PARTIE I

Q1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $f_\alpha(t) = t^{-\alpha}$.

f_α est continue sur $]0,+\infty[$. f_α est paire sur $]0,+\infty[$.

f_α est décroissante sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $-\alpha \leq 0$ ie $\alpha \geq 0$.

$\int_0^1 f_\alpha(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ ie $\alpha < 2$.

$\lim_{t \to +\infty} f_\alpha(t) = 0 \iff \lim_{t \to +\infty} t^{-\alpha} = 0 \iff -\alpha < 0 \iff \alpha > 0$.

Finalement f_α appartient à E si et seulement si $\alpha \in]0,2[$.

<u>L'ensemble des réels α tels que $t \mapsto t^{-\alpha}$ soit dans E est $]0,2[$.</u>

Q2 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $h_x(t) = f(t+x)$.

$t \mapsto t+x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t+x \in \mathbb{R}_+^*$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi, par composition <u>h_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$</u>.

f est paire sur $\mathbb{R}_+^*$ donc <u>h_x est paire sur $\mathbb{R}_+^*$</u>.

$\forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+^*$, $t_1 \leq t_2 \Rightarrow t_1 + x \leq t_2 + x \Rightarrow f(t_1+x) \geq f(t_2+x) \Rightarrow h_x(t_1) \geq h_x(t_2)$.

<u>h_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.</u> f est décroissante

$\lim_{t \to +\infty} (t+x) = +\infty$ et $\lim_{u \to +\infty} f(u) = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} f(t+x) = 0$; <u>$\lim_{t \to +\infty} h_x(t) = 0$.</u>

f est continue en x donc $\lim_{t \to 0^+} f(t+x) = f(x)$; $\lim_{t \to 0^+} h_x(t) = f(x)$; $\lim_{t \to 0^+} (t h_x(t)) = 0$.

Alors $t \mapsto t h_x(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0.

Ainsi <u>$\int_0^1 t h_x(t)dt$ converge</u>. Ceci achève de montrer que $h_x \in E$.

<u>Pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ et tout f dans E, $t \mapsto f(t+x)$ appartient à E.</u>

Q3 Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(k\alpha)$. Notons que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge revient à montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge. Pour cela il suffit de prouver que les suites $(S_{2p-1})_{p \geq 1}$ et $(S_{2p})_{p \geq 1}$ convergent et ont même limite.

Notons que a fait ces deux suites sont adjacentes.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $S_{2p+1} - S_{2p-1} = (-1)^{2p} f(a_{2p}) + (-1)^{2p+1} f(a_{2p+1}) = f(a_{2p}) - f(a_{2p+1})$.

$0 < a_{2p} \leq a_{2p+1}$ donc $f(a_{2p}) \geq f(a_{2p+1})$ car f est décroissante. Alors $S_{2p+1} - S_{2p-1} \geq 0$.

$(S_{2p-1})_{p \geq 1}$ est croissante.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $S_{2p+2} - S_{2p} = (-1)^{2p+1} f(a_{2p+1}) + (-1)^{2p+2} f(a_{2p+2}) = -f(a_{2p+1}) + f(a_{2p+2}) \leq 0$

$\left\{ \begin{array}{l} a_{2p+1} \leq a_{2p+2} \\ f \text{ décroissante} \end{array} \right.$

$(S_{2p})_{p \geq 1}$ est décroissante.

• $\lim\limits_{p \to +\infty} a_{2p} = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ donc $\lim\limits_{p \to +\infty} f(a_{2p}) = 0$.

Alors $\lim\limits_{p \to +\infty} (S_{2p} - S_{2p-1}) = \lim\limits_{p \to +\infty} (-1)^{2p} f(a_{2p}) = \lim\limits_{p \to +\infty} f(a_{2p}) = 0$.

Ceci achève de montrer que $(S_{2p})_{p \geq 1}$ et $(S_{2p-1})_{p \geq 1}$ sont adjacentes ; ces deux suites sont alors convergentes et ont même limite.

Ainsi $(S_n)_{n \geq 1}$ converge. <u>La série de terme général $(-1)^n f(a_n)$ converge.</u>

Q4 <u>a)</u>
- $t \mapsto f(t) \sin t$ est continue sur $]0, \pi]$.
- $f(t) \sin t \underset{0}{\sim} t f(t)$.
- $\forall t \in]0, \pi]$, $t f(t) \geq 0$.
- $\int_0^1 t f(t) dt$ converge ... $\int_0^\pi t f(t) dt$ également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que <u>$\int_0^\pi f(t) \sin t \, dt$ converge.</u>

<u>b)</u> Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si k est pair : $\forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $|\sin t| \overset{\sin t \geq 0}{=} \sin t \overset{k \text{ est pair}}{=} (-1)^k \sin t$.

Si k est impair : $\forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $|\sin t| \overset{\sin t \leq 0}{=} -\sin t \overset{k \text{ est impair}}{=} (-1)^k \sin t$.

Dans les deux cas : $\forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $|\sin t| = (-1)^k \sin t$. Donc $\forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $(-1)^k |\sin t| = \sin t$.

Notons que $t \mapsto f(t) \sin t$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) \sin t \, dt = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) |\sin t| \, dt$. C'est également vrai pour $k = 0$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin t\,dt = (-1)^k \left[-\cos t\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} = (-1)^k \left[-\cos((k+1)\pi) + \cos(k\pi)\right]$.

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt = (-1)^k \left[-(-1)^{k+1} + (-1)^k\right] = (-1)^k \times 2(-1)^k = 2$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt = 2$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $f((k+1)\pi) \leq f(t) \leq f(k\pi)$ et $|\sin t| \geq 0$

$\forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $f((k+1)\pi)\,|\sin t| \leq f(t)\,|\sin t| \leq f(k\pi)\,|\sin t|$.

En intégrant il vient : $\displaystyle f((k+1)\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt \leq f(k\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt$ car $k\pi \leq (k+1)\pi$

Ainsi $\displaystyle 2 f((k+1)\pi) \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt \leq 2 f(k\pi)$.

Alors $\displaystyle \frac{1}{2}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt \in \left[f((k+1)\pi), f(k\pi)\right]$.

Or f est continue et décroissante sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ donc $\left[f((k+1)\pi), f(k\pi)\right] = f([k\pi, (k+1)\pi])$.

Donc $\displaystyle \frac{1}{2}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt \in f([k\pi, (k+1)\pi])$

Alors $\exists\, a_k \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $\displaystyle \frac{1}{2}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt = f(a_k)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, a_k \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,|\sin t|\,dt = 2 f(a_k)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k\pi \leq a_k \leq (k+1)\pi \leq a_{k+1}$. Alors :

1° la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est croissante ;

2° $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = +\infty$ car $\lim\limits_{k \to +\infty} (k\pi) = +\infty$;

3° $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k > 0$.

D'après Q3, la série de terme général $(-1)^k f(a_k)$ converge.

