PRÉLIMINAIRE Version 1

Soit $x \in [a,b[$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$\forall x \in [a,b[$, $\int_a^x |f(t)g(t)|dt = \int_a^x |f(t)||g(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^x (|f(t)|)^2 dt}\sqrt{\int_a^x (|g(t)|^2)dt}$

Ainsi $\forall x \in [a,b[$, $\int_a^x |f(t)g(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^x (f(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^x (g(t))^2 dt}$.

f^2 et g^2 sont continues et positives sur $[a,b[$. Alors les fonctions $x \mapsto \int_a^x (f(t))^2 dt$ et $x \mapsto \int_a^x (g(t))^2 dt$ sont croissantes sur $[a,b[$. De plus ces deux fonctions ont respectivement pour limite en b^- : $\int_a^b (f(t))^2 dt$ et $\int_a^b (g(t))^2 dt$.

Ainsi $\forall x \in [a,b[$, $\int_a^x (f(t))^2 dt \leq \int_a^b (f(t))^2 dt$ et $\int_a^x (g(t))^2 dt \leq \int_a^b (g(t))^2 dt$.

Par conséquent : $\forall x \in [a,b[$, $\int_a^x |f(t)g(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt}$

$x \mapsto \int_a^x |f(t)g(t)|dt$ est majorée sur $[a,b[$ par $\sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt}$.

Comme $|fg|$ est positive (et continue) sur $[a,b[$ on peut alors dire que $\int_a^b |f(t)g(t)|dt$ converge ; $\int_a^b (fg)(t)dt$ est absolument convergente.

$\forall x \in [a,b[$, $\left|\int_a^x f(t)g(t)dt\right| \leq \int_a^x |f(t)g(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt}$

En faisant tendre x vers b par valeurs inférieures il vient :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt}$$

Exercice : Reprendre le problème en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ puis par $]a,b[$.

PRÉLIMINAIRE Version 2

a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(|x|-|y|)^2 \geq 0$; $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|^2+|y|^2-2|x||y| \geq 0$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2+y^2$; $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

b) 1°. $\forall t\in[a,b[$, $0 \leq |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}[(f(t))^2+(g(t))^2]$

2°. $\int_a^b \frac{1}{2}((f(t))^2+(g(t))^2)\,dt$ converge car $\int_a^b (f(t))^2 dt$ et $\int_a^b (g(t))^2 dt$ convergent.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt$.

$\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

c) Soit $x\in[a,b[$. f et g sont continues sur $[a,x]$. D'après le rappel :

$\left|\int_a^x f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^x (f(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^x (g(t))^2 dt}$. En faisant tendre x vers b par valeurs inférieures il vient :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt}$$ car les trois intégrales convergent

Remarque.. Ceci traite la situation 1 (S1) : " f,g $[a,b[\to\mathbb{R}$ ", on traite de même la situation 2 (S2) : " f,g $]a,b]\to\mathbb{R}$ ".

Pour la situation 3 (S3) : " f,g $]a,b[\to\mathbb{R}$ " on montre l'absolue convergence de $\int_a^c f(t)g(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)g(t)\,dt$ ($c\in]a,b[$) grâce à S1 et S2.

Pour l'inégalité on applique le rappel sur $[x,y]$ ($a<x\leq y<b$) et on fait tendre x vers a et y vers b.

PARTIE I

Q1 Notons que $t \mapsto (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta$ est continue et positive sur $]0,1[$.

a) 1.. $(-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \underset{1}{\sim} (-(t-1))^\alpha (1-t)^\beta = (1-t)^{\alpha+\beta} = \dfrac{1}{(1-t)^{-\alpha-\beta}}$.

2.. $\forall t \in [\frac{1}{2}, 1[$, $\dfrac{1}{(1-t)^{-\alpha-\beta}} \geq 0$.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{(1-t)^{-\alpha-\beta}}$.

Or $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{(1-t)^{-\alpha-\beta}}$ converge si et seulement si $-\alpha-\beta < 1$ ou $\alpha+\beta > -1$.

Finalement $\underline{\underline{\displaystyle\int_{1/2}^{1} (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt \text{ converge si et seulement si } \alpha+\beta > 1}}$.

b) Si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{t \to 0} \left((-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta\right) = 0$ et si $\alpha = 0$: $\lim\limits_{t \to 0} \left((-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta\right) = 1$.

Dans les deux cas $t \mapsto (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta$ est prolongeable par continuité en 0.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{1/2} (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt$ converge pour $\alpha \leq 0$.

Supposons maintenant $\alpha > 0$.

$\lim\limits_{t \to 0} \left(\sqrt{t} (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta\right) = \lim\limits_{t \to 0} \left(t^{1/2} (-\ln t)^\alpha\right) = 0$ par croissance comparée.

$\exists \eta \in]0, \frac{1}{2}]$, $\forall t \in]0, \eta]$, $|\sqrt{t} (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta| \leq 1$.

1°.. $\forall t \in]0, \eta]$, $0 \leq |(-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta| \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$.

2°.. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1/2}}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_0^{1/2} (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt$.

Pour tout réel α : $\underline{\underline{\displaystyle\int_0^{1/2} (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt \text{ converge}}}$.

c) De a) et b) il résulte que $\int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta dt$ converge si et seulement si $\alpha+\beta>-1$.

$D=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha+\beta>-1\}$.

Q2 a) Soit $(\alpha,\beta)\in D$. Soit $(\varepsilon,A)\in]0,1[^2$.

$$\int_\varepsilon^A (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta dt \underset{\uparrow}{=} \int_{-\ln\varepsilon}^{-\ln A} (u)^\alpha (1-e^{-u})^\beta (-e^{-u})\, du = \int_{-\ln A}^{-\ln\varepsilon} u^\alpha (1-e^{-u})^\beta e^{-u}\, du.$$

$\left[\begin{array}{l} t=e^{-u} \quad dt=-e^{-u}du \\ u=-\ln t \end{array}\right.$

Or $\int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta dt$ converge, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} (-\ln\varepsilon)=+\infty$ et $\lim_{A\to 1} (-\ln A)=0$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}(1-e^{-u})^\beta du$ converge et $I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}(1-e^{-u})^\beta du$.

b) Soit α un réel tel que $(\alpha,0)\in D$. $\alpha>-1$.

$$I(\alpha,0)=\int_0^{+\infty} u^\alpha (1-e^{-u})^0 e^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \Gamma(\alpha+1).$$

$\forall \alpha\in\mathbb{R},\ (\alpha,0)\in D \Rightarrow I(\alpha,0)=\Gamma(\alpha+1)$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ n+0>-1$! Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ (n,0)\in D$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ I(n,0)=\Gamma(n+1)=n!$

c) $(\alpha,\gamma)\in\mathbb{R}^2$. $\alpha>-1$ et $\gamma>0$.

