SUJET 21

On se propose d'étudier l'intégrale $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,\mathrm{d}t$ pour α et β réels.

On ne fait pas le préliminaire.

Ainsi on admet que si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b[$ $(-\infty<a<b\leqslant+\infty)$ telles que $\displaystyle\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t}.$$

Résultat analogue sur $]a,b]$ et $]a,b[$.

Préliminaire

Deux versions mais une seule à faire et je vous conseille la 2

On rappelle que si u et v sont deux fonctions continues sur $[c,d]$ $(c\leqslant d)$:

$$\left|\int_c^d u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{\int_c^d \big(u(t)\big)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_c^d \big(v(t)\big)^2\,\mathrm{d}t}$$

On suppose ici que f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b[$ $(-\infty<a<b\leqslant+\infty)$ telles que $\displaystyle\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ convergent.

Version 1 Utiliser ce qui précède pour montrer que la fonction $x\to\displaystyle\int_a^x |f(t)\,g(t)|\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t}.$$

Version 2 a) Montrer que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |xy|\leqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

b) Montrer alors que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

c) En utilisant le rappel montrer que : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t}$.

On admet que ceci vaut si f et g sont deux fonctions continues sur $]a,b[$ $(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ telles que $\displaystyle\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ convergent.

Partie I

$\boxed{\textbf{Q1}}$ α et β sont deux réels.

a) Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha+\beta>-1$.

b) Montrer, très simplement, que si $\alpha<0$ ou $\alpha=0$, $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que ceci est encore vrai pour $\alpha>0$.

c) Déterminer l'ensemble D des couples (α,β) tels que $I(\alpha,\beta)$ converge !

$\boxed{\textbf{Q2}}$ a) Montrer à l'aide d'un changement de variable que : $\forall(\alpha,\beta)\in D,\ I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_{0}^{+\infty} u^{\alpha}\,e^{-u}\,(1-e^{-u})^{\beta}\,\mathrm{d}u$.

b) α est un réel tel que $(\alpha,0)$ appartient à D. Exprimer $I(\alpha,0)$ à l'aide de la fonction de Γ.

Donner la valeur de $I(n,0)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

c) α et γ sont deux réels. On suppose que $\alpha>-1$ et $\gamma>0$.

Montrer, très simplement, que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{\alpha}\,e^{-\gamma\,t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\gamma^{\alpha+1}}\cdot$

d) α est un réel et n est un élément de $\mathbb{N}$. On suppose que $\alpha>-1$.

Vérifier que (α,n) appartient à D et montrer, en utilisant la formule du binôme que :

$$I(\alpha,n)=\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\,\frac{\binom{n}{k}}{(k+1)^{\alpha+1}}=\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\,\frac{\mathrm{C}_{n}^{k}}{(k+1)^{\alpha+1}}\cdot$$

$\boxed{\textbf{Q3}}$ a) n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que $I(\alpha,n)\underset{\alpha\to+\infty}{\sim}\Gamma(\alpha+1)$.

En déduire que $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha,n)=+\infty$ (on pourra montrer que $\Gamma(\alpha+1)\geqslant 2^{\alpha}\int_{2}^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour α strictement positif).

b) β est positif. Comparer $I(\alpha,\mathrm{Ent}\,(\beta))$, $I(\alpha,\beta)$ et $I(\alpha,\mathrm{Ent}\,(\beta)+1)$ lorsque α est positif. En déduire que :

$$I(\alpha,\beta)\underset{\alpha\to+\infty}{\sim}\Gamma(\alpha+1)$$

Partie II

On étudie plus précisément dans cette partie $I(1,\beta)$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que si (α,β) appartient à D : $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_{0}^{1}\big(-\ln(1-u)\big)^{\alpha}\,u^{\beta}\,\mathrm{d}u$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Ici β est un élément de $]-2,+\infty[$. Alors $(1,\beta)\in D$ et $I(1,\beta)$ existe.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall u\in[0,1[,\ \dfrac{1}{1-u}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u^{k}=\dfrac{u^{n+1}}{1-u}\cdot$

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1[,\ -\ln(1-t)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{t^{k+1}}{k+1}=\int_{0}^{t}\dfrac{u^{n+1}}{1-u}\,\mathrm{d}u.$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ 0 \leqslant -\ln(1-t) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k} \leqslant t^{n+1}\Big(-\ln(1-t)\Big)$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{k+\beta}\,\mathrm{d}t$ pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ (ne pas oublier l'existence...).

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I(1,\beta) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1+\beta)} \leqslant \int_0^1 t^{n+1+\beta}\,(-\ln(1-t))\,\mathrm{d}t = I(1, n+1+\beta)$.