Il est alors de même de la série de terme général $(-1)^k \ell f(a_\ell)$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^\ell \ell f(a_\ell) = (-1)^\ell \int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt = \int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$.

La série de terme général $\int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$ est donc convergente.

Ainsi la suite de terme général $\sum_{\ell=1}^{n-1} \int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} f(t)\sin t\,dt$ converge.

Finalement <u>la suite de terme général</u> $\int_{\pi}^{n\pi} f(t)\sin t\,dt$ converge.

e) Une fois encore $t \mapsto f(t)\sin t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $x \in [\pi,+\infty[$. $\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi}) \leq \frac{x}{\pi} < \mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})+1$.

$\pi\,\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi}) \leq x < \pi\,\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})+\pi$. Notons que $0 \leq x - \pi\,\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi}) < \pi$.

$$\left|\int_{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)\sin t\,dt\right| \underset{\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f(t)\geq 0}{\leq} \int_{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)|\sin t|\,dt \leq \int_{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)\,dt \underset{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}{\leq} f(\pi\,\mathrm{Ent}(\tfrac{x}{\pi}))\int_{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} 1\,dt.$$

$$\left|\int_{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)\sin t\,dt\right| \leq f(\pi\,\mathrm{Ent}(\tfrac{x}{\pi}))\,(x-\pi\,\mathrm{Ent}(\tfrac{x}{\pi})) \leq \pi f(\pi\,\mathrm{Ent}(\tfrac{x}{\pi})).$$

$\lim_{x\to+\infty} (\pi\,\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})) = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} f(u) = 0$. Alors $\lim_{x\to+\infty} (\pi f(\pi\,\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi}))) = 0$.

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \left(\int_{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)\sin t\,dt\right) = 0$.

Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \int_{\pi}^{n\pi} f(t)\sin t\,dt$. $(S_n)_{n\geq 1}$ converge d'après d).

Notons S sa limite.

$\forall x \in [\pi,+\infty[$, $\int_{\pi}^{x} f(t)\sin t\,dt = \int_{\pi}^{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})} f(t)\sin t\,dt + \int_{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)\sin t\,dt = S_{\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})} + \int_{\pi\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)\sin t\,dt$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} S_{\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})} = S$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{\pi\,\mathrm{Ent}(\frac{x}{\pi})}^{x} f(t)\sin t\,dt = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{\pi}^{x} f(t)\sin t\,dt = S$. Ainsi $\underline{\underline{\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\sin t\,dt \text{ converge} \ldots \text{ et vaut } S}}$.

Or $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ converge donc $\underline{\underline{\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt \text{ converge}}}$.

Q5 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt + \int_{(k+1)\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt = (-1)^k f(a_k) + (-1)^{k+1} f(a_{k+1})$.

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt = (f(a_k) - f(a_{k+1})) \geq 0$$

car f est décroissante et $a_k \leq a_{k+1}$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin t\,dt \underset{u=t-\pi}{=} \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt + \int_0^{\pi} f(u+\pi)\underbrace{\sin(u+\pi)}_{-\sin u}\,du$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{\pi} (f(t) - f(t+\pi))\sin t\,dt \geq 0$$

car $\forall t \in [0,\pi]$, $\sin t \geq 0$

$\forall t \in [0,\pi]$, $f(t) - f(t+\pi) \geq 0$

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt \geq 0$. Remarque.. On pouvait traiter le cas $k \geq 1$ comme le cas $k=0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{n\pi} f(t)\sin t\,dt = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt \geq 0$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $\underline{\underline{\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt \geq 0}}$.

Q6 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto f(t)\sin(t-x)$ et $t \mapsto f(t)\cos t$ sont continues par $\underline{\underline{[x,+\infty[}}$.

$\forall A \in [x,+\infty[$, $\int_x^A f(t)\sin(t-x)\,dt \underset{u=t-x}{=} \int_0^{A-x} f(u+x)\sin u\,du$.

$\lim\limits_{A\to+\infty}(A-x)=+\infty$ donc $\int_x^{+\infty} f(t)\sin(t-x)\,dt$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} f(u+x)\sin u\,du$.

Or $u\mapsto f(u+x)$ appartient à E d'après Q2 donc $\int_0^{+\infty} f(u+x)\sin u\,du$ converge d'après Q4.

Ainsi pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{+\infty} f(t)\sin(t-x)\,dt$ converge.

En particulier $\int_{\pi/2}^{+\infty} f(t)\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt$ converge. Alors $-\int_{\pi/2}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ converge.

Finalement $\int_{\pi/2}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ converge. Or $t\mapsto f(t)\cos t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{\pi/2} f(t)\cos t\,dt$ existe.

Finalement pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ converge.

Q7 a) Soit $\ell\in\mathbb{N}^*$. $\int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt = 2f(a_\ell) = \frac{2}{\pi}\int_{(\ell+1)\pi}^{(\ell+2)\pi} f(a_\ell)\,dt$.

$\forall t\in[(\ell+1)\pi,(\ell+2)\pi]$, $f(a_\ell)\geqslant f((\ell+1)\pi)\geqslant f(t)$.

$a_\ell\in[\ell\pi,(\ell+1)\pi]$

Alors $\int_{(\ell+1)\pi}^{(\ell+2)\pi} f(a_\ell)\,dt \geqslant \int_{(\ell+1)\pi}^{(\ell+2)\pi} f(t)\,dt$. Donc $\int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{(\ell+1)\pi}^{(\ell+2)\pi} f(t)\,dt$.

$\forall \ell\in\mathbb{N}^*$, $\int_{\ell\pi}^{(\ell+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{(\ell+1)\pi}^{(\ell+2)\pi} f(t)\,dt$.

b) $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ converge et $\forall t\in]0,\pi]$, $f(t)\sin t\geqslant 0$.

Ainsi $\int_0^{\pi} |f(t)\sin t|\,dt$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ est absolument convergente.

* Il ne reste plus qu'à montrer que $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ est absolument convergente ssi et seulement ssi $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

* Supposons que $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

$\forall t \in [\pi, +\infty[$, $0 \leq |f(t)\sin t| \leq |f(t)| = f(t)$. Par règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrant que $\int_{\pi}^{+\infty} |f(t)\sin t|\,dt$ converge.

Alors $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ est absolument convergente.

* Réciproquement supposons que $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ soit absolument convergente.

Alors la suite de terme général $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)\sin t|\,dt$ converge car la fonction $x \mapsto \int_{\pi}^{x} |f(t)\sin t|\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)\sin t|\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)\sin t|\,dt$. Ainsi la série de terme général $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)\sin t|\,dt$ converge.

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{2}{\pi}\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin t|\,dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)\sin t|\,dt$ d'après les règles de comparaison des séries à termes positifs montrant alors la convergence de la série de terme général $\frac{2}{\pi}\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt$.

Alors la série de terme général $\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt$ converge.