$t\mapsto t^\alpha e^{-\gamma t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit ε et A deux réels strictement positifs.

$$\int_\varepsilon^A t^\alpha e^{-\gamma t} dt \underset{u=\gamma t}{\underset{\uparrow}{=}} \int_{\gamma\varepsilon}^{\gamma A} \left(\frac{u}{\gamma}\right)^\alpha e^{-u} \frac{1}{\gamma} du = \frac{1}{\gamma^{\alpha+1}} \int_{\gamma\varepsilon}^{\gamma A} u^\alpha e^{-u} du.$$

Or $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \gamma\varepsilon=0$ et $\lim_{A\to+\infty} \gamma A \underset{\gamma>0}{=} +\infty$. De plus $\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du=\Gamma(\alpha+1)$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\sigma t}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\sigma^{\alpha+1}}$.

d) $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in]-1,+\infty[$. $\alpha+n>-1+n\geqslant -1$; $(\alpha,n)\in D$.

$$I(\alpha,n)=\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}(1-e^{-u})^n\,du=\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-e^{-u})^k\,du.$$

$$I(\alpha,n)=\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k u^\alpha e^{-(k+1)u}\,du.$$

D'après ce qui précède : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-(k+1)u}\,du$ existe et vaut $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^{\alpha+1}}$.

Alors $I(\alpha,n)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-(k+1)u}\,du=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^{\alpha+1}}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in]-1,+\infty[$, $I(\alpha,n)=\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}$.

Q3 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left((-1)^k\dfrac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } k\in[\![1,n]\!] \quad \left(\cdots\left|\frac{1}{k+1}\right|<1\right)\\ 1 & \text{si } k=0 \quad \left((-1)^0\dfrac{C_n^0}{(0+1)^{\alpha+1}}=1\right)\end{cases}$

Ainsi $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}\right)=1$ car $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}\underset{\alpha\to+\infty}{\sim}1$.

Alors $I(\alpha,n)=\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}\sim\Gamma(\alpha+1)$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $I(\alpha,n)\underset{\alpha\to+\infty}{\sim}\Gamma(\alpha+1)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour prouver que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha,n)=+\infty$ il suffit de montrer que

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\alpha+1)=+\infty$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \underset{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t^\alpha e^{-t} \geq 0}{\geq} \int_2^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \underset{\substack{\alpha > 0 \\ \forall t \in [2,+\infty[,\ t^\alpha \geq 2^\alpha}}{\geq} \int_2^{+\infty} 2^\alpha e^{-t} dt = 2^\alpha \int_2^{+\infty} e^{-t} dt$.

Or $\lim_{\alpha \to +\infty} \left(2^\alpha \int_2^{+\infty} e^{-t} dt\right) = +\infty$. Ainsi $\lim_{\alpha \to +\infty} (\Gamma(\alpha+1)) = +\infty$. Alors $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha, n) = +\infty$.

b) $\beta \in \mathbb{R}_+$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall t \in]0,1[$, $1-t \in]0,1[$.

$\forall t \in]0,1[$, $(-\ln t)^\alpha > 0$ et $(1-t)^{E(\beta)} \geq (1-t)^\beta \geq (1-t)^{E(\beta)+1}$.

$\forall t \in]0,1[$, $(-\ln t)^\alpha (1-t)^{E(\beta)} \geq (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \geq (-\ln t)^\alpha (1-t)^{E(\beta)+1}$.

Notons que $(\alpha, E(\beta))$, (α, β) et $(\alpha, E(\beta)+1)$ sont trois éléments de D.

En intégrant on obtient alors $I(\alpha, E(\beta)) \geq I(\alpha, \beta) \geq I(\alpha, E(\beta)+1)$.

Alors $\dfrac{I(\alpha, E(\beta))}{\Gamma(\alpha+1)} \geq \dfrac{I(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha+1)} \geq \dfrac{I(\alpha, E(\beta)+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$ car $\Gamma(\alpha+1) > 0$.

Nous avons vu que $\lim_{\alpha \to +\infty} \dfrac{I(\alpha, n)}{\Gamma(\alpha+1)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car $I(\alpha, n) \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$).

Ainsi $\lim_{\alpha \to +\infty} \dfrac{I(\alpha, E(\beta))}{\Gamma(\alpha+1)} = \lim_{\alpha \to +\infty} \dfrac{I(\alpha, E(\beta)+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = 1$.

Par encadrement on obtient alors $\lim_{\alpha \to +\infty} \dfrac{I(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha+1)} = 1$

Finalement $\forall \beta \in \mathbb{R}_+$, $I(\alpha, \beta) \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$.

PARTIE II

Q1 Soit $(\alpha,\beta)\in D$. Soit $(\varepsilon,A)\in(]0,1[)^2$.

$$\int_\varepsilon^A(-\ln t)^\alpha(1-t)^\beta dt \underset{u=1-t}{=} \int_{1-\varepsilon}^{1-A}(-\ln(1-u))^\alpha u^\beta(-du) = \int_{1-A}^{1-\varepsilon}(-\ln(1-u))^\alpha u^\beta du.$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}(1-\varepsilon)=1$ et $\lim\limits_{A\to1^-}(1-A)=0$ donc $\int_0^1(-\ln(1-u))^\alpha u^\beta du$ converge et

$$\int_0^1(-\ln t)^\alpha(1-t)^\beta dt = \int_0^1(-\ln(1-u))^\alpha u^\beta du. \quad \underline{\underline{I(\alpha,\beta)=\int_0^1(-\ln(1-u))^\alpha u^\beta du}}.$$

Q2 $\beta\in]-2,+\infty[$. $(1,\beta)\in D$ car $1+\beta>-1$.

a) $\forall n\in\mathbb{N},\forall u\in[0,1[,\ \frac{1}{1-u}-\sum_{k=0}^n u^k \underset{u\neq1}{=} \frac{1}{1-u}-\frac{1-u^{n+1}}{1-u}=\frac{u^{n+1}}{1-u}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\forall u\in[0,1[,\ \frac{1}{1-u}-\sum_{k=0}^n u^k=\frac{u^{n+1}}{1-u}$.

b) Alors $\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0,1[,\ \int_0^t\left(\frac{1}{1-u}-\sum_{k=0}^n u^k\right)du=\int_0^t\frac{u^{n+1}}{1-u}du$.

