PARTIE I

Q1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

En particulier, $\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x > A \Rightarrow |f(x)| - |\ell| \leq \big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell| < 1$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, x > A \Rightarrow |f(x)| < 1 + |\ell|$.

Ainsi f est bornée sur $]A, +\infty[$.

Or f est continue sur le segment $[0, A]$ donc f est bornée sur $[0, A]$.

f est alors bornée sur $[0, A]$ et sur $]A, +\infty[$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q2) D'après ce qui précède $\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq C$.

Notons également que g est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$;
la série de terme général $g(k)$ est alors de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$. Par hypothèse cette intégrale est convergente donc la série de terme général $g(k)$ est convergente.

$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq |f(k) g(k)| = |f(k)|\, g(k) \leq C\, g(k)$.

La convergence de la série de terme général $C\,g(k)$ et les règles de comparaison des séries à ~~termes~~ positifs donnent la convergence de la série de terme général $|f(k) g(k)|$.

La série de terme général $f(k)g(k)$ est absolument convergente donc convergente.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $|f(t)g(t)| = |f(t)|g(t) \le C\, g(t)$. $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $0 \le |f(t)g(t)| \le C\, g(t)$.
La convergence de $\int_0^{+\infty} C|g(t)|\,dt$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)|\,dt$ est convergente.

$\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^A f'(t)G(t)\,dt = \left[f(t)G(t)\right]_0^A - \int_0^A f(t)G'(t)\,dt = f(A)G(A) - f(0)\underbrace{G(0)}_{=0} - \int_0^A f(t)g(t)\,dt.$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} f(A) = \ell$ par hypothèse, $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A) = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ car $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge

et $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_0^A f(t)g(t)\,dt\right) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ car cette dernière intégrale converge.

Ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f'(t)G(t)\,dt = \ell\int_0 g(t)\,dt - \int_0 f(t)g(t)\,dt$.

Alors **$\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ converge.**

(Q5) $\ell \neq 0$. Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell$ et $f(k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \ell$.

$f(x)g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell g(x)$ et $f(k)g(k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \ell g(k)$.

Notons que $x\mapsto \ell g(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} \ell g(t)\,dt$ diverge.

Alors **$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ est divergente.**

De même les termes de la série de terme général $\ell g(k)$ ont le même signe et cette série est divergente(*) ; par conséquent **la série de terme général $f(k)g(k)$ diverge.**

(*) la série de terme général $g(k)$ est toujours de même nature que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$

(Q4) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et f admet une limite finie : 1.
$\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) = \frac{1}{t+1}$; g est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Les hypothèses H1 + H2 sont vérifiées.
$\int_0^{+\infty} g(t)dt$ diverge $\left(\frac{1}{t+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}\right)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \neq 0$, les hypothèses de Q3 sont

également vérifiées.
$\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = \int_0^x \frac{dt}{t+1} = [\ln(t+1)]_0^x = \ln(x+1)$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t)G(t) = -\frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}$. $\forall t \in \mathbb{R}_+, |f'(t)G(t)| = \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2}$.

$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{3/2}\ln(t+1)}{(t+1)^2}\right) = \lim_{t \to +\infty}\left(t^{3/2}\frac{\ln(t+1)}{t^2}\right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}} = 0$.

$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [x_0, +\infty[, 0 \leq \frac{t^{3/2}\ln(t+1)}{(t+1)^2} \leq 1$; $\forall t \in [x_0, +\infty[, 0 \leq \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.
Alors $|f'(t)G(t)| = \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^2} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$ pour tout élément t de $[x_0, +\infty[$.

La convergence de $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)G(t)|dt$.
Ainsi $\int_{x_0}^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.
Finalement $\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ converge.

(Q5) f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et g est continue sur $[0, +\infty[$.
$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{(t+1)^\alpha} = 0$ car $\alpha > 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) = \frac{1}{(t+1)^\beta}$. g est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ car $\beta > 0$.

$g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\beta}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ dt diverge $(\beta \leq 1)$.
Ainsi $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ diverge et $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ également.

f et g ont donc les bonnes qualités, $\ell = 0$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t)g(t) \geqslant 0$ et $f(t)g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha} \times \frac{1}{t^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha+\beta}}$

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+\beta}}$.