Donc la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} f(t)\,dt = \int_{2\pi}^{(n+2)\pi} f(t)\,dt$ converge.

* On est alors de même de la suite de terme général $\int_{\pi}^{n\pi} f(t)\,dt$.

Notons que la suite $\left(\int_{\pi}^{n\pi} f(t)\,dt\right)_{n\geq 1}$ est croissante car f est positive sur $]0,+\infty[$.

Ainsi si nous notons L sa limite : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\int_{\pi}^{n\pi} f(t)\,dt \leq L$.

$\forall x\in[\pi,+\infty[$, $x\leq \pi\left(\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)+1\right)$ et f est positive sur $]0,+\infty[$.

Donc $\forall x\in[\pi,+\infty[$, $\int_{\pi}^{x} f(t)\,dt \leq \int_{\pi}^{\pi\left(\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)+1\right)} f(t)\,dt \leq L$.

f est continue et positive sur $[\pi,+\infty[$ et $x\mapsto \int_{\pi}^{x} f(t)\,dt$ est majorée sur $[\pi,+\infty[$.

Ainsi $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Ceci achève de montrer que :

$\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge... ou si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Q8 Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

1er cas.. $\alpha<2$. Alors $t\mapsto t^{-\alpha}$ appartient à $\mathcal{E}$. Ainsi $\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\sin t\,dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_{\pi}^{+\infty} t^{-\alpha}\,dt = \int_{\pi}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}}$ converge donc si et seulement si $\alpha>1$.

2ème cas.. $\alpha\geq 2$. $|t^{-\alpha}\sin t| \underset{0}{\sim} |t^{-\alpha}t| = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $\forall t\in]0,\pi]$, $\frac{1}{t^{\alpha-1}}\geq 0$.

Alors $\int_0^{\pi}|t^{-\alpha}\sin t|\,dt$ est de même nature que $\int_0^{\pi}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$ qui est divergente car $\alpha-1\geq 1$.

Finalement si $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\sin t\,dt$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha\in]1,2[$.

PARTIE II

Q1 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(t)\sin(t-x) = \cos x\, f(t)\sin t - \sin x\, f(t)\cos t$.

De plus f appartient à E donc les intégrales $\int_x^{+\infty} f(t)\sin(t-x)\,dt$, $\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ et $\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ existent.

Ainsi $\varphi_f(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\sin(t-x)\,dt = \cos x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) $t \mapsto f(t)\sin t$ est continue sur $]0,+\infty[$. Ainsi $x \mapsto \int_1^x f(t)\sin t$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que primitive de $t \mapsto f(t)\sin t$ sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt = -\int_1^x f(t)\sin t\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$.

Alors $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence d'une fonction constante et d'une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$. Notons que sa dérivée est $x \mapsto -f(x)\sin x$.

De même $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et de dérivée $x \mapsto -f(x)\cos x$.

Alors $\varphi_f : x \mapsto \cos x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi_f'(x) = -\sin x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \cos x\, f(x)\sin x - \cos x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt + \sin x\, f(x)\cos x$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi_f'(x) = -\sin x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \cos x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$.

$\sin$, $\cos$, $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$, $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt$ étant dérivables sur $]0,+\infty[$, φ_f' est dérivable sur $]0,+\infty[$. φ_f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi_f''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt + \sin x\, f(x)\sin x + \sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt + \cos x\, f(x)\cos x$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi_f''(x) = -\varphi_f(x) + (\sin^2 x + \cos^2 x) f(x) = -\varphi_f(x) + f(x)$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\varphi_f''(x) + \varphi_f(x) = f(x)$. Finalement φ_f appartient à $\mathcal{S}_f$.

$\int_1^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ converge donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt = 0$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $|\varphi_f(x)| = \left|\cos x\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| \leq |\cos x|\left|\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt\right| + |\sin x|\left|\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|$

$\forall x\in]0,+\infty[$, $|\varphi_f(x)| \leq \left|\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt\right| + \left|\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left|\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt\right| + \left|\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|\right] = 0$, par encadrement on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_f(x) = 0$.

(Q2) Notons H l'espace vectoriel des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$.

- $S_0 \subset H$.
- $0_H \in S_0$ $\quad (0_H'' + 0_H = 0_H + 0_H = 0_H)$.
- Soit $(g_1, g_2)\in H$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $\lambda g_1 + g_2$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$

et $\forall x\in]0,+\infty[$, $(\lambda g_1+g_2)''(x) + (\lambda g_1+g_2)(x) = \lambda g_1''(x) + g_2''(x) + \lambda g_1(x) + g_2(x) = \lambda(g_1''(x)+g_1(x)) + g_2''(x) + g_2(x) = \lambda\cdot 0 + 0 = 0$.

Ainsi $\lambda g_1 + g_2 \in S_0$.

Ceci achève alors de montrer que S_0 est un sous-espace vectoriel de H.

<u>Finalement S_0 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.</u>

b) u et v sont deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $u''(x) = \cos''x = -\cos x = -u(x)$ et $v''(x) = \sin''x = -\sin x = -v(x)$.

Alors $\forall x\in]0,+\infty[$, $u''(x) + u(x) = v''(x) + v(x) = 0$. <u>$u\in S_0$ et $v\in S_0$.</u>

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha u + \beta v = 0_H$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $\alpha\cos x + \beta\sin x = 0$. Ainsi $\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \beta\sin\frac{\pi}{2} = \alpha\cos 2\pi + \beta\sin 2\pi = 0$

Donc $\beta = \alpha = 0$. <u>(u,v) est une famille libre de S_0.</u>

(Q3) a) Soit g un élément de S_0. Montrons que pour tout k dans $\mathbb{N}$, g est k fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

→ C'est vrai pour $k=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$. Montrons la pour $k+1$.

g est k fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g \in S_0$.

Donc g est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g''=-g$.

Alors g'' est k fois dérivable sur $]0,+\infty[$ donc g est $k+2$ fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Ainsi g est $k+1$ fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et la récurrence s'achève !

Par conséquent g est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(2k)}=(-1)^k g$.

. C'est vrai pour $k=0$.

. Supposons que pour k dans $\mathbb{N}$ on ait $g^{(2k)}=(-1)^k g$.

En dérivant deux fois il vient : $g^{(2k+2)}=(-1)^k g''=(-1)^k(-g)=(-1)^{k+1}g$.

Ceci achève la récurrence.

$\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ g^{(2k)}=(-1)^k g.}$ En dérivant on obtient : $\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ g^{(2k+1)}=(-1)^k g'.}$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(g_1,g_2) \in S_0^2$.

$T(\lambda g_1+g_2)=((\lambda g_1+g_2)(1),(\lambda g_1+g_2)'(1))=(\lambda g_1(1)+g_2(1),\ \lambda g_1'(1)+g_2'(1))$

$T(\lambda g_1+g_2)=\lambda(g_1(1),g_1'(1))+(g_2(1),g_2'(1))=\lambda T(g_1)+T(g_2)$.

