PARTIE I

Q1 Soit $x \in [0,1]$. $0 \leq u_n x^n \leq u_n$. La convergence de la série de terme général u_n et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $u_n x^n$ converge.

<u>Pour tout x dans $[0,1]$ la série de terme général $u_n x^n$ converge.</u>

<u>Remarque</u>.. On peut prouver sans difficulté que pour tout $x \in [-1,1]$ la série de terme général $u_n x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Q2 a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [0,1]$.

$$\forall s \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{\ell=0}^{s} u_\ell x^\ell - \sum_{\ell=0}^{s} u_\ell a^\ell\right| = \left|\sum_{\ell=0}^{s} u_\ell (x^\ell - a^\ell)\right| \leq \sum_{\ell=0}^{s} |u_\ell||x^\ell - a^\ell| = \sum_{\ell=0}^{s} u_\ell |x^\ell - a^\ell|$$

$$\forall s \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \left|\sum_{\ell=0}^{s} u_\ell x^\ell - \sum_{\ell=0}^{s} u_\ell a^\ell\right| \leq \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell |x^\ell - a^\ell| + \sum_{\ell=n+1}^{s} u_\ell |x^\ell - a^\ell|$$

Or $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $x^\ell \in [0,1]$ et $a^\ell \in [0,1]$. Ainsi $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $|x^\ell - a^\ell| \leq 1$.

$$\forall s \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \left|\sum_{\ell=0}^{s} u_\ell x^\ell - \sum_{\ell=0}^{s} u_\ell a^\ell\right| \leq \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell |x^\ell - a^\ell| + \sum_{\ell=n+1}^{s} u_\ell .$$

En faisant tendre s vers $+\infty$ on obtient : $\displaystyle |F_u(x) - F_u(a)| \leq \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell |x^\ell - a^\ell| + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} u_\ell$ (toutes les séries sont convergentes).

Ainsi $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |F_u(x) - F_u(a)| \leq \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell |x^\ell - a^\ell| + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} u_\ell .$

b) La série de terme général u_n converge. $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} u_\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} u_\ell .$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} u_\ell\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_\ell - \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell\right) = 0.$$

Alors $\displaystyle \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} u_\ell < \frac{\varepsilon}{2}.$

Il suffit de poser $r = n_0$; $\displaystyle \sum_{\ell=r+1}^{+\infty} u_\ell < \frac{\varepsilon}{2}.$

Finalement il existe un élément r de $\mathbb{N}$ tel que $\displaystyle \sum_{\ell=r+1}^{+\infty} u_\ell < \frac{\varepsilon}{2}.$

Nous avons fixé ε dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour prouver la continuité de F_u en a il convient alors de trouver η dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in [0,1]$, $|x-a|<\eta \Rightarrow |F_u(x)-F_u(a)|<\varepsilon$.

$\forall x \in [0,1]$, $|F_u(x)-F_u(a)| \leq \sum_{\ell=0}^{r} u_\ell |x^\ell - a^\ell| + \sum_{\ell=r+1}^{+\infty} u_\ell < \sum_{\ell=0}^{r} u_\ell |x^\ell - a^\ell| + \frac{\varepsilon}{2}$.

De plus $\lim_{x \to a} \left(\sum_{\ell=0}^{r} u_\ell |x^\ell - a^\ell| \right) = 0$.

Alors on peut trouver η dans $\mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [0,1], |x-a|<\eta \Rightarrow \sum_{\ell=0}^{r} u_\ell |x^\ell - a^\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

donc $\forall x \in [0,1]$, $|x-a|<\eta \Rightarrow |F_u(x)-F_u(a)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Finalement : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [0,1], |x-a|<\eta \Rightarrow |F_u(x)-F_u(a)|<\varepsilon$. F_u est continue en a

Q3 a) Soit $x \in [0,1[$.

$G_u(x) = \frac{1}{x-1}\left(F_u(x)-F_u(1)\right) = \frac{1}{x-1}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_\ell (x^\ell - 1)\right) = \frac{1}{x-1} \sum_{\underline{\underline{\ell=1}}}^{+\infty} u_\ell (x^\ell - 1) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell (1+x+\dots+x^{\ell-1})$.

$(x^\ell - 1) = (x-1)(x^{\ell-1}+x^{\ell-2}+\dots+x+1)$

$\forall x \in [0,1[$, $G_u(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell (1+x+\dots+x^{\ell-1})$.

Soit $(x,y) \in [0,1[^2$ tel que $x \leq y$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $u_\ell(1+x+\dots+x^{\ell-1}) \leq u_\ell(1+y+\dots+y^{\ell-1})$ ($u_\ell \geq 0$ et $x^i \leq y^i$ pour $i \in [\![0,\ell-1]\!]$).

Alors $G_u(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(1+x+\dots+x^{\ell-1}) \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(1+y+\dots+y^{\ell-1}) = G_u(y)$.

$\forall (x,y) \in [0,1[^2, x \leq y \Rightarrow G_u(x) \leq G_u(y)$. G_u est croissante sur $[0,1[$.