Q3 β est toujours un élément de $]-2, +\infty[$.

a) Utiliser le préliminaire pour justifier proprement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I(1, n+1+\beta) = \int_0^1 t^{n+1+\beta}\,(-\ln(1-t))\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_0^1 t^{2(n+1+\beta)}\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_0^1 \ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t}.$$

Déduire alors de ce qui précède que $I(1,\beta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1+\beta)}$.

b) Ecrire en TP 4 une fonction **WLERICK** (Robert Wlérick/1882-1944/ sculpteur/musée de Mont de Marsan...) qui calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k(k+1+\beta)}$ à partir de β et r.

Q4 Ici on suppose que β appartient à $]-1, +\infty[$.

a) Montrer que $\varphi : x \to \dfrac{1}{x\,(x+1+\beta)}$ est continue, décroissante et positive sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\ln(2+\beta)}{\beta+1}$ (on pourra chercher deux réels a et b tels que $\frac{1}{t\,(t+1+\beta)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1+\beta}$).

c) Montrer que si n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \varphi(k) \leqslant \int_1^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$.

En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant I(1,\beta) \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2+\beta}$ ou $\dfrac{\ln(2+\beta)}{\beta+1} \leqslant I(1,\beta) \leqslant \dfrac{\ln(2+\beta)}{\beta+1} + \dfrac{1}{2+\beta}$.

d) Montrer que $I(1,\beta) \underset{\beta \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln \beta}{\beta}$.

Partie III

On se propose de généraliser quelques résultats de la partie I.

Dans cette partie α est un réel appartenant à l'intervalle $]-1, +\infty[$.

On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I(\alpha, n) = \Gamma(\alpha+1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)^{\alpha+1}} = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{C}_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}$.

On pose $\forall \beta \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}^{(*)},\ u_k(\beta) = \dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!}$ et $\forall \beta \in \mathbb{R},\ u_0(\beta) = 1$.

A un abus près on pourra considérer que la première formule contient la seconde...)

Q1 Ecrire en TP4 une fonction **BOURDELLE** (Antoine Bourdelle/ 1861-1929/sculpteur/Orsay, Héraclès archer, avec ses c. de buffle, magnifique ; non pas le buffle ni les c., l'archer !) qui calcule $u_k(\beta)$ à partir de k et de β (on pourra commencer par exprimer $u_i(\beta)$ en fonction de $u_{i-1}(\beta)$).

Q2 a) Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}$. Calculer $u_k(n)$ (deux cas $k \leqslant n$ et $k > n$).

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Justifier alors la formule : $I(\alpha, n) = \Gamma(\alpha+1) \displaystyle\sum_{k=0}^{\boxed{+\infty}} (-1)^k \frac{u_k(n)}{(k+1)^{\alpha+1}}$.

Q3 β est un réel n'appartenant pas à $\mathbb{N}$. On se propose de montrer qu'il existe un réel strictement positif L tel que $|u_k(\beta)| \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{k^{\beta+1}}$.

On pose : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k = \ln\left(k^{\beta+1}\,|u_k(\beta)|\right)$ et $w_k = v_{k+1} - v_k$.

a) Justifier la définition de v_k pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$.

Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $k > \beta$. Montrer que $w_k = \beta \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{\beta}{k}\right)$

b) Montrer que la **série** de terme général w_k converge et en déduire que la **suite** de terme général v_k converge.

c) Conclure.

d) On suppose que (α, β) est un élément de D. Montrer que la série de terme général $(-1)^k \dfrac{u_k(\beta)}{(k+1)^{\alpha+1}}$ est absolument convergente.

Q4 β est toujours un réel n'appartenant pas à $\mathbb{N}$. On pose : $\forall x \in [0, 1[,\ h(x) = (1-x)^\beta$.

a) Montrer que, pour tout élément k de $\mathbb{N}$, h est k fois dérivable sur $[0, 1[$ et que :

$$\forall x \in [0,1[,\ h^{(k)}(x) = (-1)^k\, u_k(\beta)\, k!\, (1-x)^{\beta-k}.$$

b) x est un élément de $[0, 1[$. Montrer que $\displaystyle\operatorname*{Max}_{t\in[0,x]} \left|\frac{x-t}{1-t}\right| = \operatorname*{Max}_{t\in[0,x]} \left(\frac{x-t}{1-t}\right) = x$.

c) x est un élément de $[0, 1[$ et p un élément de $\mathbb{N}$. Montrer en utilisant une formule importante du cours que :

$$\left|(1-x)^\beta - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, u_k(\beta)\, x^k\right| \leqslant (p+1)\, |u_{p+1}(\beta)|\, x^p \int_0^x (1-t)^{\beta-1}\, \mathrm{d}t.$$

En déduire que la série de terme général $(-1)^k\, u_k(\beta) x^k$ converge et que :

$$(1-x)^\beta = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, u_k(\beta)\, x^k.$$

d) Montrer que $\forall u \in]0, +\infty[,\ u^\alpha\, e^{-u}\, (1-e^{-u})^\beta = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, u_k(\beta)\, u^\alpha\, e^{-(k+1)\,u}$.