Alors $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha+\beta > 1$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $f(k)g(k) \geqslant 0$ et $f(k)g(k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k^\alpha} \times \frac{1}{k^\beta} = \frac{1}{k^{\alpha+\beta}}$.

Ainsi la série de terme général $f(k)g(k)$ est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{k^{\alpha+\beta}}$.

Alors la série de terme général $f(k)g(k)$ converge si et seulement si $\alpha+\beta > 1$.

• $\beta \in]0,1[$

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = \frac{-\alpha}{(1+t)^{\alpha+1}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^\beta} = \left[-\frac{(1+t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-\beta}\left[1 - \frac{1}{(1+x)^{\beta-1}}\right]$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t)G(t) = -\frac{\alpha}{1-\beta}\left[\frac{1}{(1+t)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\right]$.

$\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)$ est ainsi de même nature que $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\right)dt$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^{\alpha+1}}$ converge car : $\alpha+1 > 1$, $\frac{1}{(1+t)^{\alpha+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{(1+t)^{\alpha+1}} \geqslant 0$.

Ainsi $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\right)dt$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^{\alpha+\beta}}$

Alors $\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^{\alpha+\beta}}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \geqslant 0$ et $\frac{1}{(1+t)^{\alpha+\beta}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+\beta}}$. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^{\alpha+\beta}}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+\beta}}$; cette intégrale converge si et seulement si $\alpha+\beta > 1$.

Si $\beta \in]0,1[$, $\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha+\beta>1$.

• $\beta=1$. $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = -\dfrac{\alpha}{(1+t)^{\alpha+1}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $G(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{t+1} = \ln(x+1)$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t)G(t) = -\alpha \times \dfrac{\ln(t+1)}{(1+t)^{\alpha+1}}$. Ainsi $f'(t)\,G(t) \underset{+\infty}{\sim} -\alpha \dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1}}$

$\left(\dfrac{\ln(t+1)}{\ln t} = 1 + \dfrac{1}{\ln t}\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \ldots \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t+1)}{\ln(t)} = 1 \,;\ \ln(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln t \right)$

$-f'(t)G(t) \sim \alpha \dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1}}$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{\alpha \ln t}{t^{\alpha+1}} \geqslant 0$.

Alors $\int_0^{+\infty} (-f'(t)G(t))\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \dfrac{\alpha \ln t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ ou que $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1}}\,dt$

$\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ est alors également de même nature que $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1}}\,dt$

Soit σ un réel appartenant à $]1, \alpha+1[$. (ex $\sigma = \frac{\alpha+2}{2}$).

$\lim\limits_{t\to+\infty} \left(t^{\sigma} \dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1}}\right) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1-\sigma}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha+1-\sigma>0}}{=} 0$.

$\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [A,+\infty[$, $\left|\dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1-\sigma}}\right| \leqslant 1$; $\forall t \in [A,+\infty[$, $0 \leqslant \left|\dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{\sigma}}$.

La convergence de $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{\sigma}}$ donne alors la convergence de $\int_1^{+\infty} \left|\dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1}}\right| dt$.

$\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement $\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ converge. Notons également que $\alpha+\beta = \alpha+1 > 1$.

Ainsi si $\beta \in]0,1]$, $\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha+\beta>1$.

Voir Q0 à la fin de II

PARTIE II

Q1 a) Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

$\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ u_\ell(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \ell \\ g(\ell) \text{ si } \ell \leq x \end{cases}$. $\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ u_\ell(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ell > [x] \\ g(\ell) \text{ si } \ell \leq [x] \end{cases}$

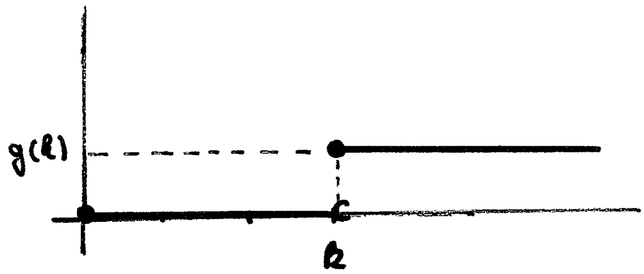
Alors la suite de terme général $u_\ell(x)$ est nulle à partir du rang $[x]+1$.