<u>T est une application linéaire de S_0 dans $\mathbb{R}^2$.</u>

Soit g un élément de $\ker T$. $g \in S_0$ et $g(1)=g'(1)=0$.

g est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(2k)}=(-1)^k g$ et $g^{(2k+1)}=(-1)^k g'$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(2k)}(1)=g^{(2k+1)}(1)=0$; $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(1)=0$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à g à l'ordre $2p$ en 1 donne : $\forall x \in]0,+\infty[$, $\left|g(x)-\sum_{k=0}^{2p}\frac{(x-1)^k}{k!}g^{(k)}(1)\right| \leq \frac{|x-1|^{2p+1}}{(2p+1)!}\max_{t\in[1,x]}|g^{(2p+1)}(t)|$

Alors $\forall x \in]0,+\infty[$, $\left| g(x) - \sum_{k=0}^{2p} \frac{(x-1)^k}{k!} \times 0 \right| \leq \frac{|x-1|^{2p+1}}{(2p+1)!} \max_{t \in [\overset{\leftrightarrow}{1,x}]} |(-1)^p g'(t)|$

donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $|g(x)| \leq \frac{|x-1|^{2p+1}}{(2p+1)!} \max_{t \in [\overset{\leftrightarrow}{1,x}]} |g'(t)|$ et ceci pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. La série de terme général $\frac{|x-1|^n}{n!}$ converge donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x-1|^n}{n!} = 0$

En particulier $\lim_{p \to +\infty} \frac{|x-1|^{2p+1}}{(2p+1)!} = 0$.

Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $|g(x)| \leq \frac{|x-1|^{2p+1}}{(2p+1)!} \max_{t \in [\overset{\leftrightarrow}{1,x}]} |g'(t)|$ et $\lim_{p \to +\infty} \left[\frac{|x-1|^{2p+1}}{(2p+1)!} \max_{t \in [\overset{\leftrightarrow}{1,x}]} |g'(t)| \right] = 0$

En faisant tendre p vers $+\infty$ il vient : $|g(x)| \leq 0$ donc $g(x) = 0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) = 0$. $g = 0_H$ ou $0_{\mathcal{S}_0}$. g est la fonction nulle.

Ce qui précède montre que $\operatorname{Ker} T = \{0_{\mathcal{S}_0}\}$.

Alors $\dim \mathcal{S}_0 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T \leq 2$ car $\operatorname{Im} T \subset \mathbb{R}^2$.

Donc $\dim \mathcal{S}_0 \leq 2$. Or (u,v) est une famille libre de $\mathcal{S}_0$ de cardinal 2 donc $\dim \mathcal{S}_0 \geq 2$.

Finalement $\dim \mathcal{S}_0 = 2$. Comme (u,v) est une famille libre de $\mathcal{S}_0$ de cardinal 2, (u,v) est une base de $\mathcal{S}_0$.

Q4 a) Rappelons que $\varphi_f \in \mathcal{S}_f$. Soit h une application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

$h \in \mathcal{S}_f \Leftrightarrow h'' + h = f \Leftrightarrow h'' + h = \varphi_f'' + \varphi_f \Leftrightarrow (h - \varphi_f)'' + (h - \varphi_f) = 0_H$.

$h \in \mathcal{S}_f \Leftrightarrow h - \varphi_f \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ h - \varphi_f = \lambda u + \mu v \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,$

$h = \varphi_f + \lambda u + \mu v$. Ainsi $\mathcal{S}_f = \{\varphi_f + \lambda u + \mu v,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

b) Notons que d'après Q 1 b), φ_f est un élément de $\mathcal{S}_f$ tel que $\lim_{x\to+\infty} \varphi_f(x)=0$

Soit $h \in \mathcal{S}_f$ tel que $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$.

$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $h=\varphi_f+\lambda u+\mu v$. Alors $\forall x\in]0,+\infty[$, $\lambda u(x)+\mu v(x)=h(x)-\varphi_f(x)$

Donc $\lim_{x\to+\infty}(\lambda u(x)+\mu v(x))=0-0=0$; $\lim_{x\to+\infty}(\lambda\cos x+\mu\sin x)=0$.

Or $\lim_{n\to+\infty}(2n\pi)=\lim_{n\to+\infty}\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}(\lambda\cos(2n\pi)+\mu\sin(2n\pi))=\lim_{n\to+\infty}\left(\lambda\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\mu\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lambda\cos(2n\pi)+\mu\sin(2n\pi)=\lambda$ et $\lambda\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\mu\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\mu$.

Donc $\lambda=\mu=0$. Ainsi $h=\varphi_f$.

<u>φ_f est le seul élément de $\mathcal{S}_f$ ayant la limite en $+\infty$ est 0.</u>

Q5 a) Soit x_0 part donnée réelle tels que $0<x<x_0$.

$$\left|\sin x\int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt\right| = |\sin x|\left|\int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt\right| \underset{x\le x_0}{\le} |x|\int_x^{x_0}|f(t)||\cos t|\,dt \le \int_x^{x_0}|x||f(t)|\,dt$$

$$\left|\sin x\int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt\right| \le \int_x^{x_0}|x||f(t)|\,dt = \int_x^{x_0} x|f(t)|\,dt \le \int_x^{x_0} t|f(t)|\,dt = \int_x^{x_0} t f(t)\,dt.$$

Or $t\mapsto tf(t)$ est positive sur $]0,+\infty[$ et $\int_0^{x_0} tf(t)\,dt$ converge (car $\int_0^1 tf(t)\,dt$ converge).

Donc $\int_x^{x_0} tf(t)\,dt \le \int_0^{x_0} tf(t)\,dt$.

Alors $\left|\sin x\int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt\right| \le \int_0^{x_0} tf(t)\,dt$ pour $(x,x_0)\in]0,+\infty[^2$ tels que $x<x_0$.

b) On se propose de montrer en utilisant la définition que $\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right)=0$.

c'est à dire que $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists \eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\,]0,\eta[,\ \left|\sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|<\varepsilon$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. $\int_0^1 tf(t)dt$ converge donc $\lim_{y\to 0^+}\left(\int_0^y tf(t)dt\right)=0$.

Alors on peut trouver un x_0 dans $]0,+\infty[$ tel que :

$$\int_0^{x_0} tf(t)dt = \left|\int_0^{x_0} tf(t)\,dt\right| < \varepsilon/2.$$

Soit $x\in\,]0,x_0[$.

$$\left|\sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| = \left|\sin x\int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt + \sin x\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| \le \left|\sin x\int_x^{x_0} f(t)\cos t\,dt\right| + \left|\sin x\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|$$

$$\left|\sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| \le \int_0^{x_0} tf(t)dt + \left|\sin x\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sin x\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|.$$

Or $\lim_{x\to 0}\left(\sin x\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right)=0$ donc $\exists \eta'\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\,]0,\eta'[,\ \left|\sin x\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi $\forall x\in\,]0,x_0[\cap]0,\eta'[,\ \left|\sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Posons $\eta=\mathrm{Inf}(x_0,\eta')$. $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\,]0,\eta[,\ \left|\sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|<\varepsilon$.