$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0,1[,\ \int_0^t\frac{u^{n+1}}{1-u}du=\int_0^t\frac{1}{1-u}du-\sum_{k=0}^n\int_0^t u^k du=\left[-\ln|1-u|\right]_0^t-\sum_{k=0}^n\frac{t^{k+1}}{k+1}$

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0,1[,\ -\ln(1-t)-\sum_{k=0}^n\frac{t^{k+1}}{k+1}=\int_0^t\frac{u^{n+1}}{1-u}du$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $t\in[0,1[$. $\forall u\in[0,t[,\ 0\leq\frac{u^{n+1}}{1-u}\leq\frac{t^{n+1}}{1-u}$.

Alors $0\leq\int_0^t\frac{u^{n+1}}{1-u}du\leq t^{n+1}\int_0^t\frac{du}{1-u}=t^{n+1}\left[-\ln|1-u|\right]_0^t=t^{n+1}(-\ln(1-t))$.

Ainsi $0\leq-\ln(1-t)-\sum_{k=0}^n\frac{t^{k+1}}{k+1}=-\ln(1-t)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^k}{k}\leq t^{n+1}(-\ln(1-t))$.

c) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $t\mapsto t^{k+\beta}$ est continue sur $]0,1]$. $\overset{k\in\mathbb{N}^*}{k+\beta+1\geq\beta+2>0}$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 t^{k+\beta}dt=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{k+\beta+1}(1-\varepsilon^{k+\beta+1})\right)=\frac{1}{k+\beta+1}.$$

$$\cancel{1} - 2\alpha\lambda_1 + \alpha^2 \cancel{\lambda_1^2}$$

$$-2\lambda_1 < \alpha$$

$$\alpha < \frac{1}{2\lambda_1}.$$

$$\alpha^{\cancel{2}} \lambda_1^{\cancel{2}} < 2\alpha \cancel{\lambda_1}.$$

$$\boxed{\alpha < \frac{2}{\lambda_1}}$$

Ainsi, pour tout élément ℓ de $\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^{\ell+\beta}\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{\ell+\beta+1}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,1[$, $t^\beta\geq 0$ et $0\leq -\ln(1-t)-\sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{t^\ell}{\ell}\leq t^{n+1}(-\ln(1-t))$.

Alors $\forall t\in[0,1[$, $0\leq(-\ln(1-t))t^\beta-\sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{t^{\ell+\beta}}{\ell}\leq t^{n+1+\beta}(-\ln(1-t))$.

Notons que $I(1,\beta)=\int_0^1(-\ln(1-t))t^\beta\,dt$ existe, pour tout ℓ dans $[\![1,n+1]\!]$, $\int_0^1 t^{\ell+\beta}dt$ existe et vaut $\frac{1}{\ell+\beta+1}$ et $I(1,n+1+\beta)$ existe ($n+1+\beta+1>-1$ car $n\geq 1$ et $\beta>-2$).

Ainsi en intégrant l'inégalité : $0\leq I(1,\beta)-\sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{1}{\ell(\ell+\beta+1)}\leq\int_0^1 t^{n+1+\beta}(-\ln(1-t))dt=I(1,n+1+\beta)$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq I(1,\beta)-\sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{1}{\ell(\ell+1+\beta)}\leq\int_0^1 t^{n+1+\beta}(-\ln(1-t))dt=I(1,n+1+\beta)$.

Q3 $\beta\in]-2,+\infty[$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $f:t\mapsto t^{n+1+\beta}$ est continue sur $]0,1]$ (et même $[0,1]$). $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 f^2(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 t^{2(n+1+\beta)}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2(n+1+\beta)+1}(1-\varepsilon^{2n+3+2\beta})\right]=\frac{1}{2n+3+2\beta}$.

$2n+3+2\beta>0$

Alors $\int_0^1 f^2(t)dt$ existe et vaut $\frac{1}{2n+3+2\beta}$.

Considérons $g:t\mapsto(-\ln(1-t))$. g est continue sur $]0,1[$ (et même $[0,1[$) et $\int_0^1 g^2(t)dt=\int_0^1\ln^2(1-t)dt=I(2,0)$ existe.

D'après le préliminaire $\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est absolument convergente et

$\int_0^1 f(t)g(t)dt\leq\left|\int_0^1 f(t)g(t)dt\right|\leq\sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 g^2(t)dt}$

En fait il y a égalité

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I(n,n+1+\beta)\leq\int_0^1 t^{n+1+\beta}(-\ln(1-t))dt\leq\sqrt{\int_0^1 t^{2(n+1+\beta)}dt}\sqrt{\int_0^1\ln^2(1-t)dt}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I(1,\beta) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1+\beta)} \leq I(1, n+1+\beta) \leq \sqrt{\int_0^1 t^{2(n+1+\beta)} dt} \sqrt{I(2,0)}$.

Nous avons vu que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 t^{2(n+1+\beta)} dt = 1/(2n+3+\beta)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I(1,\beta) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1+\beta)} \leq \sqrt{\frac{1}{2n+3+\beta}} \sqrt{I(2,0)}$.

$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2n+3+\beta}} \sqrt{I(2,0)} \right) = 0$. On obtient alors par encadrement $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1+\beta)} = I(1,\beta)$.

La série de terme général $\frac{1}{k(k+1+\beta)}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1+\beta)} = I(1,\beta)$.

b)

```
function WLERICK(r:integer;beta:real):real;

var k :integer;s:real;

begin
s:=0;
for k:=1 to r do s:=s+1/k/(k+1+beta);

WLERICK:=s;
end;
```

Q4 a) $x \mapsto x(x+1+\beta)$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

Alors φ est continue sur $]0,+\infty[$.

