SUJET 20

On rappelle que si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels décroissante et qui converge vers zéro, les séries de terme généraux $(-1)^n\, u_n$ et $(-1)^{n+1}\, u_n$ convergent.

On rappelle également que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$.

Dans ce problème E est l'ensemble des fonctions numériques f

- continues, positives et décroissantes sur $]0,+\infty[$;
- vérifiant $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$;
- telles que $\displaystyle\int_0^1 t\, f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

PARTIE I

Dans toute cette partie, sauf mention du contraire, f est un élément de E.

Q0 Montrer que l'une des hypothèses caractérisant les éléments de E est redondante.

Q1 Trouver les réels α tels que $t \to t^{-\alpha}$ soit dans E.

Q2 Montrer que si x est un réel strictement positif, $t \to f(t+x)$ est encore un élément de E.

Q3 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Montrer que la série de terme général $(-1)^n\, f(a_n)$ converge.

Q4 On se propose de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$ pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$.

d) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\displaystyle 2\, f\big((k+1)\,\pi\big) \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\, f\big(k\,\pi\big)$.

En déduire qu'il existe un réel a_k appartenant à $[k\,\pi, (k+1)\,\pi]$ tel que :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t = 2\, f(a_k).$$

Montrer alors que la suite de terme général $\displaystyle\int_{\pi}^{n\pi} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ converge ; on pourra noter S sa limite.

e) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left| \int_{\pi\,\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t \right| = 0$ (on rappelle que f est décroissante).

En déduire que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ convergent.

Q5 *Question légèrement modifiée par rapport à la correction.*

Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \big(f(t)-f(t+\pi)\big)\,\sin t\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

Q6 Montrer que pour tout réel x strictement positif $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\sin(t-x)\,\mathrm{d}t$ converge.

En déduire que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout réel x strictement positif $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t$ converge.

Dans la suite on pose $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi_f(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\sin(t-x)\,\mathrm{d}t$.

Q7 a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si et seulement $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Q8 Trouver les réels strictement positifs α tels que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{-\alpha}\,\sin t\,\mathrm{d}t$ soit absolument convergente.

PARTIE II

---

f est encore ici un élément de E.

On note $\mathcal{S}_f$ l'ensemble des applications g de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifiant

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g''(x)+g(x)=f(x).$$

On note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des applications g de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifiant

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ g''(x)+g(x)=0.$$

Q1 a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+\,*}$, $\varphi_f(x) = \cos x \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t - \sin x \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\cos t\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que φ_f est un élément de $\mathcal{S}_f$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi_f(x) = 0$.

Q2 a) Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Soit u et v les restrictions de cos et sin à $]0,+\infty[$. Montrer que (u,v) est une famille libre de $\mathcal{S}_0$.

Q3 On se propose de montrer que $\mathcal{S}_0$ est de dimension 2 et que (u,v) en est une base.

a) Soit g un élément de $\mathcal{S}_0$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Exprimer $g^{(2k)}$ en fonction de g et $g^{(2k+1)}$ en fonction de g'.

b) On pose $\forall g \in \mathcal{S}_0,\ T(g) = \big(g(1), g'(1)\big)$. Montrer que T est linéaire.

Soit g un élément de $\operatorname{Ker} T$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ |g(x)| \leqslant \dfrac{|x-1|^{2p+1}}{(2p+1)!} \displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[1,x]} |g'(t)|$.

En déduire que g est la fonction nulle.

c) Conclure.

Q4 a) Montrer que $\mathcal{S}_f = \{\varphi_f + \lambda\, u + \mu\, v, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

b) Montrer que φ_f est le seul élément de $\mathcal{S}_f$ dont la limite en $+\infty$ est 0.

Q5 On se propose de montrer que φ_f est prolongeable par continuité en 0.

a) x et x_0 sont deux réels tels que $0 < x < x_0$. Montrer que $\left|\sin x \displaystyle\int_x^{x_0} f(t)\, \cos t\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{x_0} t\, f(t)\, \mathrm{d}t$.

b) Soit ε un réel strictement positif.

Montrer que l'on peut trouver un réel x_0 strictement positif tel que $\displaystyle\int_0^{x_0} t\, f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$

Montrer alors que l'on peut trouver un réel η tel que :

$$\forall x \in]0, \eta[, \quad \left|\sin x \int_x^{+\infty} f(t)\, \cos t\, \mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Que peut-on déduire de cela ?

c) Montrer alors que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \sin t\, \mathrm{d}t$ et conclure.

Q6 Dans cette question on suppose que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est croissante.

a) Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$.

Vérifier que $h : t \to f(x + t) - f(y + t)$ appartient à E. En déduire que φ_f est décroissante.

b) Trouver les réels α tels que la fonction $t \to t^{-\alpha}$ vérifie les hypothèses de cette question.

PARTIE III

Dans cette partie on pose $\forall t \in]0, +\infty[, f(t) = \dfrac{1}{t}\cdot$

Q1 Justifier très rapidement le fait que f soit dans E.

Q2 a) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que le domaine de définition de $B_k : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t$ est $]0, +\infty[$.

b) Déterminer le domaine de définition de $B_0 : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t$.

Q3 a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\, e^{|u|}$.

b) En déduire, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leqslant \dfrac{x}{2}$:

$$\left|\frac{B_k(x + h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\, B_{k+2}\Big(\frac{x}{2}\Big)$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel k, B_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad B_k'(x) = -B_{k+1}(x)$$

d) En déduire que B_0 est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0,+\infty[\ : B_0''(x) + B_0(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

Q4 a) Montrer, pour tout réel $x \in]0,+\infty[: 0 \leqslant B_0(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[,\ B_0(x) = \varphi_f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\sin(t-x)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t.$

Q5 a) Montrer : $\quad \forall x \in]0,+\infty[,\quad e^{-\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\cdot$

b) En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

c) Montrer enfin que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$

Q6 a) B_0 est-elle continue en 0 ?

b) Montrer que pour tout élément x de $]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{B_0(x)-B_0(0)}{x}\right| \geqslant \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1-e^{-x\,t}}{x\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \geqslant e^{-1} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

B_0 est-elle dérivable en 0 ?

PARTIE IV

Dans toute cette partie β est un réel strictement supérieur à 1.

Q1 a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}}\,\mathrm{d}u$ converge.

b) Montrer que $I_\beta = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^\beta)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{\beta} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}}\,\mathrm{d}u.$

Q2 Montrer que $\dfrac{\beta^2}{\beta-1}\, I_\beta = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,\mathrm{d}t.$

Q3 a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant 1-\cos t \leqslant 2$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant 1-\cos t \leqslant \dfrac{t^2}{2}\cdot$

b) Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 (1-t^{\frac{1}{\beta}})\,\mathrm{d}t + 2 \int_1^{+\infty} (t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,\mathrm{d}t.$

En déduire que $\displaystyle\lim_{\beta\to+\infty} \int_0^{+\infty} (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,\mathrm{d}t = 0.$

c) Donner alors un équivalent simple de I_β lorsque β tend vers $+\infty$.

Q4 a) Montrer que $|\beta\, I_\beta| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{1}{\beta}}}\,\mathrm{d}t.$

b) En déduire qu'il existe un réel C strictement positif et indépendant de β tel que $|I_\beta| \leqslant C$