Soit $x \in [0,1[$.

b) $\forall s \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{\ell=1}^{s} u_\ell (1+x+\dots+x^{\ell-1}) \leq \sum_{\ell=1}^{s} u_\ell (1+1+\dots+1) = \sum_{\ell=1}^{s} \ell u_\ell \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell u_\ell$.

En faisant tendre s vers $+\infty$ il vient $G_u(x) \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell u_\ell$.

$\forall x \in [0,1[$, $G_u(x) \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell u_\ell$; G_u est majorée sur $[0,1[$.

G_u est croissante et majorée sur $[0,1[$ donc G_u admet une limite finie en 1.

Ainsi $x \mapsto \frac{F_u(x)-F_u(1)}{x-1}$ admet une limite finie en 1 ; F_u est dérivable en 1.

$\forall x \in [0,1[,\ G_n(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$; $\lim_{x \mapsto 1} G_n(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$; $\underline{F_u'(1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k}$

c) $\forall x \in [0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad u_k(1+x+\dots+x^{k-1}) \geq 0.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1[,\quad \underline{G_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(1+x+\dots+x^{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{n} u_k(1+x+\dots+x^{k-1})}$

En faisant tendre x vers 1 il vient : $\lim_{x \mapsto 1} G_n(x) = F_u'(1) \geq \sum_{k=1}^{n} u_k(1+1+\dots+1)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k u_k \leq F_u'(1).$

Mieux $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k u_k \leq F_u'(1)$ non ?

La série de terme général $k u_k$ est à termes positifs et la suite $(\sum_{k=0}^{n} k u_k)_{n \geq 0}$ de ses sommes partielles est majorée par $F_u'(1)$.

Alors $\underline{\text{la série de terme général } k u_k \text{ est convergente}}$ et $\underline{\sum_{k=0\text{ ou }1}^{+\infty} k u_k \leq F_u'(1)}$.

d) b) et c) montrent alors que :

1°) $\underline{F_u \text{ est dérivable en 1 si et seulement la série de terme général } k u_k \text{ converge}}$.

2°) $\underline{\text{Si } F_u \text{ est dérivable en 1 ou si la série de terme général } k u_k \text{ converge :}}$

$$\underline{F_u'(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k}$$

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$.

$$\forall \Delta \in [\![n+1,+\infty[\![,\quad 0 \leq \sum_{k=n+1}^{\Delta} u_k x^k \underset{x \in [0,1]}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\Delta} u_k x^{n+1} \leq x^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\Delta} u_k .$$

En faisant tendre Δ vers $+\infty$ on obtient : $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k \leq x^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k .$

Alors $\forall x \in]0,1],\ 0 \leq \dfrac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k}{x^n} \leq x \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Par encadrement on obtient alors $\lim_{x \mapsto 0} \dfrac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k}{x^n} = 0$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} u_\ell x^\ell = O(x^n)$ au voisinage de 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell x^\ell$ est une fonction polynômiale de degré au plus n et

$F_u(x) = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell x^\ell + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} u_\ell x^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell x^\ell + O(x^{n+1})$ au voisinage de 0.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_u admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell x^\ell$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell x^\ell$ (resp. $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n} v_\ell x^\ell$) est la partie régulière du développement limité de F_u (resp. F_v) à l'ordre n au voisinage de 0.
Supposons $F_u = F_v$. Alors les deux fonctions polynômes $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell x^\ell$ et $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n} v_\ell x^\ell$ coïncident (unicité de la partie régulière d'un dl_n).
Ainsi $\forall \ell \in [\![0,n]\!], u_\ell = v_\ell$; en particulier $u_n = v_n$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.
alors $u = v$.

$u \in E, v \in E, F_u = F_v \Rightarrow u = v$.

Q5) a) Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{\ell=0}^{n} w_\ell x^\ell = \sum_{\ell=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\ell} u_i v_{\ell-i} x^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{i=0}^{\ell}(u_i x^i)(v_{\ell-i} x^{\ell-i}) = \sum_{i=0}^{n}\left(u_i x^i\left(\sum_{\ell=i}^{n} v_{\ell-i} x^{\ell-i}\right)\right)$$

$$\sum_{\ell=0}^{n} w_\ell x^\ell = \sum_{i=0}^{n}\left(u_i x^i\left(\sum_{j=0}^{n-i} v_j x^j\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ x\in[0,1],\, u_i\geq 0,\, v_j\geq 0}}{\leq} \sum_{i=0}^{n}\left(u_i x^i\left(\sum_{j=0}^{n} v_j x^j\right)\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} u_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j x^j\right)$$

Alors $\sum_{\ell=0}^{n} w_\ell x^\ell \leq \left(\sum_{i=0}^{n} u_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j x^j\right)$.