$x \mapsto x$ et $x \mapsto x+1+\beta$ sont croissantes et strictement positives sur $]0,+\infty[$.

Alors $x \mapsto x(x+1+\beta)$ est croissante et strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Ainsi φ est décroissante sur $]0,+\infty[$ ... et positive.

Finalement $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x(x+1+\beta)}$ est continue, décroissante et positive sur $]0,+\infty[$.

b) Soit $A \in [1,+\infty[$. $\int_1^A \varphi(t)dt = \int_1^A \frac{dt}{t(t+1+\beta)} = \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1+\beta} \right) \left(\frac{1}{\beta+1} \right) dt$

b) $\int_1^A \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\beta+1}\left[\ln\left|\frac{t}{t+1+\beta}\right|\right]_1^A = \frac{1}{\beta+1}\left[\ln\frac{A}{A+1+\beta} - \ln\frac{1}{2+\beta}\right]$

$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\beta+1}\left(-\ln\frac{1}{2+\beta}\right) = \frac{\ln(2+\beta)}{\beta+1}$.

Ainsi $\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\ln(2+\beta)}{\beta+1}$.

c) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[k,k+1]$, $\varphi(k+1)\le\varphi(t)\le\varphi(k)$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(k+1) = \int_k^{k+1}\varphi(k+1)\,dt \le \int_k^{k+1}\varphi(t) \le \int_k^{k+1}\varphi(k)\,dt = \varphi(k)$ $(k\le k+1)$.

Alors $\sum_{k=1}^{n}\varphi(k+1) \le \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\varphi(t)\,dt = \int_1^{n+1}\varphi(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$, $\sum_{k=2}^{n+1}\varphi(k) \le \int_1^{n+1}\varphi(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$

donc $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=2}^{n+1}\varphi(k) \le \int_1^{n+1}\varphi(t)\,dt \le \sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$.

$\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi(k)$ existe et vaut $I(1,\beta)$, $\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\ln(2+\beta)}{\beta+1}$ et $\varphi(1) = \frac{1}{2+\beta}$.

Alors en faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $I(1,\beta) - \frac{1}{2+\beta} \le \int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt \le I(1,\beta)$.

donc $\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt \le I(1,\beta) \le \int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt + \frac{1}{2+\beta}$ ou $\frac{\ln(2+\beta)}{\beta+1} \le I(1,\beta) \le \frac{\ln(2+\beta)}{\beta+1} + \frac{1}{2+\beta}$.

$\frac{\ln(2+\beta)}{\beta+1} > 0$ donc $1 \le \frac{\beta+1}{\ln(2+\beta)} I(1,\beta) \le 1 + \frac{\beta+1}{2+\beta}\times\frac{1}{\ln(2+\beta)}$.

$\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\beta+1}{2+\beta}\,\frac{1}{\ln(2+\beta)}\right) = 1\times 0 = 0$ donc par encadrement $\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\beta+1}{\ln(2+\beta)} I(1,\beta)\right) = 1$

Alors $I(1,\beta) \underset{\beta\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2+\beta)}{\beta+1} \underset{\beta\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2+\beta)}{\beta}$.

$\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{\ln(2+\beta)}{\ln\beta} - 1\right) = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\beta}\times\ln\left(1+\frac{2}{\beta}\right)\right) = 0\times 0 = 0$; $\lim_{\beta\to+\infty}\frac{\ln(2+\beta)}{\ln\beta} = 1$.

Ainsi $\ln(2+\beta) \underset{\beta\to+\infty}{\sim} \ln\beta$. Finalement : $I(1,\beta) \underset{\beta\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\beta}{\beta}$.

PARTIE III

Q1 $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $u_i(\beta) = \dfrac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-i+2)(\beta-i+1)}{i\,(i-1)!} = \dfrac{\beta-i+1}{i}\,u_{i-1}(\beta)$.

$u_0(\beta) = 1$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $u_i(\beta) = \big((\beta-i+1)/i\big)\,u_{i-1}(\beta)$.

```
function BOURDELLE(k:integer;beta:real):real;

var i:integer;p:real;

begin
p:=1;
for i:=1 to k do p:=(beta-i+1)/i*p;

BOURDELLE:=p;
end;
```

variante. on remplace β par $\beta+1$.

```
function BOURDELLE2(k:integer;beta:real):real;

var i:integer;p:real;

begin
p:=1;beta:=beta+1;
for i:=1 to k do p:=(beta-i)/i*p;

BOURDELLE2:=p;
```

Q2 a) Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}$.

1er cas. $k > n$. Alors $n \leq k-1$.

Ainsi $u_k(n) = \dfrac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = 0$ (i prend une fois la valeur n).

2e cas $k \leq n$.

Si $k \geq 1$: $u_k(n) = \dfrac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \dfrac{1}{k!}\,\dfrac{n!}{(n-k)!} = C_n^k$.

Si $k=0$: $u_k(n) = 1 = C_n^0 = C_n^k$.

$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2$, $u_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ C_n^k & \text{si } k \leq n \end{cases}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $(-1)^k \dfrac{u_k(n)}{(k+1)^{\alpha+1}} = 0$

Ainsi la série de terme général $(-1)^k \dfrac{u_k(n)}{(k+1)^{\alpha+1}}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{u_k(n)}{(k+1)^{\alpha+1}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{u_k(n)}{(k+1)^{\alpha+1}}$

Alors $\Gamma(\alpha+1)\sum_{\ell=0}^{+\infty}(-1)^\ell \frac{u_\ell(n)}{(\ell+1)^{\alpha+1}}$ existe et vaut : $\Gamma(\alpha+1)\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell \frac{u_\ell(n)}{(\ell+1)^{\alpha+1}}$.

Or $\Gamma(\alpha+1)\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell \frac{u_\ell(n)}{(\ell+1)^{\alpha+1}} = \Gamma(\alpha+1)\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell \frac{C_n^\ell}{(\ell+1)^{\alpha+1}} = I(\alpha,n)$.

$\forall n\in\mathbb{N},\quad I(\alpha,n) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}(-1)^\ell \frac{u_\ell(n)}{(\ell+1)^{\alpha+1}}$.