Ceci achève de montrer que :

$$\underline{\underline{\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists\eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall x\in\,]0,\eta[,\ \left|\sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right|<\varepsilon.}}$$

Ainsi $\underline{\underline{\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x\int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right)=0}}$.

c) f appartient à E donc $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$ converge.

Alors $\lim_{x\to 0^+}\left(\cos x\int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt\right) = 1\times\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$.

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi_f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\cos x \int_x^{+\infty} f(t)\sin t\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} f(t)\cos t\,dt\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt.$$

$\lim_{x\to 0^+} \varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$. φ_f est donc prolongeable par continuité en 0.

Q6 a) Rappelons que $h_x : t \mapsto f(t+x)$ et $h_y : t \mapsto f(t+y)$ sont deux éléments de E. Alors h_x et h_y sont continues sur $]0,+\infty[$, $\int_0^1 t h_x(t)\,dt$ et $\int_0^1 t h_y(t)\,dt$ convergent, $\lim_{t\to+\infty} h_x(t) = \lim_{t\to+\infty} h_y(t) = 0$.

Alors par différence h est continue sur $]0,+\infty[$, $\int_0^1 t h(t)\,dt$ converge et $\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $x+t < y+t$ donc $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(x+t) \geq f(y+t)$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $h(t) = f(x+t) - f(y+t) \geq 0$. $\forall t \in]0,+\infty[$, $h(t) \geq 0$.

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc $h : t \mapsto f(x+t) - f(y+t)$ l'est également car $t \mapsto x+t$ et $t \mapsto y+t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in]0,+\infty[$, $x+t > 0$ et $y+t > 0$.
De plus $\forall t \in]0,+\infty[$, $h'(t) = f'(x+t) - f'(y+t) \leq 0$ car f' est croissante sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[$, $x+t \leq y+t$.
$\forall t \in]0,+\infty[$, $h'(t) \leq 0$. h est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Ceci achève de prouver que h appartient à E. D'après I Q5 on a alors : $\int_0^{+\infty} h(t)\sin t\,dt \geq 0$. Donc $\int_0^{+\infty} (f(x+t) - f(y+t))\sin t\,dt \geq 0$

donc $\int_0^{+\infty} f(x+t)\sin t\,dt \geq \int_0^{+\infty} f(y+t)\sin t\,dt$ (les deux intégrales convergent car $t \mapsto f(x+t)$ et $t \mapsto f(y+t)$ sont dans E). Deux petits changements de variable très simples donnent alors $\int_x^{+\infty} f(u)\sin(u-x)\,du \geq \int_y^{+\infty} f(v)\sin(v-y)\,dv$; $\varphi_f(x) \geq \varphi_f(y)$.

$\forall (x,y) \in]0,+\infty[$, $x<y \Rightarrow \varphi_f(x) \geq \varphi_f(y)$. $\underline{\varphi_f \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[}$.

b) Pour $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(t)=t^{-\alpha}$. f appartient à E si et seulement si $\alpha \in]0,1[$. Supposons que $\alpha \in]0,1[$.

Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[$, $f'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} = \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}$.

$t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc $f' : t \mapsto \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

Ainsi $\underline{t \mapsto t^{-\alpha} \text{ vérifie les hypothèses de cette question si et seulement si } \alpha \in]0,1[}$.

PARTIE III

Q1 $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(t) = t^{-1}$ et $1 \in]0,2[$. D'après I Q1 $\underline{f \text{ appartient à } E}$.

Q2 a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$t \mapsto \dfrac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ est

alors de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$

$\forall t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} t^{k-2} e^{-xt}$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{k-2} e^{-xt}\,dt$.

1er cas.. $x \leqslant 0$. $\forall t \in [1,+\infty[$, $t^{k-2} e^{-xt} \geqslant t^{k-2} = \dfrac{1}{t^{2-k}} \geqslant 0$.

De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-k}}$ est divergente car $2-k \leqslant 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{k-2} e^{-xt}\,dt$ diverge ; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ sont donc divergentes.

2ème cas.. $x > 0$ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\, t^{k-2} e^{-xt} = \lim_{t\to+\infty} t^k e^{-xt} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{x^k}(xt)^k e^{-xt}\right) = 0$ par croissance comparée.

Alors 1) $t^{k-2} e^{-xt} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; 2) $\forall t \in [1,+\infty[$, $t^{k-2} e^{-xt} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$;

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{k-2} e^{-xt}\,dt$ converge.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}$ sont alors convergentes.

Ainsi, si $k \in \mathbb{N}^*$, le domaine de définition de $B_k : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ est $]0,+\infty[$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

1er cas. $x \geq 0$. $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ converge ; $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ également.

$\frac{1+t^2}{t} \underset{+\infty}{\sim} t$

2ème cas. $x < 0$. $\lim_{t \to +\infty} \frac{1/t}{\frac{e^{-xt}}{1+t^2}} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1+t^2}{t} e^{xt}\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(t e^{xt}\right) = 0$.

$x < 0$ + croissance comparée

Alors $\frac{1}{t} = o\left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right)$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t} \geq 0$ et $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.

Le critère de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives donnant la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ diverge.

$B_0 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ a pour domaine de définition $[0,+\infty[$.

Q3 a) $\ell : u \mapsto e^u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 2 à ℓ donne :

$\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\ell(u) - \ell(0) - (u-0)\ell'(0)\right| \leq \frac{|u-0|^2}{2!} \sup_{\xi \in [0,u]} |\ell''(\xi)|$.

Alors $\forall u \in \mathbb{R}$, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \sup_{\xi \in [0,u]} |e^\xi| = \frac{u^2}{2} \sup_{\xi \in [0,u]} e^\xi = \frac{u^2}{2} e^{\max(0,u)} \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

$\forall u \in \mathbb{R}$, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

---

b) $x \in \mathbb{R}_+^*$. $h \in \mathbb{N}$. $h \in \mathbb{R}$ et $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$.

Notons que $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + h \geq x - |h| \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ et $\frac{x}{2} \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $B_\ell(x+h)$, $B_\ell(x)$, $B_{h+1}(x)$ et $B_{h+2}\left(\frac{x}{2}\right)$ existent !