$$\sum_{\ell=0}^{2n} w_\ell x^\ell = \sum_{\ell=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{\ell} u_i v_{\ell-i} x^i x^{\ell-i}\right) = \sum_{i=0}^{2n}\left(u_i x^i\left(\sum_{\ell=i}^{2n} v_{\ell-i} x^{\ell-i}\right)\right)$$

$$\sum_{\ell=0}^{2n} w_\ell x^\ell = \sum_{i=0}^{2n}\left(u_i x^i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} v_j x^j\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ u_i\geq 0,\, v_j\geq 0,\, x\geq 0}}{\geq} \sum_{i=0}^{n}\left(u_i x^i\left(\sum_{j=0}^{2n-i} v_j x^j\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ 2n-i\geq n}}{\geq} \sum_{i=0}^{n}\left(u_i x^i\left(\sum_{j=0}^{n} v_j x^j\right)\right)$$

$$\sum_{\ell=0}^{2n} w_\ell x^\ell \geq \sum_{i=0}^{n} \left(u_i x^i \left(\sum_{j=0}^{n} v_j x^j\right)\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} u_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j x^j\right)$$

Finalement $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} w_\ell x^\ell \leq \left(\sum_{i=0}^{n} u_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j x^j\right) \leq \sum_{\ell=0}^{2n} w_\ell x^\ell$

b) $\forall k \in \mathbb{N}, \; w_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} \geq 0$ car u et v sont dans E.

$\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} w_\ell \leq \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} v_j$

$\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} w_\ell \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} v_j$.

La série de terme général w_k est à termes positifs et la suite $\left(\sum_{\ell=0}^{n} w_\ell\right)_{n\geq 0}$ de ses sommes partielles est majorée. Ainsi la série de terme général w_ℓ est convergente. Ceci achève de prouver que w est un élément de E.

$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} w_\ell x^\ell \leq \left(\sum_{i=0}^{n} u_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j x^j\right) \leq \sum_{\ell=0}^{2n} w_\ell x^\ell$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient:

$\forall x \in [0,1], \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} w_\ell x^\ell \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j x^j\right) \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} w_\ell x^\ell$

$\forall x \in [0,1], \quad F_w(x) \leq F_u(x) F_v(x) \leq F_w(x)$

Finalement: $\forall x \in [0,1], \; F_w(x) = F_u(x) F_v(x)$.

(Q1) a) $(R_n(N))_{n\geqslant 1}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints donc la série de terme général $p(R_n(N))$ est convergente.

Ainsi la série de terme général $u_n(N)=p(R_n(N))$ est convergente.

Notons encore que $u_0(N)=0\geqslant 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n(N)=p(R_n(N))\geqslant 0$.

Ceci achève de prouver que $(u_n(N))_{n\geqslant 0}$ appartient à E.

b) $R(N)=\bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n(N)$ et cette union est disjointe.

Ainsi $p(R(N))=\sum_{n=1}^{+\infty} p(R_n(N))=\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(N)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(N)=F_N(1)$.

$p(R(N))=F_N(1)$ ou $u(N)=F_N(1)$.

(Q2) a) $u_1(1)=p(R_1(1))=q$. $u_1(1)=q=1-p$.

$u_2(1)=p(R_2(1))=0$; en effet si le joueur n'est pas ruiné au premier lancer il possède alors 2 francs avant le second lancer ; il ne peut donc pas être ruiné au second lancer.

$u_2(1)=0$.

b) Soit $k\in[\![2,+\infty[\![$. Notons P_1 l'événement le premier lancer donne pile.

$(P_1,\overline{P_1})$ est un système complet d'événements.

$p(R_k(1))=p(P_1)\,p(R_k(1)/P_1)+p(\overline{P_1})\,p(R_k(1)/\overline{P_1})$

or $p(R_k(1)/\overline{P_1})=0$ car $k\geqslant 2$ et si $\overline{P_1}$ est réalisé il est ruiné après le 1er lancer.

$p(R_k(1)/P_1)=p(R_{k-1}(2))$; s'il a gagné un franc au premier lancer il se trouve avec un capital de deux francs avant le second lancer et il doit alors être ruiné au bout des $k-1$ lancers suivant le premier.

Ainsi $p(R_k(1))=p\,p(R_{k-1}(2))$; $u_k(1)=p\,u_{k-1}(2)$.

$\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ u_k(1)=p\,u_{k-1}(2)$.

c) Soit $x \in [0,1]$. $F_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1) x^k = u_0(1) + u_1(1)x + \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(1) x^k$.

$$F_1(x) = 0 + (1-p)x + \sum_{k=2}^{+\infty} p\, u_{k-1}(2) x^k = (1-p)x + \sum_{k=1}^{+\infty} p\, u_k(2) x^{k+1} \underset{\substack{\uparrow \\ u_0(2)=0=u_1(2)}}{=} (1-p)x + p\, F_2(x) x$$

$F_1(x) = px F_2(x) + (1-p)x$

$\forall x \in [0,1]$, $F_1(x) = px F_2(x) + (1-p)x$.

Q3 a) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $R_{n+1}(1) \subset P_1$.

Notons, pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, S_k l'événement le joueur retrouve un capital de 1 franc pour la 1ère fois au bout du $k^{\text{ième}}$ lancer.

$R_{n+1}(1) \subset P_1 \cap (S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_n) = (P_1 \cap S_2) \cup \dots \cup (P_1 \cap S_n)$. (union disjointe).