(Q3) a) Soit $\ell\in\mathbb{N}^*$. $\ell^{\beta+1}|u_\ell(\beta)| = \ell^{\beta+1}\frac{1}{\ell!}\prod_{i=0}^{\ell-1}|\beta-i| > 0$. ($\beta\in\mathbb{N}$)

Ainsi pour tout $\ell\in\mathbb{N}^*$, $v_\ell = \ln(\ell^{\beta+1}|u_\ell(\beta)|)$ est défini.

Soit $\ell\in\mathbb{N}^*$ tel que $\ell>\beta$.

$$w_\ell = v_{\ell+1}-v_\ell = \ln\left[\frac{(\ell+1)^{\beta+1}|u_{\ell+1}(\beta)|}{\ell^{\beta+1}|u_\ell(\beta)|}\right] = \ln\left[\frac{(\ell+1)^{\beta+1}}{\ell^{\beta+1}}\cdot\frac{|\beta-\ell|}{\ell+1}\right] \overset{\ell>\beta}{=} \ln\left[\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right)^\beta\frac{\ell-\beta}{\ell}\right]$$

$w_\ell = \beta\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)+\ln\left(1-\frac{\beta}{\ell}\right)$ et ceci pour tout ℓ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\ell>\beta$.

$\beta\ln(1+x)+\ln(1-\beta x) = \beta\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+(-\beta x)-\frac{1}{2}(\beta x)^2+o(x^2)$ au voisinage de 0.

$\beta\ln(1+x)+\ln(1-\beta x) = -\frac{1}{2}\beta(\beta+1)x^2+o(x^2)$ au voisinage de 0.

Alors $w_\ell = -\frac{1}{2}\beta(\beta+1)\frac{1}{\ell^2}+o\left(\frac{1}{\ell^2}\right)$.

1er cas.. $\beta\neq-1$. $\quad w_\ell \sim -\frac{1}{2}\beta(\beta+1)\frac{1}{\ell^2}$

1°. $|w_\ell|\sim\frac{1}{2}|\beta(\beta+1)|\frac{1}{\ell^2}$

2°.. $\forall\ell\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\ell^2}\geq 0$

3°.. la série de terme général $\frac{1}{\ell^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $|w_\ell|$. La série de terme général w_ℓ est absolument convergente donc convergente.

<u>2° cas</u>.. $\beta=-1$. $\quad w_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. $\quad \lim\limits_{k\to+\infty}(k^2 w_k)=0$.

$\exists p\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ |k^2 w_k|\leq 1$.

1/ $\forall k\in[\![p,+\infty[\![,\ 0\leq|w_k|\leq\frac{1}{k^2}$ et 2/ la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge.

on retrouve alors l'absolue convergence donc la convergence de la série de terme général w_k.

dans tous les cas <u>la série de terme général w_k converge</u>.

Soit $k\in[\![p,+\infty[\![$; $\quad v_k=\sum\limits_{i=1}^{k-1}(v_{i+1}-v_i)+v_1=\sum\limits_{i=1}^{k-1}w_i+v_1$.

la série de terme général w_k étant convergente, la suite de terme général $\sum\limits_{i=1}^{k-1}w_i$ converge, alors <u>la suite de terme général v_k converge</u>.

c) Posons $\ell=\lim\limits_{k\to+\infty}v_k$. $\quad \lim\limits_{k\to+\infty}\ln\left(k^{\beta+1}|u_k(\beta)|\right)=\ell$.

Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(k^{\beta+1}|u_k(\beta)|\right)=e^{\ell}$. Posons $L=e^{\ell}$.

$L>0$ et $k^{\beta+1}|u_k(\beta)|\sim L$.

$\exists L\in\mathbb{R}_+^*,\quad |u_k(\beta)|\sim\frac{L}{k^{\beta+1}}$.

d) On suppose que $(\alpha,\beta)\in D$. Alors $\alpha+\beta>-1$ ou $\alpha+\beta+2>1$.

$$\left|\frac{(-1)^k u_k(\beta)}{(k+1)^{\alpha+1}}\right|=\frac{|u_k(\beta)|}{(k+1)^{\alpha+1}}\sim\frac{1}{k^{\alpha+1}}|u_k(\beta)|\sim\frac{1}{k^{\alpha+1}}\times\frac{L}{k^{\beta+1}}=\frac{L}{k^{\alpha+\beta+2}}.$$

1°.. $\left|\frac{(-1)^k u_k(\beta)}{(k+1)^{\alpha+1}}\right|\sim\frac{L}{k^{\alpha+\beta+2}}$; 2°.. $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{L}{k^{\alpha+\beta+2}}\geq 0$; 3°.. la série de terme général $\frac{L}{k^{\alpha+\beta+2}}$ converge car $\alpha+\beta+2>1$. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\left|\frac{(-1)^k u_k(\beta)}{(k+1)^{\alpha+1}}\right|$ converge.

Si $(\alpha,\beta)\in D$, la série de terme général $(-1)^k \dfrac{u_k(\beta)}{(k+1)^{\alpha+1}}$ est absolument convergente.

Q4 a) Montrons le résultat par récurrence.

→ C'est clair pour $k=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

h est k fois dérivable et $\forall x\in[0,1[$, $h^{(k)}(x)=(-1)^k u_k(\beta)\, k!\,(1-x)^{\beta-k}$

Alors $h^{(k)}$ est dérivable et $\forall x\in[0,1[$, $(h^{(k)})'(x)=(-1)^k u_k(\beta)\, k!\,[-(\beta-k)](1-x)^{\beta-k-1}$

h est donc $k+1$ fois dérivable sur $[0,1[$ et :

$\forall x\in[0,1[$, $h^{(k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\dfrac{u_k(\beta)(\beta-k)}{k+1}(k+1)!\,(1-x)^{\beta-(k+1)}=(-1)^{k+1}u_{k+1}(\beta)(k+1)!\,(1-x)^{\beta-(k+1)}$

ceci achève la récurrence.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, h est k fois dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x\in[0,1[$, $h^{(k)}(x)=(-1)^k u_k(\beta)\, k!\,(1-x)^{\beta-k}$.

---

b) Soit $x\in[0,1[$. Pour $\forall t\in[0,x]$, $\Delta(t)=\dfrac{x-t}{1-t}$.

Δ est dérivable sur $[0,x]$ et $\forall t\in[0,x]$, $\Delta'(t)=\dfrac{x-1}{(1-t)^2}<0$. Δ est décroissante sur $[0,x]$.