Posons $\Delta(h) = \dfrac{B_h(x+h) - B_h(x)}{h} + B_{h+1}(x)$.

$$h\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{t^h e^{-(x+h)t}}{1+t^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^h e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} h\,\frac{t^{h+1} e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

$$h\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \frac{t^h e^{-xt}}{1+t^2}\left[e^{-ht} - 1 + ht\right]dt.$$ Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left|\int_0^A \frac{t^h e^{-xt}}{1+t^2}\left[e^{-ht} - 1 + ht\right]dt\right| \leq \int_0^A \frac{t^h e^{-xt}}{1+t^2}\left|e^{-ht} - 1 + ht\right|dt \leq \int_0^A \frac{t^h e^{-xt}}{1+t^2}\,\frac{|h t|^2}{2}\,e^{|ht|}\,dt.$$

$$\left|\int_0^A \frac{t^h e^{-xt}}{1+t^2}\left[e^{-ht} - 1 + ht\right]dt\right| \leq \frac{|h|^2}{2}\int_0^A \frac{t^{h+2}}{1+t^2}\,e^{-xt}e^{|h|t}\,dt \underset{|h| \leq \frac{x}{2}}{\leq} \frac{|h|^2}{2}\int_0^A \frac{t^{h+2}}{1+t^2}\,e^{-xt}e^{\frac{x}{2}t}\,dt.$$

Ainsi $\displaystyle\left|\int_0^A \frac{t^h e^{-xt}}{1+t^2}\left[e^{-ht} - 1 + ht\right]dt\right| \leq \frac{|h|^2}{2}\int_0^A \frac{t^{h+2}}{1+t^2}\,e^{-\frac{x}{2}t}\,dt.$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^h e^{-xt}}{1+t^2}\left[e^{-ht} - 1 + ht\right]dt$ existe et vaut $h\Delta(h)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{h+2}}{1+t^2}\,e^{-\frac{x}{2}t}\,dt$ qui

est vaut $B_{h+2}\left(\frac{x}{2}\right)$. En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient alors :

$|h\Delta(h)| \leq \dfrac{|h|^2}{2} B_{h+2}\left(\frac{x}{2}\right)$. Comme h n'est pas nul : $|\Delta(h)| \leq \dfrac{|h|}{2} B_{h+2}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Ainsi $\displaystyle\left|\frac{B_h(x+h) - B_h(x)}{h} + B_{h+1}(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} B_{h+2}\left(\frac{x}{2}\right)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et si $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$.

c) Soit $h \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| \leq \frac{x}{2} \Rightarrow 0 \leq \left|\dfrac{B_h(x+h) - B_h(x)}{h} + B_{h+1}(x)\right| \leq \dfrac{|h|}{2} B_{h+2}\left(\frac{x}{2}\right)$ et

$\displaystyle\lim_{h \to 0}\left(\frac{|h|}{2} B_{h+2}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0$. Alors par encadrement $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{B_h(x+h) - B_h(x)}{h} = -B_{h+1}(x)$.

Donc B_h est dérivable en x et $B'_h(x) = -B_{h+1}(x)$.

Pour tout h dans $\mathbb{N}$, B_h est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $B'_h(x) = -B_{h+1}(x)$.

d) B_0 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $B_0'(x) = -B_1(x)$

B_1 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $B_1'(x) = -B_2(x)$.

Alors B_0 est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $B_0''(x) = B_2(x)$.

Or B_2 est dérivable donc continue sur $]0,+\infty[$, ainsi B_0'' est continue sur $]0,+\infty[$.

Finalement B_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Remarque.. B_0 est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $B_0^{(k)}(x) = (-1)^k B_k(x)$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $B_0(x) + B_0''(x) = B_0(x) + B_2(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $B_0(x) + B_0''(x) = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^A = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{-xA}}{-x} - \frac{1}{-x} \right] = \frac{1}{x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $B_0(x) + B_0''(x) = \frac{1}{x}$.

(Q4) a) Soit $x \in]0,+\infty[$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ et $\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$.

Alors $B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \geq 0$ et $B_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \geq 0$.

Donc $0 \leq B_0(x) \leq B_0(x) + B_2(x) = B_0(x) + B_0''(x) = \frac{1}{x}$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} B_0(x) = 0$.

b) Notons $\hat{B}_0$ la restriction de B_0 à $]0,+\infty[$ et utilisons II.

- $\hat{B}_0$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
- $\forall x \in]0,+\infty[$, $\hat{B}_0(x) + \hat{B}_0''(x) = B_0(x) + B_0''(x) = \frac{1}{x} = f(x)$
- $\lim_{x \to +\infty} \hat{B}_0(x) = \lim_{x \to +\infty} B_0(x) = +\infty$.

Alors $\hat{B}_0 \in \mathcal{S}_f$ et $\lim_{x \to +\infty} \hat{B}_0(x) = 0$ donc d'après II Q4 $\hat{B}_0 = \varphi_f$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[$, $B_0(x) = \varphi_f(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\sin(t-x)\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$.

Q5 a) Soit $x \in]0,+\infty[$.

→ $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} [\arctan A - \arctan 0] = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$.

→ $\forall t \in [0,+\infty[$, $e^{-xt} \leq 1$ et $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$; $\forall t \in [0,+\infty[$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. $B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

→ $\forall t \in [\frac{1}{\sqrt{x}},+\infty[$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ donc $\int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq 0$.

Alors $B_0(x) = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

$\forall t \in [0, \frac{1}{\sqrt{x}}]$, $e^{-xt} \geq e^{-x\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{-\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$. Alors

$\forall t \in [0, \frac{1}{\sqrt{x}}]$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2}$. Ainsi : $\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq e^{-\sqrt{x}} \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ car $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$.

Donc $B_0(x) \geq \int_0^{1/x} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq e^{-\sqrt{x}} \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2}$.

Finalement $\forall x \in]0,+\infty[$, $e^{-\sqrt{x}} \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2} \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Alors $\lim_{x\to 0^+} e^{-\sqrt{x}} \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t^2} = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Par encadrement il vient $\lim_{x\to 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}$.

Remarque.. $B_0(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi B_0 est continue en 0.

c) Rappelons que $\lim_{x\to 0^+} \varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ d'après II Q5

Or $\forall x \in]0,+\infty[$, $B_0(x) = \varphi_f(x)$, donc $\lim_{x\to 0^+} B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Or $\lim_{x\to 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Q6 a) Oui car $\lim_{x\to 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = B_0(0)$.

b) Soit $x \in]0,+\infty[$. $\frac{B_0(x)-B_0(0)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$$\left|\frac{B_0(x)-B_0(0)}{x}\right| = \frac{1}{x}\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}-1}{1+t^2}\,dt\right| = \frac{1}{x}\left|-\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\right| = \frac{1}{x}\left|\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\right|.$$

Or $\forall t \in [0,+\infty[$, $\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ donc $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq 0$.

Alors $\left|\frac{B_0(x)-B_0(0)}{x}\right| = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

$\forall t \in [\frac{1}{x},+\infty[$, $\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ donc $\int_{1/x}^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq 0$.

Alors $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{1/x}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_{1/x}^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq \int_0^{1/x}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

Comme $\frac{1}{x} > 0$: $\left|\frac{B_0(x)-B_0(0)}{x}\right| = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geq \frac{1}{x}\int_0^{1/x}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

Rappelons que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u \geq 1+u$ ($x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ ...)