Ainsi la série de terme général $u_\ell(x)$ est convergente.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(x) = \sum_{\ell=1}^{E(x)} g(\ell)$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S(x) = \sum_{\ell=1}^{E(x)} g(\ell)$ ... à un abus près !

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_\ell(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \ell \\ g(\ell) \text{ si } x \geq \ell \end{cases}$



u_ℓ est continue sur $[0,\ell[$ et sur $[\ell,+\infty[$.

Ainsi u_ℓ est continue en tout point de $\mathbb{R}^+ - \{\ell\}$ et u_ℓ est continue à droite en ℓ.

Notons également que $\lim_{x \to \ell^-} u_\ell(x) = 0$.

Finalement u_ℓ est continue en tout point de $\mathbb{R}^+ - \{\ell\}$ et admet une limite finie à droite et à gauche en ℓ.

Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}_+$. Sur $[a,b]$, u_ℓ possède au plus un point de discontinuité ; en cet éventuel point, u_ℓ admet une limite finie à droite et à gauche.

Ceci revient à dire que u_ℓ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

u_ℓ est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}_+$; u_ℓ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, u_ℓ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell$; S_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de n fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

montrons que S est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}^+$.
Montrons que S est continue par morceaux sur $[a,b]$.
$\exists r \in \mathbb{N}^*$, $[a,b] \subset [0,r]$. Pour montrer que S est continue par morceaux sur $[a,b]$ il suffit alors de prouver que S est continue par morceaux sur $[0,r]$.
Si $k \in [\![r+1,+\infty[\![$, $\forall x \in [0,r]$, $u_k(x) = 0$.
Alors $\forall x \in [0,r]$, $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=0}^{r} u_k(x) = S_r(x)$.
S coïncide avec S_r sur $[0,r]$ et S_r est continue par morceaux sur $[0,r]$ donc
S est continue par morceaux sur $[0,r]$ donc sur $[a,b]$.
Ainsi $\underline{\underline{S \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}_+}}$.

(Q2) g est continue sur $[0,1]$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 g(t)\,dt$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\alpha}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{\alpha+1}$!

Alors $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha\right) = \frac{1}{\alpha+1}}}$.

$[x] \underset{+\infty}{\sim} x$ (Si $x>0$: $x-1<[x]\leq x$ et ainsi : $1-\frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$).

D'après ce qui précède $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{([x])^{\alpha+1}}\left(\sum_{k=1}^{[x]} k^\alpha\right) = \frac{1}{\alpha+1}$ ... (§0)

Alors $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{[x]} k^\alpha\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{[x]}{x}\right)^{\alpha+1}\frac{1}{([x])^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{[x]} k^\alpha\right) = 1^{\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \sum_{k=1}^{[x]} g(k) = \sum_{k=1}^{[x]} k^\alpha$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \sum_{k=1}^{[x]} k^\alpha$.

D'après ce qui précède $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}} S(x)\right) = \frac{1}{\alpha+1}$; $\frac{1}{x^{\alpha+1}} S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha+1}$.

$\underline{\underline{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}}$.

Q3 a) Supposons qu'il n'existe pas de réel a dans $\mathbb{R}_+$ tel que $g(a)>0$.

Comme g est positive, $\forall x\in\mathbb{R}_+, g(x)=0$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $G(x)=\int_0^x g(t)dt=0$. Or $\forall n\in [\![n_0,+\infty[\![$, $G(n)>0$!!

Ainsi il existe un élément a de $\mathbb{R}_+$ tel que $g(a)>0$. Soit x un élément de $[a,+\infty[$;

$\forall t\in[a,x]$, $g(t)\geqslant g(a)$ car g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

En intégrant on obtient : $\int_a^x g(t) \geqslant \int_a^x g(a)\,dt=(x-a)g(a)$.

Alors $G(x)-G(a)\geqslant (x-a)g(a)$; $G(x)\geqslant (x-a)g(a)+G(a)$... tiens de la convexité ! normal non ? $G'=g$ est croissante !

Ainsi $\forall x\in[a,+\infty[$, $G(x)\geqslant(x-a)g(a)+G(a)$.

$\lim_{x\to+\infty}((x-a)g(a)+G(a))=+\infty$ car $g(a)>0$. Alors $\lim_{x\to+\infty} G(x)=+\infty$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[k,k+1]$, $g(k)\leqslant g(t)\leqslant g(k+1)$.