$\forall t\in[0,x]$, $\Delta(0)\geqslant\Delta(t)\geqslant\Delta(x)$. $\forall t\in[0,x]$, $\Delta(0)=x\geqslant\Delta(t)\geqslant\Delta(x)=0$.

Ainsi $\displaystyle\max_{t\in[0,x]}|\Delta(t)|=\max_{t\in[0,x]}\Delta(t)=\Delta(0)=x$.

$\forall x\in[0,1[$, $\displaystyle\max_{t\in[0,x]}\left|\frac{x-t}{1-t}\right|=x$.

---

c) h est de classe C^∞ sur $[0,1[$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre p à h permet d'écrire

$$\left|h(x)-\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}h^{(k)}(0)\right|=\left|\int_0^x\frac{(x-t)^p}{p!}h^{(p+1)}(t)\,dt\right|.\ \text{Donc :}$$

$$\left|(1-x)^\beta-\sum_{k=0}^{p}(-1)^k u_k(\beta)x^k\right|\underset{x\geqslant 0}{\leqslant}\int_0^x\frac{|x-t|^p}{p!}|u_{p+1}(\beta)|(p+1)!\,|1-t|^{\beta-(p+1)}\,dt$$

$$\left|(1-x)^\beta-\sum_{k=0}^{p}(-1)^k u_k(\beta)x^k\right|\leqslant(p+1)|u_{p+1}(\beta)|\int_0^x\left|\frac{x-t}{1-t}\right|^p|1-t|^{\beta-1}\,dt.$$

b) permet alors d'écrire : $\left|(1-x)^\beta - \sum_{\ell=0}^{p}(-1)^\ell u_\ell(\beta)x^\ell\right| \leq (p+1)\,|u_{p+1}(\beta)|\,x^p \int_0^x \underbrace{|1-t|^{\beta-1}}_{\leq (1-t)^{\beta-1}} dt$.

Finalement $\left|(1-x)^\beta - \sum_{\ell=0}^{p}(-1)^\ell u_\ell(\beta)x^\ell\right| \leq (p+1)\,|u_{p+1}(\beta)|\,x^p \int_0^x (1-t)^{\beta-1}\,dt$.

Posons $M = \int_0^x (1-t)^{\beta-1}dt$.

$$(p+1)\,|u_{p+1}(\beta)|\,x^p \int_0^x (1-t)^{\beta-1}dt \underset{p\to+\infty}{\overset{Q3}{\sim}} p\,\frac{L}{(p+1)^{\beta+1}}\,x^p\,M \underset{p\to+\infty}{\sim} LM\,\frac{1}{p^\beta}\,x^p.$$

Alors $\lim_{p\to+\infty}\left[(p+1)\,|u_{p+1}(\beta)|\,x^p \int_0^x (1-t)^{\beta-1}dt\right] = \lim_{p\to+\infty}\left(LM\,\frac{1}{p^\beta}\,x^p\right) = 0$ accroissement comparé avec $|x|<1$.

Il vient alors par encadrement $\lim_{p\to+\infty}\sum_{\ell=0}^{p}(-1)^\ell u_\ell(\beta)x^\ell = (1-x)^\beta$.

Pour tout x dans $[0,1[$ la série de terme général $(-1)^\ell u_\ell(\beta)x^\ell$ converge et

$$(1-x)^\beta = \sum_{\ell=0}^{+\infty}(-1)^\ell u_\ell(\beta)\,x^\ell.$$ (Ceci vaut encore pour $x\in]-1,0[$).

d) Soit $u\in]0,+\infty[$ alors $e^{-u}\in]0,1[$ donc, d'après c),

$(1-e^{-u})^\beta = \sum_{\ell=0}^{+\infty}(-1)^\ell u_\ell(\beta)\,e^{-\ell u}$. En multipliant par $u^\alpha e^{-u}$ il vient :

$$u^\alpha e^{-u}(1-e^{-u})^\beta = \sum_{\ell=0}^{+\infty}(-1)^\ell u_\ell(\beta)\,u^\alpha e^{-(\ell+1)u}.$$

Supposons que $(\alpha,\beta)\in D$. $\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}(1-e^{-u})^\beta du$ existe et vaut $I(\alpha,\beta)$.

Pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-(\ell+1)u}du$ existe et vaut $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\ell+1)^{\alpha+1}}$.

Alors si l'on admet que l'on peut permuter la somme infinie avec l'intégrale généralisée, en intégrant l'égalité précédente il vient :

$$I(\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k(\beta) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^{\alpha+1}}.$$

Donc si $(\alpha,\beta) \neq 0$: $I(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{u_k(\beta)}{(k+1)^{\alpha+1}}$.

(Q5) a) Si x est dans $\mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

La domaine de ζ est $]1,+\infty[$.

Soit $(x,y) \in]1,+\infty[^2$ tel que $x \leq y$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \leq 1$ donc

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{1}{k}\right)^x \geq \left(\frac{1}{k}\right)^y$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \sum^{+\infty} \frac{1}{k^y}$; $\zeta(x) \geq \zeta(y)$.

$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2$, $x \leq y \Rightarrow \zeta(x) \geq \zeta(y)$. ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.

$\forall x \in]1,+\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \frac{1}{1^x} = 1$; ζ est minorée par 1 sur $]1,+\infty[$.

b) Soit $x \in]1,+\infty[$. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ converge car $x > 1$.

$t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k,k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$.

$\forall p \in [\![1,+\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(k+1)^x} \leq \sum_{k=1}^{p} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^{p+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$.

En faisant tendre p vers $+\infty$ il vient : $\zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x)$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dt}{t^x} = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^A = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{A^{x-1}} - 1\right)\right) \overset{x>1}{=} \frac{1}{x-1}.$$

Alors $\zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x)$. $\forall x \in]1,+\infty[$, $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$.

$\forall x \in]1,+\infty[$, $1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x-1+1 = x$.

Par encadrement $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\zeta(x) = 1$; $\zeta(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 1^{(+)}} \zeta(x) = +\infty$

$\forall x \in]1,+\infty[$, $1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right) = 1$. Par encadrement il vient :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $u_k(-1) = \dfrac{1}{k!}(-1)(-2)\cdots(-1-k+1) = \dfrac{(-1)^k}{k!} 1 \times 2 \times \cdots \times k = (-1)^k$.

