PRÉLIMINAIRE

Montrer que, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\ P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - n\,P(X>n).$$

PARTIE I

Q1 p et s sont deux éléments de N^*.

Trouver le cardinal de l'ensemble $\mathcal{D}_s = \{(d_1, d_2, \ldots, d_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leqslant d_1 < d_2 < \cdots < d_p \leqslant s\}$ des suites strictement croissantes de p éléments de $[\![1, s]\!]$.

Q2 p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

$\mathcal{C}_q = \{(c_1, c_2, \ldots, c_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_p \leqslant q\}$ est l'ensemble des suites croissantes de p éléments de $[\![1, q]\!]$.

Pour tout élément $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ de $\mathcal{C}_q$ on pose :

$$\Phi\Big((c_1, c_2, \ldots, c_p)\Big) = (c_1, c_2 + 1, c_3 + 2, \ldots, c_p + p - 1).$$

Montrer que l'on définit ainsi une application Φ de $\mathcal{C}_q$ dans $\mathcal{D}_{p+q-1}$.

Montrer, très proprement, que Φ est bijective. En déduire que $\mathcal{C}_q$ a pour cardinal $\dbinom{p+q-1}{p}$.

PARTIE II

N est un élément de $[\![3, +\infty[\![$. On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.

On tire au hasard, successivement et SANS REMISE tous les jetons de l'urne et l'on note $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ la suite des numéros obtenus.

X_N est la variable aléatoire égale au plus petit entier non nul r, s'il existe, tel que $u_r > u_{r+1}$ et à N si un tel r n'existe pas.

Q1 Montrer que si n est un élément de $[\![0, N-1]\!]$: $P(X_N > n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Calculer $P(X_N > n)$ pour tout élément n de $[\![N, +\infty[\![$.

Q2 Déduire, avec soin, de ce qui précède la loi de X_N (il est conseillé de faire une "vérification").

Montrer que : $E(X_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}$.

Q3 Déterminer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E(X_N)$.

Q4 Montrer qu'il existe une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

$$P(X=k) = \lim_{N\to+\infty} P(X_N = k)$$

Montrer que X possède une espérance, et la comparer à $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E(X_N)$.

Q5 Ecrire, en TP4, une fonction calculant $E(X_N)$.

PARTIE III

N est un élément de $[\![3,+\infty[\![$. On considère toujours une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.

On tire au hasard et AVEC REMISE remise des jetons de cette urne et l'on note $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ la suite des numéros obtenus.

Q0 α est un réel et q est un réel tel que $|q| < 1$. Montrer que la série de terme général $n^\alpha\, q^n$ est absolument convergente (cette question n'est pas dans la correction).

Q1 Calculer, pour tout élément n de $[\![2,+\infty[\![$, $v_n = P(u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n)$. Dans la suite on pose $v_1 = 1$.

Q2 Montrer que les suites $\left(\binom{N+n-1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{n^{N-1}}{(N-1)!}\right)_{n\geqslant 1}$ sont équivalentes.

Montrer que les séries de terme généraux v_n, nv_n et $w_n = v_n - v_{n+1}$ convergent. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ et donner une interprétation probabiliste de ce résultat.

Q3 En déduire l'existence d'une variable aléatoire Z_N, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $Z_N = r$ si et seulement si r est le plus petit entier tel que $u_r > u_{r+1}$ (faire très simple).

Montrer que Z_N admet une espérance et que $E(Z_N) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ (on pourra utiliser le préliminaire).

Q4 a) Montrer que $f : x \to \dfrac{1}{(1+x)^N}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et calculer $f^{(n)}$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

b) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[-1/N, 0]$ montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N} - 1 - \sum_{n=1}^{m} v_n\right| \leqslant \frac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}$$

En déduire $E(Z_N)$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} E(Z_N)$.

Q5 Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z=k) = \lim_{N\to+\infty} P(Z_N = k)$$

Comparer Z et X.

Q6 Ecrire une fonction qui simule cette expérience et donne la valeur de r.

PARTIE IV

On reprend ici les conditions de la partie III.

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Si k est élément de $[\![1, N]\!]$, trouver la probabilité de l'événement $\forall i \in [\![1, n]\!],\ k < u_{i+1}$

En déduire la probabilité de l'événement A_n défini par : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u_1 < u_{i+1}$.

Q2 On pose $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = P(A_n)$. Montrer que la série de terme général x_n converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Q3 Prouver l'existence d'une variable aléatoire T_N, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $T_N = r$ si et seulement si r est le plus petit entier strictement positif tel que $u_{r+1} \leqslant \mathrm{Inf}(u_1, u_2, \ldots, u_r)$.

Q4 Montrer que T_N admet une espérance mathématique que l'on calculera. Déterminer $\lim_{N \to +\infty} E(T_N)$.

Q5 Montrer qu'il existe une variable aléatoire T, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(T = k) = \lim_{N \to +\infty} P(T_N = k).$$

Montrer que T n'a pas d'espérance.