq 0$ et $u^4 = 0$

$R(f) = R(u + 1^2 e) = \{ Q_{4,1}(u), -Q_{4,1}(u) \}$.

$$Q_{4,1} = 1\, P_4\left(\frac{X}{1^2}\right) = P_4(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 1 + \frac{1}{2} X + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} X^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} X^3$$

$$Q_{4,1} = 1 + \frac{1}{2} X - \frac{1}{8} X^2 + \frac{1}{16} X^3.$$

Par conséquent $\{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}) \mid M^2 = A\} = \{ I_4 + \frac{1}{2} B - \frac{1}{8} B^2 + \frac{1}{16} B^3, -I_4 - \frac{1}{2} B + \frac{1}{8} B^2 - \frac{1}{16} B^3 \}$

$\{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}) \mid M^2 = A\} = \{T, -T\}$ avec $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Q6 Soit v_0 un élément de $R(u)$. $v_0^2 = u$; $v_0^{2n} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $v_0^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$u^{2n-2} = 0$ car $2n-2 \geq n$.

<u>1er cas</u>. $v_0^{2n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\quad (v_0 + \lambda u^{n-1})^2 = v_0^2 + 2\lambda v_0 \circ u^{n-1} + \lambda^2 u^{2n-2} = v_0^2 + \lambda v_0 \circ v_0^{2n-2} + 0 = v_0^2 = u.$$

v_0 et u^{n-1} commutent car v_0 et u commutent ($v_0^2 = u$) $\qquad v_0^{2n-1} = 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $v_0 + \lambda u^{n-1} \in R(u)$; $R(u)$ contient une infinité d'éléments car $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>2ème cas</u>. $v_0^{2n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

v_0 et $v_0 \circ u^{n-1} = v_0^{2n-1}$ commutent.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\quad (v_0 + \lambda v_0 \circ u^{n-1})^2 = v_0^2 + 2\lambda \underbrace{v_0^2 \circ u^{n-1}}_{u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}} + \lambda^2 \underbrace{v_0^2 \circ u^{2n-2}}_{= u^{2n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}} \quad (2n-1 \geq n)$$

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $v_0 + \lambda v_0 \circ u^{n-1} \in R(u)$.

$R(u)$ contient encore une infinité d'éléments ($v_0 \circ u^{n-1} = v_0^{2n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$).

Dans les deux cas <u>$R(u)$ est infini</u>.

Q7 a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$. $AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & d & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = e \\ d = 0 \\ g = 0 \\ f = 0 \end{cases}$

$\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AM = MA\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & h \\ c & 0 & i \end{pmatrix} ; (a, b, c, h, i) \in \mathbb{C}^5 \right\}$

b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Si $M^2 = A$, A et M commutent.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & h \\ c & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. $M^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab + hc & a^2 & ah + hi \\ ca + ic & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M^2 = A \Leftrightarrow a = i = 0$ et $hc = 1$

$\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid M^2 = A\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1/c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (b, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \right\}$.