$u_k(-2) = \dfrac{1}{k!}(-2)(-3)\cdots(-2-k+1) = \dfrac{(-1)^k}{k!} 2 \times 3 \times \cdots \times (k+1) = (-1)^k (k+1)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(-1) = (-1)^k$ et $u_k(-2) = (-1)^k (k+1)$. Ricorso $\forall k \in \mathbb{N}, u_k(-1) = (-1)^k$ et $u_k(-2) = (-1)^k (k+1)$.

Soit $\alpha \in]0,+\infty[$. $(\alpha,-1) \in D$ donc $I(\alpha,-1) = \Gamma(\alpha+1) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{u_k(-1)}{(k+1)^{\alpha+1}}$.

$I(\alpha,-1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} = \zeta(\alpha+1)$.

Se pleu $I(\alpha,-1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} (1-e^{-u})^{-1} du = \int_0^{+\infty} u^\alpha \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{e^u - 1} du$.

Donc $I(\alpha,-1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{e^u-1} du = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)$.

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \zeta(\alpha+1) = 1$; ainsi $I(\alpha,-1) \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$.

Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. $(\alpha,-2) \in D$ donc $I(\alpha,-2) = \Gamma(\alpha+1) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k u_k(-2)}{(k+1)^{\alpha+1}} = \Gamma(\alpha+1) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k+1}{(k+1)^{\alpha+1}}$.

$I(\alpha,-2) = \Gamma(\alpha+1) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha)$.

Or $I(\alpha,-2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} (1-e^{-u})^{-2} du = \int_0^{+\infty} u^\alpha \frac{e^{-u}}{(1-e^{-u})^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha e^u}{(e^u-1)^2} du$.

$I(\alpha,-2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha e^u}{(e^u-1)^2} du = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha)$ et $I(\alpha,-2) \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$ car $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \zeta(\alpha) = 1$.

Q6 a) $n \in \mathbb{N}^*$. $\alpha > n$. Soit $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

$$\int_\varepsilon^A t^{\alpha-1} e^{-t}(1-e^{-t})^{-n}\,dt = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} e^{-t}(1-e^{-t})^{-n}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{\alpha}\left(-e^{-t}(1-e^{-t})^{-n} - n e^{-t} e^{-t}(1-e^{-t})^{-n-1}\right)dt$$

$$\int_\varepsilon^A t^{\alpha-1} e^{-t}(1-e^{-t})^{-n}\,dt = \frac{A^\alpha}{\alpha} e^{-A}(1-e^{-A})^{-n} - \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} e^{-\varepsilon}(1-e^{-\varepsilon})^{-n} + \frac{1}{\alpha}\int_\varepsilon^A t^\alpha e^{-t}(1-e^{-t})^{-n}\,dt +$$

$$\frac{n}{\alpha}\int_\varepsilon^A t^\alpha e^{-t}(e^{-t}-1+1)(1-e^{-t})^{-n-1}\,dt = \frac{A^\alpha}{\alpha} e^{-A}(1-e^{-A})^{-n} - \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} e^{-\varepsilon}(1-e^{-\varepsilon})^{-n} +$$

$$\frac{1-n}{\alpha}\int_\varepsilon^A t^\alpha e^{-t}(1-e^{-t})^{-n}\,dt + \frac{n}{\alpha}\int_\varepsilon^A t^\alpha e^{-t}(1-e^{-t})^{-n-1}\,dt.$$

Notons que $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{A^\alpha}{\alpha} e^{-A}(1-e^{-A})^{-n}\right) = 0$ par croissance comparée.

De plus $\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} e^{-\varepsilon}(1-e^{-\varepsilon})^{-n} \underset{0}{\sim} \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}(1-e^{-\varepsilon})^{-n} \underset{0}{\sim} \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}\varepsilon^{-n} = \frac{\varepsilon^{\alpha-n}}{\alpha}$.

Comme $\alpha - n > 0$: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} e^{-\varepsilon}(1-e^{-\varepsilon})^{-n}\right) = 0$.

Alors en faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$ les égalités précédentes donnent :

$$\int_0^{+\infty} I(\alpha-1,-n) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}(1-e^{-t})^{-n}\,dt = \frac{1-n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}(1-e^{-t})^{-n}\,dt + \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}(1-e^{-t})^{-n-1}\,dt.$$

ou $I(\alpha-1,-n) = -\frac{n-1}{\alpha} I(\alpha,-n) + \frac{n}{\alpha} I(\alpha,-(n+1))$.

Remarque.. Toutes les intégrales convergent car $\alpha-1-n > -1$, $\alpha - n > -1$ et $\alpha-(n+1) > -1$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > n$: $I(\alpha-1,-n) = -\frac{n-1}{\alpha} I(\alpha,-n) + \frac{n}{\alpha} I(\alpha,-(n+1))$.

Alors $\underline{n\, I(\alpha,-(n+1)) = (n-1)\, I(\alpha,-n) + \alpha\, I(\alpha-1,-n)}$.

Supposons $n \geqslant 2$ et toujours $\alpha > n$. Alors $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha > k$.

Donc $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $k\, I(\alpha,-(k+1)) = (k-1) I(\alpha,-k) + \alpha\, I(\alpha-1,-k)$.

Donc $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k I(\alpha,-(k+1)) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}(k-1) I(\alpha,-k) + \alpha \sum\limits_{k=1}^{n-1} I(\alpha-1,-k)$.

Alors $(n-1)\, I(\alpha,-n) = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} I(\alpha-1,-k)$.

Donc $\underline{\underline{I(\alpha,-n) = \frac{\alpha}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} I(\alpha-1,-k)}}$.

b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I(\alpha,-n) \underset{\alpha \mapsto +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$.

→ C'est vrai pour $n=1$ (et même $n=2$) d'après III Q5.

→ Choisissons n dans $[\![2,+\infty[\![$ et supposons la propriété vraie pour tout élément k de $[\![1,n-1]\!]$. Montrons la alors pour n.

On a : $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $\lim_{\alpha \mapsto +\infty} \frac{I(\alpha,-k)}{\Gamma(\alpha+1)} = 1$ ou $\lim_{\alpha \mapsto +\infty} \frac{I(\alpha-1,-k)}{\Gamma(\alpha)} = 1$

$\forall \alpha \in [n+1,+\infty[$, $\frac{I(\alpha,-n)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\alpha}{n-1} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{I(\alpha-1,-k)}{\Gamma(\alpha)}$.