En intégrant il vient : $\forall k\in\mathbb{N}$, $g(k)\underset{(1)}{\leqslant}\int_k^{k+1} g(t)dt=G(k+1)-G(k)\underset{(2)}{\leqslant} g(k+1)$

Avec (1) on obtient : $\sum_{k=1}^n g(k)\leqslant \sum_{k=1}^n (G(k+1)-G(k))=G(n+1)-G(1)$.

Avec (2) on obtient : $\sum_{k=0}^{n-1}(G(k+1)-G(k))\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} g(k+1)$ ou : $G(n)-\underbrace{G(0)}_{=0}\leqslant \sum_{k=1}^n g(k)$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $G(n)\leqslant\sum_{k=1}^n g(k)\leqslant G(n+1)-G(1)$.

c) Rappelons que : $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $G(n)>0$ $(n_0\in\mathbb{N}^*)$

Ainsi $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $1\leqslant \frac{1}{G(n)}\sum_{k=1}^n g(k)\leqslant \frac{G(n+1)}{G(n)}-\frac{G(1)}{G(n)}$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)}=1$ par hypothèse et $\lim_{n\to+\infty}\frac{G(1)}{G(n)}=0$ car $\lim_{n\to+\infty} G(n)=+\infty$

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{G(n)}\sum\limits_{k=1}^{n} g(k)\right)=1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{G([x])}\sum\limits_{k=1}^{E(x)} g(k)\right)=1$; $\sum\limits_{k=1}^{E(x)} g(k) \underset{x\to+\infty}{\sim} G([x])$.

Alors $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} G([x])$. Reste par montrer que : $G([x])\underset{x\to+\infty}{\sim} G(x)$

g est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc G est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $G([x])\leq G(x)\leq G([x]+1)$.

$\forall x\in[x_0,+\infty[$, $0< G([x])\leq G(x)\leq G([x]+1)$.

$\forall x\in[x_0,+\infty[$, $1\leq \frac{G(x)}{G([x])}\leq\frac{G([x]+1)}{G([x])}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{G([x]+1)}{G([x])}=1$. On obtient alors par encadrement

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{G[x]}=1$; alors $S(x)\underset{+\infty}{\sim} G([x])\underset{+\infty}{\sim} G(x)$.

donc $\underline{\underline{S(x)\underset{+\infty}{\sim} G(x)}}$.

d) Pour $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $g(x)=e^x$. g est positive, continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $G(x)=\int_0^x e^t\,dt=e^x-1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{n+1}-1}{e^n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e-e^{-n}}{1-e^{-n}}=e$!

Q4 a) soit $k\in\mathbb{N}^*$. u_k est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et f' est continue sur $\mathbb{R}_+$; $u_k f'$ est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ (u_k f')(t)=u_k(t)f'(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<k\\ g(k)f'(t) & \text{si } t\geq k\end{cases}$$

$\forall A\in[k,+\infty[$, $\int_0^A (u_k f')(t)\,dt=\int_k^A g(k)f'(t)\,dt=g(k)\,[f(A)-f(k)]$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} f(A)=0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A (u_k f')(t)\,dt=-f(k)g(k)$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} u_k(t)f'(t)dt$ existe et vaut $-f(k)g(k)$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et f' est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc S_nf' est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} u_k(t)f'(t)dt$ existe et vaut $-f(k)g(k)$ donc $\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(t)f'(t)dt$ existe et vaut $-\sum_{k=1}^{n}f(k)g(k)$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} S_n(t)f'(t)dt$ existe et vaut $-\sum_{k=1}^{n}f(k)g(k)$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$\left|\int_0^{n+1}S(t)f'(t)dt\right| = -\int_0^{n+1}S(t)f'(t)dt$ car $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $S(t)=\sum_{k=1}^{E(t)}g(k)\geqslant 0$ et

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $f'(t)\leqslant 0$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. $u_k(t)=0$ si $k>E(t)$ ... à méditer

$\forall t\in[0,n+1[$, $S(t)=\sum_{k=1}^{E(t)}g(k)=\sum_{k=1}^{n}u_k(t)=S_n(t)$.