$p(R_{n+1}(1)) = \sum_{k=2}^{n} p(P_1 \cap S_k \cap R_{n+1}(1)) = \sum_{k=2}^{n} p(P_1)\, p(S_k / P_1)\, p(R_{n+1}(1) / P_1 \cap S_k)$.

$p(P_1) = p$ · $p(S_k / P_1) = u_{k-1}(1)$ (en $k-1$ lancers le joueur passe d'un capital de 2 francs à un capital de 1 franc ; ce qui est la même chose que de passer de 1 franc à 0 francs en $k-1$ lancers).

$p(R_{n+1}(1) / P_1 \cap S_k) = u_{n+1-k}(1)$ (le joueur passe de 1 à 0 francs en $n+1-k$ lancers).

Ainsi $p(R_{n+1}(1)) = \sum_{k=2}^{n} p\, u_{k-1}(1)\, u_{n+1-k}(1) \underset{\substack{\uparrow \\ j=k-1}}{=} \sum_{j=1}^{n-1} p\, u_j(1)\, u_{n-j}(1) \underset{\substack{\uparrow \\ u_0(1)=0}}{=} p \sum_{j=0}^{n} u_j(1) u_{n-j}(1)$

Ainsi $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $u_{n+1}(1) = p \sum_{j=0}^{n} u_j(1) u_{n-j}(1)$.

$u_2(1) = 0$ et $p \sum_{j=0}^{1} u_j(1) u_{1-j}(1) = p u_0(1) u_1(1) + p u_1(1) u_0(1) = 0$ car $u_0(1) = 0$.

Finalement $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $u_{n+1}(1) = p \sum_{j=0}^{n} u_j(1) u_{n-j}(1)$.

b) Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $\omega_n = \sum_{j=0}^{n} u_j(1)\,u_{n-j}(1)$. Posons $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}$.

$(u_n(1))_{n\geq 0} \in E$, donc d'après I Q5, $\omega\in E$ et $\forall x\in[0,1]$, $F_\omega(x) = F_1(x)\,F_1(x)$.

Alors $\forall x\in[0,1]$, $F_1^2(x) = F_\omega(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n x^n \underset{\omega_0=0}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\omega_n x^n = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}(1)\,x^n = \frac{1}{p}\sum_{n=2}^{+\infty} u_n(1)\,x^{n-1}$

$\forall x\in[0,1]$, $px\,F_1(x)^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(1)\,x^n = F_1(x) - u_1(1)\,x - u_0(1) = F_1(x) - (1-p)x$.

$\forall x\in[0,1]$, $px\,F_1^2(x) - F_1(x) + (1-p)x = 0$.

c) Soit $x\in]0,1[$. $px(F_1(x))^2 - F_1(x) + (1-p)x = 0$ donc $F_1(x)$ est solution de l'équation du second degré $T\in\mathbb{R}$ et $pxT^2 - T + (1-p)x = 0$.

$\Delta = 1 - 4p(1-p)x^2$.

$(1-2p)^2 \geq 0$ donc $1+4p^2-4p\geq 0$; $4p(1-p)\leq 1$; $4p(1-p)x^2 \leq x^2 < 1$.

Alors $\Delta = 1-4p(1-p)x^2 > 0$.

L'équation admet alors deux solutions : $\dfrac{1+\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px}$ et $\dfrac{1-\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px}$.

Ainsi $F_1(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px}$ ou $F_1(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px}$.

Remarque : $F_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1)x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(1) = R(1) \leq 1$.

$$\frac{1+\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px} > 1 \iff \sqrt{1-4p(1-p)x^2} > 2px-1 \iff \begin{cases} 2px-1<0 \\ \text{ou} \\ 2px-1\geq 0 \text{ et } 1-4p(1-p)x^2 > 4p^2x^2+1-4px \end{cases}$$

$$\frac{1+\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px} > 1 \iff \begin{cases} 2px<1 \\ \text{ou} \\ 2px\geq 1 \text{ et } \underbrace{4px}_{\geq 0}(1-x) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2px<1 \\ \text{ou} \\ 2px\geq 1 \text{ et } x<1 \end{cases}$$

Comme $x\in]0,1[$: $\dfrac{1+\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px} > 1$.

Finalement : $\forall x \in]0,1[$, $F_1(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px}$.

d) Rappelons que $u(1) = F_1(1)$.

Rappelons aussi que F_1 est continue sur $[0,1]$ d'après I.

Alors $u(1) = F_1(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} F_1(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4p(1-p)1^2}}{2p\times 1} = \dfrac{1}{2p}\left[1-\sqrt{1-4p+4p^2}\right] = \dfrac{1-|1-2p|}{2p}$

si $p \in]0,\frac{1}{2}]$, $1-2p \geq 0$ et : $u_1(1) = \dfrac{1-(1-2p)}{2p} = 1$.

si $p \in]\frac{1}{2},1[$, $1-2p < 0$ et : $u_1 = \dfrac{1-(2p-1)}{2p} = \dfrac{1-p}{p}$.