En admettant que le théorème de la convergence dominée nous permette d'intervertir la somme infinie et l'intégrale génaralisée, montrer que si (α, β) est un élément de D :

$$I(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{u_k(\beta)}{(k+1)^{\alpha+1}}.$$

Q5 On considère la fonction $\zeta : x \to \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

a) Montrer que cette fonction admet $]1, +\infty[$ comme domaine de définition et qu'elle est décroissante et minorée par 1 sur son domaine.

b) Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[,\ \dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1+\dfrac{1}{x-1}$ (on pourra encadrer $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$).

En déduire un équivalent de ζ en 1 et $\lim\limits_{x\to 1} \zeta(x)$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

c) Calculer $u_k(-1)$ et $u_k(-2)$ pour tout élément k de $\mathbb{N}$. En déduire que :

$$\forall \alpha \in]0,+\infty[,\ I(\alpha,-1) = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{e^u-1}\,\mathrm{d}u = \Gamma(\alpha+1)\,\zeta(\alpha+1)$$

$$\text{et } \forall \alpha \in]1,+\infty[,\ I(\alpha,-2) = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha\, e^u}{(e^u-1)^2}\,\mathrm{d}u = \Gamma(\alpha+1)\,\zeta(\alpha)$$

Montrer que $I(\alpha,-1) \underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$ et $I(\alpha,-2) \underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$.

Q6 a) n est dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\alpha > n$.

Montrer en utilisant une intégration par parties que $I(\alpha-1,-n) = -\dfrac{n-1}{\alpha}\, I(\alpha,-n) + \dfrac{n}{\alpha}\, I(\alpha,-(n+1))$ (on prendra la forme de I Q2 a).

Montrer que $n\, I(\alpha,-(n+1)) = (n-1)\, I(\alpha,-n) + \alpha\, I(\alpha-1,-n)$

En déduire une expression sommatoire de $I(\alpha,-n)$ en fontion de $I(\alpha-1,-1)$, $I(\alpha-1,-2)$, ..., $I(\alpha-1,-(n-1))$ lorsque $n \geqslant 2$.

b) Montrer à l'aide d'un récurrence faible que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $I(\alpha,-n) \underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$.

c) Montrer alors que $\forall \beta \in \mathbb{R},\ I(\alpha,\beta) \underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$.

Q7 On se propose de trouver un équivalent de la suite de terme général $I(-n,n)$.

a) On pose $\psi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \psi(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}\cdot$ Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Montrer que ψ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$ et que ψ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I(-n,n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{-n}\, e^{-u}(1-e^{-u})^n\,\mathrm{d}u = \int_0^1 t^n\, \left(-e^{-\psi^{-1}(t)}\,(\psi^{-1})'(t)\right)\mathrm{d}t$.

c) Soit g une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $g(1) \neq 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^n\, g(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{g(1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{g(1)}{n}$ (on utilisera la définition de la convergence d'une suite et de la continuité d'une fonction).

d) Montrer que $I(-n,n) \sim \dfrac{2}{n}\cdot$

Q8 α est fixé dans $\mathbb{R}$.

a) Trouver le domaine de définition de $I_\alpha : \beta \to I(\alpha,\beta)$ et étudier ses variations.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^{2\,\alpha}\,(1-t)^{2\,|\alpha|}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\lim\limits_{\beta\to+\infty} I_\alpha(\beta) = 0$ (on pourra s'inspirer de II Q3 a).

c) Un suppose ici que $\alpha < 0$. Montrer que la suite de terme général $n\, I_\alpha(n)$ est bornée. Ainsi $I(\alpha,n) = \mathcal{O}\big(\frac{1}{n}\big)$.

d) λ est un élément de $]0,1[$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 (1-u^{1/\lambda})^n\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\lambda\,\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}\cdot$ (comparer e^{-x} et $1-x$).

On suppose $\alpha > 0$ et on considère un élément θ de $]0,1[$.

Montrer qu'il existe un réel $C(\theta)$ stictement positif tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_\alpha(n) \leqslant \dfrac{C(\theta)}{n^{1-\theta}}$ (on pourra remarquer que $t \to t^\beta\,(-\ln t)^\alpha$ est bornée sur $]0,1[$).