Cela suffit pour dire que : $-\int_0^{n+1}S(t)f'(t)dt=-\int_0^{n+1}S_n(t)f'(t)dt\leqslant-\int_0^{+\infty}S_n(t)f'(t)dt$ car cette intégrale converge et $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $-S_n(t)f'(t)\geqslant 0$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\int_0^{n+1}S(t)f'(t)dt\right| = -\int_0^{n+1}S(t)f'(t)dt\leqslant-\int_0^{+\infty}S_n(t)f'(t)dt$

d) • Supposons que la série de terme général $f(k)g(k)$ converge.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $f(k)g(k)\geqslant 0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}f(k)g(k)\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}f(k)g(k)$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-\int_0^{n+1}S(t)f'(t)dt\leqslant-\int_0^{+\infty}S_n(t)f'(t)dt=\sum_{k=1}^{n}f(k)g(k)\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}f(k)g(k)$.

$t \mapsto -S(t)f'(t)$ est continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}_+$. Pour montrer que cette intégrale existe il suffit de prouver que $x \mapsto \int_0^x (-S(t)f'(t))\,dt$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \int_0^x (-S(t)f'(t))dt \underset{\substack{\uparrow \\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\, -S(t)f'(t)\geq 0}}{\leq} \int_0^{E(x)+1}(-S(t)f'(t))dt \leq \int_0^{(E(x)+1)+1}(-S(t)f'(t))dt \underset{\substack{\uparrow \\ E(x)+1\in\mathbb{N}^*}}{\leq} \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)g(k)$$

Ceci achève de prouver l'existence de $\int_0^{+\infty}(-S(t)f'(t))dt$; $\int_0^{+\infty} S(t)f'(t)\,dt$ converge.

- Réciproquement supposons que $\int_0^{+\infty} S(t)f'(t)dt$ converge et montrons que la série de terme général $f(k)g(k)$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq S_n(t) \leq S(t)$ et $-f'(t) \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall t \in \mathbb{R}_+,\quad 0 \leq -S_n(t)f'(t) \leq -S(t)f'(t)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \int_0^{+\infty} (-S_n(t)f'(t))\,dt \leq \int_0^{+\infty}(-S(t)f'(t))\,dt$ car les deux intégrales convergent.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} f(k)g(k) \leq -\int_0^{+\infty} S(t)f'(t)dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{n} f(k)g(k) \leq f(0)g(0) - \int_0^{+\infty} S(t)f'(t)dt$

mieux $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} f(k)g(k) \leq f(0)g(0) - \int_0^{+\infty} S(t)f'(t)dt$

la série de terme général $f(k)g(k)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée ; cette série est convergente.

Ainsi <u>la série de terme général $f(k)g(k)$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} S(t)f'(t)dt$ converge.</u>

e) Quittons les hypothèses de Q3.

Alors $G(t) \underset{+\infty}{\sim} S(t)$; $-f'(t)\,G(t) \underset{+\infty}{\sim} -f'(t)\,S(t)$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, -f'(t)S(t) \geq 0$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} (-f'(t)G(t))\,dt$ et $\int_0^{+\infty} (-f'(t)S(t))\,dt$ sont de même nature.

Alors $\int_0^{+\infty} f'(t)\,G(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)S(t)\,dt$ sont aussi de même nature.

Ainsi d'après d) :

La série de terme général $f(k)g(k)$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)G(t)dt$.

II Q0

Nous savons que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |v_n - L| < \varepsilon$.

Nous voulons montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [n_1, +\infty[, x > A \Rightarrow |v_{[x]} - L| < \varepsilon$.

Fixons ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |v_n - L| < \varepsilon$.

Posons $A = p+1$ ($p+1$ pour avoir $A > 0$ ... sinon p suffit)

$A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in [n_1, +\infty[, x > A \Rightarrow [x] \geq [A] > p \Rightarrow |v_{[x]} - L| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [n_1, +\infty[, x > A \Rightarrow |v_{[x]} - L| < \varepsilon$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = L \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} v_{[x]} = L$.

PARTIE III

Q1) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$\forall A \in [x,+\infty[,\quad \left| x^{\alpha+1}\int_x^A f'(t)dt \right| \leq \int_x^A x^{\alpha+1}|f'(t)|dt \leq \int_x^A t^{\alpha+1}|f'(t)|dt \underset{(\cdot)}{\leq} \int_x^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|dt$

$(\cdot)$ résulte de la convergence de $\int_x^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|dt$ et de la positivité de $t \mapsto t^{\alpha+1}|f'(t)|$.