Finalement $u_1(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq 1/2 \\ \dfrac{1-p}{p} & \text{si } p > 1/2 \end{cases}$.

e) $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}\, t^k + o(t^{n+1})$.

$$\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}\left(1\times 3\times\cdots\times(2k-3)\right) t^k + o(t^{n+1}).$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k!\, 2^{k-1}(k-1)!}\, t^k + o(t^{n+1})$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1} k!(k-1)!}\, t^k + o(t^{n+1}).$$

Alors $1-\sqrt{1-4p(1-p)x^2} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}\left(-4p(1-p)x^2\right)^k + o(x^{2n+2})$.

$$1-\sqrt{1-4p(1-p)x^2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2(2k-2)!}{k!(k-1)!}\left(p(1-p)\right)^k x^{2k} + o(x^{2n+2}).$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}{2px} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}\, p^{k-1}(1-p)^k x^{2k-1} + o(x^{2n+1}).$$

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^k x^{2k-1} + o(x^{2n+1}).$$

D'après I, $F_1(x) = \sum_{\ell=0}^{2n+1} u_\ell(1) x^\ell + o(x^{2n+1})$.

De l'unicité de la partie régulière du développement limité de F_1 à l'ordre $2n+1$ au voisinage de 0 il vient, en particulier : $u_{2n}(1)=0$ et

$u_{2n+1}(1) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!} p^{n}(1-p)^{n+1}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n}(1) = 0$ et $u_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p^n(1-p)^{n+1}$.

Q4 a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$p(R_k(N)) = p(R_k(N)/P_1)p(P_1) + p(R_k(N)/\bar{P}_1)p(\bar{P}_1)$.

$p(R_k(N)/P_1) = u_{k-1}(N+1)$ (A l'issue du premier lancer le joueur possède $N+1$ francs qu'il doit perdre en $k-1$ lancers)

$p(R_k(N)/\bar{P}_1) = u_{k-1}(N-1)$ (A l'issue du premier lancer le joueur possède $N-1$ francs qu'il doit perdre en $k-1$ lancers).

Ainsi $p(R_k(N)) = p\,u_{k-1}(N+1) + q\,u_{k-1}(N-1)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(N) = p\,u_{k-1}(N+1) + q\,u_{k-1}(N-1)$.

b) Soit $x \in [0,1]$. $F_N(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} u_\ell(N) x^\ell = \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(N) x^\ell \overset{\text{toutes les séries sont convergentes}}{=} p\sum_{\ell=1}^{+\infty} u_{\ell-1}(N+1)x^\ell + q\sum_{\ell=1}^{+\infty} u_{\ell-1}(N-1)x^\ell$.

$F_N(x) = p\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_\ell(N+1)x^{\ell+1} + q\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_\ell(N-1)x^{\ell+1} = px\,F_{N+1}(x) + qx\,F_{N-1}(x)$.

$\forall x \in [0,1]$, $F_N(x) = px\,F_{N+1}(x) + qx\,F_{N-1}(x) = px\,F_{N+1}(x) + (1-p)x\,F_{N-1}(x)$.

$\forall x \in [0,1]$, $px\,F_{N+1}(x) - F_N(x) + (1-p)x\,F_{N-1}(x) = 0$ et ceci pour tout N dans $[\![1,+\infty[\![$.

c) Soit $x \in [0,1]$. $px(F_1(x))^2 - F_1(x) + (1-p)x = 0$ et $F_1(x) = pxF_2(x) + (1-p)x$

Alors $pxF_2(x) = F_1(x) - (1-p)x = px(F_1(x))^2$.

Ainsi $F_2(x) = (F_1(x))^2$.

Montrons par récurrence que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $F_i(x) = (F_1(x))^i$.

La propriété est vraie pour $i=1$ et $i=2$.

Supposons la vraie pour i et $i+1$ ($i \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour $i+2$.

$pxF_{i+2}(x) - F_{i+1}(x) + (1-p)xF_i(x) = 0$

$pxF_{i+2}(x) = (F_1(x))^{i+1} + (1-p)x(F_1(x))^i = (F_1(x))^i\left[F_1(x) + (1-p)x\right] = (F_1(x))^i px(F_1(x))^2$

$pxF_{i+2}(x) = px(F_1(x))^{i+2}$; $F_{i+2}(x) = (F_1(x))^{i+2}$. ceci achève la récurrence.

$\forall x \in]0,1]$, $F_i(x) = (F_1(x))^i$ et ceci pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. F_i et F_1^i sont continues en 0.

Ainsi $F_i(0) = \lim_{x \to 0^+} F_i(x) = \lim_{x \to 0^+} (F_1^i(x)) = F_1^i(0)$.

Finalement $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $F_i(x) = (F_1(x))^i$. $\forall x \in [0,1]$, $F_N(x) = (F_1(x))^N$

d) $$u_N(1) = F_N(1) = (F_1(1))^N = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq 1/2 \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^N & \text{si } p > 1/2 \end{cases}$$

Q5 Notons qu'ici $p \in]0, \frac{1}{2}]$ donc la probabilité que le joueur soit ruiné est 1 ce qui rend raisonnable la variable aléatoire X_N.

X_N possède une espérance si la série de terme général $n\,u_n(N)$ est absolument convergente ou si la série de terme général $n\,u_n(N)$ converge ($n\,u_n(N) \geq 0$).

d'après le préliminaire cette série converge si et seulement si F_N est dérivable en 1.