Donc $\forall u \in \mathbb{R}$, $1 \geq (1+u)e^{-u} = e^{-u} + ue^{-u}$; $\forall u \in \mathbb{R}$, $1-e^{-u} \geq ue^{-u}$.

Alors $\forall t \in [0,\frac{1}{x}]$, $1-e^{-xt} \geq xte^{-xt}$ et $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$.

Donc $\forall t \in [0,\frac{1}{x}]$, $\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2} \geq x\frac{t}{1+t^2}e^{-xt}$ ou

$\forall t \in [0,\frac{1}{x}]$, $\frac{1}{x}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2} \geq \frac{t}{1+t^2}e^{-xt}$.

Or $\forall t \in [0,\frac{1}{x}]$, $e^{-xt} \geq e^{-1}$ et $\frac{t}{1+t^2} \geq 0$ donc $\forall t \in [0,\frac{1}{x}]$, $\frac{1}{x}\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2} \geq e^{-1}\frac{t}{1+t^2}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{x}\,\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geqslant e^{-1}\int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

Finalement $\forall x \in]0,+\infty[,\ \left|\dfrac{B_0(x)-B_0(0)}{x}\right| \geqslant \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{x}\,\frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geqslant e^{-1}\int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{t\,dt}{1+t^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^{1/x} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln x^2$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \left|\dfrac{B_0(x)-B_0(0)}{x}\right| \geqslant e^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln x\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(e^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln x\right)\right) = +\infty$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{B_0(x)-B_0(0)}{x}\right| = +\infty$. Ainsi $x \mapsto \dfrac{B_0(x)-B_0(0)}{x}$ n'a pas de limite finie en 0. B_0 n'est pas dérivable en 0 .

PARTIE IV

Q1 a) $1-\frac{1}{\beta} \in]0,1[\subset]0,2[$ donc $u \mapsto u^{-(1-\frac{1}{\beta})}$ appartient à E.

Alors $\int_0^{+\infty} u^{-(1-\frac{1}{\beta})} \sin u \, du$ converge. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du$ converge.

b) $t \mapsto \sin(t^\beta)$ est continue sur $]0,+\infty[$ (... et prolongeable sur $[0,+\infty[$!)

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_\varepsilon^A \sin(t^\beta)\,dt = \int_{\varepsilon^\beta}^{A^\beta} \sin u \, \frac{1}{\beta} u^{\frac{1}{\beta}-1} du = \frac{1}{\beta}\int_{\varepsilon^\beta}^{A^\beta} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du.$$

$u = t^\beta$; $t = u^{1/\beta}$

$dt = \frac{1}{\beta} u^{1/\beta - 1}$

$\lim_{A\to+\infty} A^\beta = +\infty$ et $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^\beta = 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} \sin(t^\beta)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du$.

Q2 Posons $\forall t \in]0,+\infty[$, $x(t) = 1-\cos t$ et $y(t) = -\frac{\beta}{\beta-1} t^{-1+\frac{1}{\beta}} + t^{-1}$

x et y sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $x'(t) = \sin t$ et $y'(t) = -\frac{\beta}{\beta-1}\left(-1+\frac{1}{\beta}\right) t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2} = t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$.

En intégrant par parties il vient :

$$\int_\varepsilon^A (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt = \left[(1-\cos t)\left(-\frac{\beta}{\beta-1} t^{-1+\frac{1}{\beta}} + t^{-1}\right)\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \sin t \left(-\frac{\beta}{\beta-1} t^{-1+\frac{1}{\beta}} + t^{-1}\right) dt$$

$$\int_\varepsilon^A (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt = -\frac{\beta}{\beta-1}\frac{1-\cos A}{A^{1-1/\beta}} + \frac{1-\cos A}{A} + \frac{\beta}{\beta-1}\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}\varepsilon^{1/\beta} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} +$$

$$\frac{\beta}{\beta-1}\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}\,dt - \int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}\,dt$ (resp. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$) converge et vaut βJ_β (resp. $\frac{\pi}{2}$).

2°. $|1-\cos A| \leq 1+|\cos A| \leq 2$ donc $0 \leq \left|\frac{1-\cos A}{A^{1-1/\beta}}\right| \leq \frac{2}{A^{1-1/\beta}}$ et $0 \leq \left|\frac{1-\cos A}{A}\right| \leq \frac{2}{A}$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{2}{A^{1-1/\beta}} = 0$ ($1-1/\beta > 0$) et $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{2}{A} = 0$. Par encadrement il vient :

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1-\cos A}{A^{1-1/\beta}} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1-\cos A}{A} = 0$$

3° $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}\varepsilon^{1/\beta} \underset{0}{\sim} \frac{\varepsilon^2/2}{\varepsilon}\varepsilon^{1/\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{1+\frac{1}{\beta}}$ et $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{0}{\sim} \varepsilon/2$.

Alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}\varepsilon^{1/\beta}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$.

1°, 2° et 3° montrent alors que $\int_0^{+\infty}(1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}}-t^{-2})\,dt$ existe et vaut :

$$\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1-1/\beta}}\,dt - \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta^2}{\beta-1}I_\beta - \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\int_0^{+\infty}(1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}}-t^{-2})\,dt$ converge et :

$$\frac{\beta^2}{\beta-1}I_\beta = \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty}(1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}}-t^{-2})\,dt.$$

Q3 a) $\forall t\in\mathbb{R},\ -1\leq\cos t\leq 1$. $\forall t\in\mathbb{R},\ -1\leq -\cos t\leq 1$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ 0\leq 1-\cos t\leq 2$.

$\forall y\in[0,+\infty[,\ \cos y\leq 1$.

$\forall y\in[0,+\infty[,\ \int_0^y \cos y\,dy \leq \int_0^y 1\,dy$; $\forall y\in[0,+\infty[,\ [\sin y]_0^y \leq y$

$\forall y\in[0,+\infty[,\ \sin y\leq y$.

Alors $\forall t\in[0,+\infty[,\ \int_0^t \sin y\,dy \leq \int_0^t y\,dy$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ [-\cos y]_0^t \leq \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^t$.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ 1-\cos t\leq \frac{t^2}{2}$.

$\forall t \in]-\infty, 0[$, $-t \in]0, +\infty[$.

$\forall t \in]-\infty, 0[$, $1 - \cos(-t) \leq \frac{(-t)^2}{2}$ d'après ce qui précède.

$\forall t \in]-\infty, 0[$, $1 - \cos t \leq t^2/2$.