Notons que : $\left|x^{\alpha+1}\int_x^A f'(t)dt\right| = \left|x^{\alpha+1}[f(A)-f(x)]\right|$.

Alors $\forall A \in [x,+\infty[,\quad |x^{\alpha+1}[f(A)-f(x)]| \leq \int_x^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|dt$.

Or $\lim_{A\to+\infty} f(A) = 0$; ainsi $|x^{\alpha+1}(-f(x))| \leq \int_x^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|dt$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |x^{\alpha+1}f(x)| \leq \int_x^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|dt$.

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_x^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|dt\right) = 0$ comme " reste " d'une intégrale convergente.

Par encadrement on obtient alors : $\lim_{x\to+\infty}(x^{\alpha+1}f(x)) = 0$.

f est continue sur $[0,1]$ donc f est bornée sur $[0,1]$.

$\exists K \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in [0,1],\ |f(t)| \leq K$.

$\forall t \in]0,1]$, $0 \leq |t^\alpha f(t)| \leq K t^\alpha$ et $\int_0^1 t^\alpha du = \int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}} du$ converge

car $-\alpha < 1$ puisque $\alpha > -1$

Ainsi $\int_0^1 |t^\alpha f(t)|dt$ converge ; $\int_0^1 t^\alpha f(t)dt$ est absolument convergente donc convergente.

Montrons la convergence de $\int_1^{+\infty} t^\alpha f(t)dt$.

Soit $A \in [1,+\infty[$.

$\int_1^A t^\alpha f(t)dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}f(t)\right]_1^A - \int_1^A \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}f'(t)dt = \frac{1}{\alpha+1}A^{\alpha+1}f(A) - \frac{1}{\alpha+1}f(1) - \frac{1}{\alpha+1}\int_1^A t^{\alpha+1}f'(t)dt$

Ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A t^\alpha f(t)\,dt = -\frac{1}{\alpha+1} f(1) - \frac{1}{\alpha+1}\int_1^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\,dt$ car $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(A^{\alpha+1}f(A)\right)=0$ et

$\int_1^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t)\,dt$ converge. Par conséquent $\int_1^{+\infty} t^\alpha f(t)\,dt$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\,dt$ converge.

c) Pour $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.

$\forall t\in]0,1[$, $t^{-1}f(t)=\frac{1}{t\sqrt{t+1}}\geq 0$ et $t^{-1}f(t)\underset{0}{\sim}\frac{1}{t}$.

Comme $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge, $\int_0^1 t^{-1}f(t)$ diverge également.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t^{-1}f(t)$ diverge.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $f'(t) = -\frac{1}{2(t+1)^{3/2}}$; $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $-f'(t)\geq 0$ et $-f'(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2t^{3/2}}$.

Or $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{2t^{3/2}}$ converge donc $\int_1^{+\infty}(-f'(t))\,dt$ converge ; ainsi $\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ converge ;

$\int_0^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ également (on retrouve directement ce résultat en remarquant que

$\int_0^A |f'(t)|\,dt = -\int_0^A f'(t)\,dt = -f(A)+f(0)\dots$).

Ainsi $\int_0^{+\infty} t^{-1}f(t)\,dt$ diverge alors que $\int_0^{+\infty} t^{(-1)+1}|f'(t)|\,dt$ converge.

Q2 a) $t\mapsto |f'(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t\in[1,+\infty[$, $0\leq |f'(t)| \underset{t\geq 1 \text{ et } \alpha+1>0}{\leq} t^{\alpha+1}|f'(t)|$

La convergence de $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|\,dt$ donne la convergence de $\int_1^{+\infty} t^{\alpha+1}|f'(t)|\,dt$ qui donne (d'après ce qui précède) la convergence de $\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,dt$ qui donne encore la convergence de $\int_0^{+\infty} |f'(t)|dt$.

Ainsi $\int_x^{+\infty} |f'(t)|dt$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. h est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Soit T une primitive de $|f'|$ sur $\mathbb{R}_+$ ($|f'|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$).