* Supposons $p < 1/2$.

$\forall x \in [0,1]$, $1-4x^2p(1-p) \geq 1-4p(1-p) = (2p-1)^2 > 0$.

$x \mapsto 1-4x^2p(1-p)$ est dérivable et strictement positive sur $[0,1]$.

Alors $x \mapsto \sqrt{1-4x^2p(1-p)}$ est dérivable sur $[0,1]$.

Sans difficulté alors, $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2p(1-p)}}{2px}$ est dérivable sur $]0,1]$.

Finalement F_1 est dérivable sur $]0,1]$ donc en 1. Alors $F_N = F_1^N$ est dérivable en 1.

Ainsi X_N possède une espérance et $E(X_N) = F_N'(1)$

$F_N'(1) = N\, F_1'(1)\, F_1^{N-1}(1) = N F_1'(1)$ $\quad$ ($F_1(1) = 1$ car $p < 1/2$)

$$\forall x \in]0,1],\ F_1'(x) = \frac{1}{(2p)x^2}\left[\left(-\frac{-8x\,p(1-p)}{2\sqrt{1-4x^2p(1-p)}}\right)x - \left(1-\sqrt{1-4x^2p(1-p)}\right)\right]$$

$$\forall x \in]0,1],\ F_1'(x) = \frac{1}{2px^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-p)p}}\left[4x^2p(1-p) - \sqrt{1-4x^2p(1-p)} + 1-4x^2p(1-p)\right]$$

$$\forall x \in]0,1],\ F_1'(x) = \frac{1}{2px^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-4x^2p(1-p)}}\left[1-\sqrt{1-4x^2p(1-p)}\right]$$

$$\text{Alors } F_1'(1) = \frac{1}{2p}\,\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}\left(1-\sqrt{1-4p(1-p)}\right) = \frac{1}{2p}\,\frac{1}{|2p-1|}\left(1-|2p-1|\right).$$

$$F_1'(1) = \frac{1}{2p} \times \frac{1}{1-2p} \times \left(1-(1-2p)\right) = \frac{1}{1-2p}.$$

$$\text{Alors } E(X_N) = N\left(\frac{1}{1-2p}\right). \quad \underline{\underline{E(X_N) = \frac{N}{1-2p}}}.$$

* Supposons $p = 1/2$. $\forall x \in]0,1]$, $F_1(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2(1/2)(1-1/2)}}{2\times(1/2)x} = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{F_1(x)-F_1(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - 1\right] = \frac{1}{x}\left[-1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right] = \frac{1}{x}\left[-1+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right]$$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{F_1(x)-F_1(1)}{x-1} = +\infty$; F_1 n'est pas dérivable en 1 ; $F_N = F_1^N$ n'est pas dérivable en 1. $\underline{\underline{X_N \text{ n'a pas d'espérance}}}$.

Ce qui suit est la PARTIE III

Sujet classique que l'on peut retrouver à travers l'évolution du nombre d'individus d'une population ou d'une file d'attente

→ Ex 3.8 - ESCP ORAL 2002
Voir également dans le même genre
ESSEC 98 ou 86
M II

Q1 a) $X_1(\Omega)=\{0,2\}$. $P(X_1=0)=q$ et $P(X_1=2)=p$. $E(X_1)=2p$.

b) $X_1(\Omega)=\{0,2\}$ donc $X_2(\Omega)=\{0,2,4\}$.

$(\{X_1=0\},\{X_1=2\})$ est un système complet d'événements.

Alors $\forall i\in X_2(\Omega)$, $P(X_2=i)=P(X_2=i/X_1=0)\,P(X_1=0)+P(X_2=i/X_1=2)\,P(X_1=2)$.

$\forall i\in X_2(\Omega)$, $P(X_2=i)=P(X_2=i/X_1=0)\,q+P(X_2=i/X_1=2)\,p$.

- $P(X_2=0)=P(X_2=0/X_1=0)\,q+P(X_2=0/X_1=2)\,p$.

$P(X_2=0/X_1=0)=1$ et $P(X_2=0/X_1=2)=q^2$ (les 2 pièces lancées à la partie 2 donnent face).

Ainsi $P(X_2=0)=1\times q+q^2p=q(1+qp)$.

- $P(X_2=2)=\underbrace{P(X_2=2/X_1=0)}_{=0}\,q+P(X_2=2/X_1=2)\,p=P(X_2=2/X_1=2)\,p=(2pq)\,p=2p^2q$.

(A la seconde partie, une pièce donne pile et l'autre face).

- $P(X_2=4)=\underbrace{P(X_2=4/X_1=0)}_{=0}\,q+\underbrace{P(X_2=4/X_2=2)}_{p^2}\,p=p^3$. (les 2 pièces lancées donne pile).

$P(X_2=0)=q(1+qp)$; $P(X_2=2)=2p^2q$; $P(X_2=4)=p^3$.