Finalement $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - \cos t \leq t^2/2$. Donc $\underline{\underline{\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leq 1 - \cos t \leq t^2/2}}$.

b) $\left|\int_0^{+\infty} (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right| = \left|\int_0^1 (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt + \int_1^{+\infty} (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right|$

$$\left|\int_0^{+\infty} (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right| \underset{\boxed{(\bullet)}}{\leq} \left|\int_0^1 (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right| + \left|\int_1^{+\infty} (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right|.$$

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$.

$$\left|\int_\varepsilon^1 (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right| \leq \int_\varepsilon^1 |1-\cos t|\,|t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}|\,dt \underset{\uparrow}{\leq} \int_\varepsilon^1 \frac{t^2}{2}\,|t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}|\,dt$$

$|1-\cos t| = 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$, $|t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}| \geq 0$ et $\varepsilon \leq 1$.

$$\left|\int_\varepsilon^1 (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right| \leq \int_\varepsilon^1 |t^{1/\beta} - 1|\,dt = \int_\varepsilon^1 (1 - t^{1/\beta})\,dt.$$

$\lim_{\varepsilon \to 0} (1 - t^{1/\beta}) = 1$ donc $\int_0^1 (1 - t^{1/\beta})\,dt$ existe.

En faisant tendre ε vers 0 il vient : $\left|\int_0^1 (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right| \underset{\boxed{(\bullet\bullet)}}{\leq} \int_0^1 (1 - t^{1/\beta})\,dt$.

<u>Remarque</u> 1.- $\int_0^1 (1 - t^{1/\beta})\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[t - \frac{t^{1/\beta+1}}{1/\beta+1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \varepsilon - \frac{1}{1/\beta+1} + \frac{\varepsilon^{1/\beta+1}}{1/\beta+1}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\beta}+1}$

Donc $\int_0^1 (1 - t^{1/\beta})\,dt = 1 - \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}$.

Soit $A \in]1, +\infty[$

$$\left|\int_1^A (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right| \leq \int_1^A |1-\cos t|\,|t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}|\,dt \underset{\uparrow}{\leq} 2\int_1^A t^{-2}\,|t^{1/\beta} - 1|\,dt$$

$|1-\cos t| = 1 - \cos t \leq 2$

$$\left|\int_1^A (1-\cos t)(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt\right| \leq 2\int_1^A t^{-2}(t^{1/\beta} - 1)\,dt = 2\int_1^A (t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2})\,dt.$$

$$\text{a} \int_1^A \left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt = \left[\frac{t^{-1+\frac{1}{\beta}}}{-1+\frac{1}{\beta}} + \frac{1}{t}\right]_1^A = \frac{\beta}{1-\beta}\,\frac{1}{A^{1-\frac{1}{\beta}}} + \frac{1}{A} - \frac{\beta}{1-\beta} - 1.$$

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \left(t^{-1+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt = \underset{1/\beta<1.}{\frac{\beta}{1-\beta}} \times 0 + 0 - \frac{\beta}{1-\beta} - 1 = \frac{\beta}{\beta-1} - 1 = \frac{1}{\beta-1}.$$

Ainsi $\int_1^{+\infty} \left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt$ converge.

<u>Remarque 2</u>. $-\int_1^{+\infty} \left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt = \frac{1}{\beta-1}$.

Alors $1 \int_1^{+\infty} (1-\cos t)\left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt \overset{\boxed{(\cdot\cdot\cdot)}}{\leq} 2 \int_1^{+\infty} \left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt.$

(·), (··) et (···) donnent alors :

$$\left|\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - t^{1/\beta}\right) dt + 2\int_1^{+\infty} \left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt.$$

Les remarques 1 et 2 fournissent :

$$\left|\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt\right| \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\beta+1} + 2\,\frac{1}{\beta-1}$$

$$\lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{\beta+1} = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{\beta-1} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{\beta+1} + 2\,\frac{1}{\beta-1}\right) = 0.$$

Il vient alors par encadrement $\lim_{\beta\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt\right) = 0$.

Alors $\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\beta^2}{\beta-1} S_\beta\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} (1-\cos t)\left(t^{-2+\frac{1}{\beta}} - t^{-2}\right) dt\right) = \frac{\pi}{2}$.

a $\frac{\pi}{2} \neq 0$ donc $\frac{\beta^2}{\beta-1} S_\beta \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$; $S_\beta \underset{+\infty}{\sim} \frac{\beta-1}{\beta^2}\,\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\beta}{\beta^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\beta}$.

$$I_\beta \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\beta}.$$

Q4 a) $u \mapsto u^{-(1-\frac{1}{\beta})}$ est dans E car $1-\frac{1}{\beta} \in]0,1[$.

Alors $u \mapsto (u+\pi)^{-(1-\frac{1}{\beta})}$ est également dans E d'après I Q2.

I Q5 montre alors que $\int_0^{+\infty} u^{-(1-\frac{1}{\beta})} \sin u \, du$ et $\int_0^{+\infty} (u+\pi)^{-(1-\frac{1}{\beta})} \sin u \, du$ (convergent et) sont positives.

Alors $\beta J_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{(u+\pi)^{1-\frac{1}{\beta}}} du \geq 0$.

$$|\beta J_\beta| = \beta I_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du + \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du.$$

$$\forall A \in [\pi, +\infty[, \quad \int_\pi^A \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du \underset{t=u-\pi}{=} \int_0^{A-\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{(t+\pi)^{1-\frac{1}{\beta}}} dt = -\int_0^{A-\pi} \frac{\sin t}{(t+\pi)^{1-1/\beta}} dt$$

Alors $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(t+\pi)^{1-1/\beta}} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{(u+\pi)^{1-1/\beta}} du \leq 0$.

Donc $\underline{\underline{|\beta J_\beta| \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u^{1-\frac{1}{\beta}}} du}}$.

b) $-\frac{1}{\beta} < 1$ donc $\int_0^{\pi} \frac{du}{u^{-\frac{1}{\beta}}}$ existe.

Or $\forall u \in]0, \pi]$, $\frac{\sin u}{u^{1-1/\beta}} \leq \frac{u}{u^{1-1/\beta}}$. Ainsi $|\beta J_\beta| \leq \int_0^{\pi} \frac{du}{u^{-1/\beta}}$.

$$\int_0^{\pi} \frac{du}{u^{-\frac{1}{\beta}}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\pi} u^{1/\beta} du = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{u^{1+\frac{1}{\beta}}}{1+\frac{1}{\beta}}\right]_\varepsilon^{\pi} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi^{1+\frac{1}{\beta}} - \varepsilon^{1+\frac{1}{\beta}}}{1+\frac{1}{\beta}} = \frac{\beta}{\beta+1} \pi^{1+\frac{1}{\beta}}$$

Donc $|\beta J_\beta| \leq \frac{\beta}{\beta+1} \pi^{1+\frac{1}{\beta}} \underset{\frac{1}{\beta+1} \leq 1}{\leq} \beta \pi^{1+\frac{1}{\beta}} \underset{1+\frac{1}{\beta} \leq 2}{\leq} \beta \pi^2$; $\beta |I_\beta| \leq \beta \pi^2$ et $\beta > 0$.

Alors $\underline{\underline{|I_\beta| \leq \pi^2}}$.