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) = \int_x^1 |f'(t)|dt + \int_1^{+\infty} |f'(t)|dt = T(1) - T(x) + \int_1^{+\infty} |f'(t)|dt$

T est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ($T(1)$ et $\int_1^{+\infty} |f'(t)|dt$ sont des constantes)

Notons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = -T'(x) = -|f'(x)|$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$\forall A \in [x, +\infty[,\ |f(A) - f(x)| = \left|\int_x^A f'(t)dt\right| \leq \int_x^A |f'(t)|dt \leq \int_x^{+\infty} |f'(t)|dt = h(x)$

$\forall A \in [x, +\infty[,\ |f(A) - f(x)| \leq h(x)$. $\quad \int_x^{+\infty} |f'(t)|dt$ converge et $|f'|$ est positive.

Or $\lim_{A \to +\infty} f(A) = 0$; en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente on obtient
$|-f(x)| \leq h(x)$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leq h(x)$.

Rappelons que h est dérivable et que $h' = -|f'|$.

Ainsi h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t^{\alpha+1}|h'(t)| = t^{\alpha+1}|f'(t)|$.

Comme $\int_0^{+\infty} (t^{\alpha+1}|f'(t)|)dt$ converge, $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1}|h'(t)|dt$ converge.

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} |f'(t)|dt = 0$ ("reste" d'une intégrale convergente).

h a donc les mêmes qualités que f. Nous pouvons appliquer Q1 à h.

Ainsi nous pouvons dire que $\int_0^{+\infty} t^\alpha h(t)\,dt$ converge.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq t^\alpha |f(t)| \leq t^\alpha h(t)$ et $\int_0^{+\infty} t^\alpha h(t)dt$ converge ; ainsi
$\int_0^{+\infty} t^\alpha |f(t)|dt$ converge.

Q3 a) soit $p\in\mathbb{N}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. La formule de Taylor avec reste intégrale nous permet d'écrire : $F(p+1)=F(p)+(p+1-p)F'(p)+\int_p^{p+1}(p+1-t)F''(t)\,dt$

Alors $\int_p^{p+1}f(t)dt=F(p+1)-F(p)=F'(p)+\int_p^{p+1}(p+1-t)F''(t)dt=f(p)+\int_p^{p+1}(p+1-t)f'(t)dt$

$\left|\int_p^{p+1}f(t)dt-f(p)\right|=\left|\int_p^{p+1}(p+1-t)f'(t)dt\right|\leqslant\int_p^{p+1}(p+1-t)|f'(t)|dt\underset{\substack{p+1-t\leqslant 1\\ |f'(t)|\geqslant 0}}{\leqslant}\int_p^{p+1}|f'(t)|dt.$

Ceci permet encore d'écrire que :

$$|f(p)-\int_p^{p+1}f(t)dt|\leqslant\int_p^{p+1}|f'(t)|dt.$$

b) soit $p\in\mathbb{N}^*$

$|v_p|=p^\alpha\,|f(p)-\int_p^{p+1}f(t)dt|\leqslant p^\alpha\int_p^{p+1}|f'(t)|dt=\int_p^{p+1}p^\alpha|f'(t)|dt\leqslant\int_p^{p+1}t^\alpha|f'(t)|dt$

Montrons alors que la série de terme général $\omega_p=\int_p^{p+1}t^\alpha|f'(t)|\,dt$ converge ; on aura alors la convergence de la série de terme général $|v_p|$ donc l'absolue convergence de la série de terme général v_p.

$\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\omega_p=\int_p^{p+1}t^\alpha|f'(t)|dt\geqslant 0$. Pour montrer que la série de terme général ω_p converge, il suffit de prouver que la suite de ses sommes partielles est majorée.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^n\omega_p=\sum_{p=1}^n\int_p^{p+1}t^\alpha|f'(t)|dt=\int_1^{n+1}t^\alpha|f'(t)|\,dt\leqslant\int_1^{+\infty}t^\alpha|f'(t)|dt$ car

$\int_1^{+\infty}t^\alpha|f'(t)|dt$ converge et $t\mapsto t^\alpha|f'(t)|$ est positive sur $[1,+\infty[$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^n\omega_p\leqslant\int_1^{+\infty}t^\alpha|f'(t)|dt$; $\left(\sum_{p=1}^n\omega_p\right)_{n\geqslant 1}$ est majorée.