Remarque.- $q(1+qp)+2p^2q+p^3=(1-p)\big(1+(1-p)p\big)+2p^2(1-p)+p^3=(1-p)(1+p-p^2)+2p^2-p^3$

$=1+p-p^2-p-p^2+p^3+2p^2-p^3=1$!

$E(X_2)=2P(X_2=2)+4P(X_2=4)=4p^2q+4p^3=4p^2(q+p)=4p^2$. $E(X_2)=4p^2=(2p)^2$.

c) Notons que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n prend ses valeurs dans $E_n=\{2k\,;\,k\in[\![0,2^{n-1}]\!]\}$

→ $E_1=\{2k\,;\,k\in[\![0,1]\!]\}=\{0,2\}$; la propriété est vraie pour $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $n+1$.

Supposons que X_n ait pris la valeur $2k$ avec $k\in[\![0,2^{n-1}]\!]$.

Supposons encore que dans la $(n+1)^{ie}$ partie, i pièces donnent pile et $2k-i$ face avec $i\in[\![0,2k]\!]$. Alors X_{n+1} prend la valeur $2i$ et $2i\in[\![0,4k]\!]$; $i\in[\![0,2k]\!]\subset[\![0,2\times 2^{n-1}]\!]=[\![0,2^{(n+1)-1}]\!]$.

Alors X_{n+1} a pris la valeur $2i$ avec $i \in [\![0, 2^{(n+1)-1}]\!]$ donc X_{n+1} a pris une valeur de E_{n+1}. Ce qui achève la récurrence.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, X_n prend ses valeurs dans $E_n = \{2k ; k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]\}$.

Remarque.. On peut aisément montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{2k ; k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]\}$.

Q2 a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_1(x) = P(X_1=0)x^0 + P(X_1=2)x^2 = q + px^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G_1(x) = q + px^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G_2(x) = P(X_2=0)x^0 + P(X_2=2)x^2 + P(X_2=4)x^4$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G_2(x) = q(1+qp) + 2p^2q\,x^2 + p^3x^4$. $= \cdots = q + p\,(G_1(x))^2$!

b) $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $i \in E_n$ et $k \in E_{n+1}$.

Notons que i et k sont pairs. Supposons $P(X_n=i) \neq 0$ (normal pour calculer la probabilité conditionnelle).

Supposons $\{X_n=i\}$ réalisé. A la $(n+1)^{\text{e}}$ partie on lance i pièces, si j donnent pile ($j \in [\![0, i]\!]$), X_{n+1} prend la valeur $2j$ et $2j \in [\![0, 2i]\!]$.

Ainsi 1er cas.. $k > 2i$: $P(X_{n+1}=k / X_n=i) = 0$

2e cas.. $k \leq 2i$: $P(X_{n+1}=k / X_n=i) = C_i^{k/2}\, p^{k/2} q^{i-k/2}$ (on a lancé i pièces à la $(n+1)^{\text{ème}}$ partie, $\frac{k}{2}$ pièces ont donné pile et $i-\frac{k}{2}$ face.

Finalement $P(X_{n+1}=k | X_n=i) = \begin{cases} C_i^{k/2} p^{k/2} q^{i-k/2} & \text{si } k \leq 2i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ si $P(X_n=i) \neq 0$.

Reprenons les notations précédentes

Si $P(X_n=i) \neq 0$: $P(\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n=i\}) = P(X_{n+1}=k / X_n=i)\,P(X_n=i)$ donc

$$P(\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n=i\}) = \begin{cases} C_i^{k/2} p^{k/2} q^{i-k/2} P(X_n=i) & \text{si } k \leq 2i \text{ ou } \frac{k}{2} \leq i. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Observons que ceci vaut encore pour $P(X_n=i)=0$ car on a alors $P(\{X_{n+1}=k\}\cap\{X_n=i\})=0$ dans la mesure où $\{X_{n+1}=k\}\cap\{X_n=i\}\subset\{X_n=i\}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$G_{n+1}(x)=\sum_{k\in E_{n+1}} P(X_{n+1}=k)\,x^k \underset{\uparrow}{=} \sum_{k\in E_{n+1}}\ \sum_{i\in E_n} P(\{X_{n+1}=k\}\cap\{X_n=i\})\,x^k$$

$(\{X_n=i\})_{i\in E_n}$ est un système complet d'événements.

$$G_{n+1}(x)=\sum_{i\in E_n}\ \sum_{\ell\in E_{n+1}} P(\{X_{n+1}=\ell\}\cap\{X_n=i\})\,x^\ell$$

Rappelons que $E_{n+1}=\{2\ell\ ;\ \ell\in[\![0,2^n]\!]\}$.

$$G_{n+1}(x)=\sum_{i\in E_n}\ \sum_{\ell=0}^{2^n} P(\{X_{n+1}=2\ell\}\cap\{X_n=i\})\,x^{2\ell}$$

$$G_{n+1}(x)=\sum_{i\in E_n}\ \sum_{\ell=0}^{\boxed{i}} C_i^\ell\, p^\ell q^{i-\ell}\, P(X_n=i)\, x^{2\ell}$$

$$G_{n+1}(x)=\sum_{i\in E_n} P(X_n=i)\left[\sum_{\ell=0}^{i} C_i^\ell\, p^\ell q^{i-\ell}(x^2)^\ell\right]=\sum_{i\in E_n} P(X_n=i)\left[(px^2+q)^i\right]$$

$$G_{n+1}(x)=\sum_{i\in E_n} P(X_n=i)\,(px^2+q)^i=G_n(px^2+q)=G_n(G_1(x))=(G_n\circ G_1)(x).$$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ G_{n+1}=G_n\circ G_1$. (1)