D'après tout ce qui a été dit on peut affirmer que :

la série de terme général $v_p=p^\alpha\left[f(p)-\int_p^{p+1}f(t)dt\right]$ est absolument convergente.

c] $\forall p \in \mathbb{N}$, $p^\alpha f(p) = v_p + p^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt$

$\forall p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p^\alpha |f(p)| = |p^\alpha f(p)| \leq |v_p| + p^\alpha \left|\int_p^{p+1} f(t)\,dt\right| \leq |v_p| + p^\alpha \int_p^{p+1} |f(t)|\,dt$

$\forall p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p^\alpha |f(p)| \leq |v_p| + \int_p^{p+1} p^\alpha |f(t)|\,dt \underset{t \mapsto t^\alpha \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}{\leq} |v_p| + \int_p^{p+1} t^\alpha |f(t)|\,dt$

Comme la série de terme général v_p est absolument convergente, pour montrer que la série de terme général $p^\alpha |f(p)|$ converge il suffit de prouver que la série de terme général $\int_p^{p+1} t^\alpha |f(t)|\,dt$ converge, non ?

Pour cela il suffit de prouver que la suite $\left(\sum_{p=0}^{n} \int_p^{p+1} t^\alpha |f(t)|\,dt\right)$ est majorée car $\forall p \in \mathbb{N}$, $\int_p^{p+1} t^\alpha |f(t)|\,dt \geq 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^{n} \int_p^{p+1} t^\alpha |f(t)|\,dt = \int_0^{n+1} t^\alpha |f(t)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} t^\alpha |f(t)|\,dt$ puisque $t \mapsto t^\alpha |f(t)|$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} t^\alpha |f(t)|\,dt$ converge.

Alors la suite $\left(\sum_{p=0}^{n} \int_p^{p+1} t^\alpha |f(t)|\,dt\right)_{n \geq 0}$ est majorée par $\int_0^{+\infty} t^\alpha |f(t)|\,dt$.

Ceci achève de prouver la convergence de la série de terme général $\int_p^{p+1} t^\alpha |f(t)|\,dt$.

<u>Ainsi la série de terme général $p^\alpha |f(p)|$ converge.</u>

<u>d]</u> f est positive, ainsi $|f| = f$. $\forall t \in \mathbb{R}^*_+$, $t^\alpha f(t) = t^\alpha |f(t)|$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $p^\alpha f(p) = p^\alpha |f(p)|$.

D'après c] , si $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\,dt$ converge alors la série de terme général $p^\alpha f(p)$ converge.

Montrons la réciproque ; supposons que la série de terme général $p^\alpha f(p)$ converge.

Montrons que $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\,dt$ converge. $t \mapsto t^\alpha f(t)$ étant continue et positive sur $]0, +\infty[$ il suffit de prouver que $x \mapsto \int_0^{x} t^\alpha f(t)\,dt$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall p \in \mathbb{N},\ v_p = p^\alpha f(p) - p^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt$; $\forall p \in \mathbb{N},\ p^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt = p^\alpha f(p) - v_p$.

les séries de termes généraux $p^\alpha f(p)$ et v_p sont convergentes donc la série de terme général $p^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt$ converge.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^x t^\alpha f(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ t \mapsto t^\alpha f(t) \text{ est positive et} \\ x \leq E(x)+1}}{\leq} \int_0^{E(x)+1} t^\alpha f(t)\,dt = \sum_{p=0}^{E(x)} \int_p^{p+1} t^\alpha f(t)\,dt \leq \sum_{p=0}^{E(x)} \int_p^{p+1} (p+1)^\alpha f(t)\,dt = \sum_{p=0}^{E(x)} (p+1)^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt.$$

$(p+1)^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt \underset{+\infty}{\sim} p^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt$, $\forall p \in \mathbb{N},\ p^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt \geq 0$ et la série de terme général $p^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt$ converge ; alors la série de terme général $(p+1)^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt$ est convergente.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x t^\alpha f(t)\,dt \leq \sum_{p=0}^{E(x)} (p+1)^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ (p+1)^\alpha \int_p^{p+1} f(t)dt \geq 0}}{\leq} \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)^\alpha \int_p^{p+1} f(t)\,dt$

Ainsi $x \mapsto \int_0^x t^\alpha f(t)\,dt$ est majorée, alors $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\,dt$ converge.

Donc si f est positive, $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)\,dt$ converge si et seulement si la série de terme général $p^\alpha f(p)$ converge.