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ G_n\circ G_1=G_1\circ G_n$

→ $G_1\circ G_1=G_1\circ G_1$! Donc la propriété est vraie pour $n=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $n+1$.

$$G_{n+1}\circ G_1 \overset{(1)}{=} G_n\circ G_1\circ G_1 \underset{\text{H.R.}}{=} G_1\circ \underbrace{G_n\circ G_1}_{(1)} = G_1\circ G_{n+1}.$$

Ceci achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ G_{n+1}=G_n\circ G_1$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ G_{n+1}(x)=G_1(G_n(x)) = q+p\,(G_n(x))^2.$

$\forall t\in\mathbb{R}, G_1(t)=q+pt^2$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ G_{n+1}(x)=q+p\,(G_n(x))^2.$

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. G_n et G_{n+1} sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$G_n(1)=\sum_{k\in E_n} P(X_n=k)\,1^k=\sum_{k\in E_n}P(X_n=k)=1.$

$G_n'(1)=\sum_{k\in E_n} P(X_n=k)\,k\times 1^{k-1}=\sum_{k\in E_n} k\,P(X_n=k)=E(X_n).$

$G_{n+1}=q+pG_n^2$ donc $G_{n+1}'=p\times 2\times G_n'\,G_n.$

Alors $E(X_{n+1})=G_{n+1}'(1)=2p\,G_n'(1)G_n(1)=2p\,E(X_n)\times 1=2p\,E(X_n).$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, E(X_{n+1})=2p\,E(X_n).$

d) $(E(X_n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $2p$ et de premier terme $E(X_1)$.

$E(X_1)=2p.$ Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*, E(X_n)=(2p)^{n-1}E(X_1)=(2p)^n.$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, E(X_n)=(2p)^n.$

Q3 a) $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=G_{n+1}(0)=q+p\,(G_n(0))^2=q+p\,u_n^2.$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=q+pu_n^2.$

b) Observons que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=P(X_n=0)\in[0,1].$

Posons alors $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=q+px^2$. f est croissante sur $[0,1]$ et $f(0)=q$ et $f(1)=q+p=1$. Alors $\forall x\in[0,1]$, $0\leq f(0)\leq f(x)\leq f(1)=1$. $f([0,1])\subset[0,1]$.

- f est croissante sur $[0,1]$. $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in[0,1]$. $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=f(u_n)$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone (croissante si $u_1\leq u_2$ et décroissante si $u_1>u_2$) et bornée ; elle est donc convergente et sa limite appartient à $[0,1]$.

$u_2 - u_1 = q + p u_1^2 - u_1 \underset{u_1 = q}{\overset{\uparrow}{=}} p q^2 \geqslant 0.$ $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = q + p u_n^2$. En passant à la limite il vient:

$\ell = q + p\ell^2$. $0 = p\ell^2 - \ell + q = p\ell^2 - \ell + 1 - p = p(\ell^2 - 1) - (\ell - 1) = (p(\ell+1) - 1)(\ell - 1)$.

Ainsi $\ell = 1$ ou $\ell = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$.

1er Cas.. $\frac{q}{p} > 1$ (ie $1 - p > p$ ou $p < \frac{1}{2}$).

Alors $\ell = 1$ car $\ell \in [0,1]$ et $\frac{q}{p} \notin [0,1]$. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2e Cas.. $\frac{q}{p} \leqslant 1$ (ie $p \geqslant \frac{1}{2}$). Alors $\frac{q}{p} \in [0,1]$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{q}{p}$.

→ $u_0 = q \leqslant \frac{q}{p}$ car $\frac{1}{p} \geqslant 1$

→ Supposons $u_n \leqslant \frac{q}{p}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f\left(\frac{q}{p}\right) = q + p\left(\frac{q}{p}\right)^2 = q + \frac{q^2}{p} = \frac{q}{p}(p+q) = \frac{q}{p}$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{q}{p}$ donc $\ell \leqslant \frac{q}{p} \leqslant 1$. Comme $\ell \in \{\frac{q}{p}, 1\}$

nécessairement $\ell = \frac{q}{p}$.

Finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ \frac{q}{p} & \text{si } p \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$.

c) Soit R l'événement la banque ruine le joueur.

$R = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (X_n = 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X_n = 0) \subset (X_{n+1} = 0)$.

Le théorème de la limite monotone donne $P(R) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Ainsi $P(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ \frac{q}{p} & \text{si } p \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ ou $P(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leqslant 1/2 \\ \frac{q}{p} & \text{si } p > 1/2 \end{cases}$

Le joueur sera presque sûrement ruiné si $p < \frac{1}{2}$ ... ce qui n'a rien de surprenant !