$\forall \alpha \in [n+1,+\infty[$, $\frac{I(\alpha,-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \underset{\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)}{=} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{I(\alpha-1,-k)}{\Gamma(\alpha)}$.

Alors $\lim_{\alpha \mapsto +\infty} \frac{I(\alpha,-n)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 1$ car $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $\lim_{\alpha \mapsto +\infty} \frac{I(\alpha-1,-k)}{\Gamma(\alpha)} = 1$.

Donc $I(\alpha,-n) \underset{\alpha \mapsto +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$ ce qui achève la récurrence.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $I(\alpha,-n) \underset{\alpha \mapsto +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{Z}$, $I(\alpha,n) \underset{\alpha \mapsto +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$

c) A la fin de la partie I nous avons vu que pour tout réel β positif :

$I(\alpha,\beta) \underset{\alpha \mapsto +\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)$. Ne reste plus qu'à le montrer pour $\beta \in \mathbb{R}_-^*$.

Soit $\beta \in \mathbb{R}_-^*$. $\forall t \in]0,+\infty[$, $(1-e^{-t})^{E(\beta)} \underset{1-e^{-t} \in]0,1[}{\geqslant} (1-e^{-t})^{\beta} \geqslant (1-e^{-t})^{E(\beta)+1}$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $t^\alpha e^{-t}(1-e^{-t})^{E(\beta)} \geq t^\alpha e^{-t}(1-e^{-t})^\beta \geq t^\alpha e^{-t}(1-e^{-t})^{E(\beta)+1}$.

Supposons $\alpha > -E(\beta)-1$. Alors $\alpha + E(\beta) > -1$, $\alpha + E(\beta)+1 > -1$ et $\alpha+\beta > -1$.

Puisqu'alors en intégrant : $I(\alpha, E(\beta)) \geq I(\alpha,\beta) \geq I(\alpha, E(\beta)+1)$.

Donc $\dfrac{I(\alpha, E(\beta))}{\Gamma(\alpha+1)} \geq \dfrac{I(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha+1)} \geq \dfrac{I(\alpha, E(\beta)+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Comme $E(\beta) \in \mathbb{Z}$ et $E(\beta)+1 \in \mathbb{Z}$: $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{I(\alpha, E(\beta))}{\Gamma(\alpha+1)} = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{I(\alpha, E(\beta)+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = 1$.

Par encadrement : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{I(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha+1)} = 1$. $\quad \underline{\underline{I(\alpha,\beta) \underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)}}$.

Q7 a) <u>ψ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.</u>

$\lim\limits_{x\to0^+} \psi(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1-e^{-x}}{x}\right) = 1$ car $1-e^{-x} \underset{0}{\sim} x$; $\lim\limits_{x\to0^+} \psi(x) = \psi(0)$.

ψ est alors continue en 0. <u>ψ est continue sur $[0,+\infty[$</u>

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\psi'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left[e^{-x}x - (1-e^{-x})\right]$. $\quad e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$e^{-x}x - (1-e^{-x}) = x - x^2 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$e^{-x}x - (1-e^{-x}) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$; $\psi'(x) \underset{0^+}{\sim} -\dfrac{1}{2}$. $\quad \underline{\lim\limits_{x\to0^+} \psi'(x) = -\dfrac{1}{2}}$

Le théorème de la limite de la dérivée montre alors que <u>ψ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.</u>

Notons que $\psi'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

La stricte convexité de exp permet sans difficulté de prouver que :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $e^x > x+1$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $1 > (x+1)e^{-x} = xe^{-x} + e^{-x}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) = \dfrac{1}{x^2}(xe^{-x} + e^{-x} - 1) < 0$. Mieux $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\psi'(x) < 0$.

φ est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi φ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur l'intervalle $]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x), \varphi(0)] =]0,1]$.

φ définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$.

φ est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $\varphi'(x)\neq 0$.

Alors φ^{-1} est continue et dérivable sur $]0,1]$.

$\forall x\in]0,1]$, $(\varphi^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. φ' étant continue sur $[0,+\infty[$ et φ^{-1} étant continue sur $]0,1]$, $(\varphi^{-1})'$ est continue sur $]0,1]$. φ est de classe C^1 sur $]0,1]$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $-n+n=0>-1$ donc $I(-n,n)$ existe. $I(-n,n)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n du$.

Soit $(\varepsilon,A)\in\mathbb{R}_+^{*2}$ tel que $\varepsilon<A$.

φ étant de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ effectuons le changement de variable $t=\varphi(u)$ dans $\displaystyle\int_\varepsilon^A e^{-u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n du = \int_\varepsilon^A e^{-u}(\varphi(u))^n du$.

Vient : $$\int_\varepsilon^A e^{-u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n du \underset{\substack{t=\varphi(u)\\ u=\varphi^{-1}(t)\\ du=(\varphi^{-1})'(t)dt}}{=} \int_{\varphi(\varepsilon)}^{\varphi(A)} e^{-\varphi^{-1}(t)}\, t^n (\varphi^{-1})'(t)\,dt = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(\varepsilon)} t^n\left(-e^{-\varphi^{-1}(t)}(\varphi^{-1})'(t)\right)dt.$$

$\lim\limits_{A\to+\infty}\varphi(A)=0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\varphi(\varepsilon)=1$. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n du$ converge :

$\displaystyle\int_0^1 t^n\left(-e^{-\varphi^{-1}(t)}(\varphi^{-1})'(t)\right)dt$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^n du$.

Ainsi $$I(-n,n) = \int_0^1 t^n\left(-e^{-\varphi^{-1}(t)}\right)(\varphi^{-1})'(t)\,dt.$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. $$\frac{\int_0^1 t^n g(t)\,dt - \frac{g(1)}{n+1}}{g(1)/(n+1)} = \frac{n+1}{g(1)}\left(\int_0^1 t^n(g(t)-g(1))\,dt\right).$$

Finalement il convient de prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)\displaystyle\int_0^1 t^n(g(t)-g(1))\,dt\right]=0$.

Fixons ε dans $\mathbb{R}_+^*$. La continuité de g en 1 permet de dire que l'on peut trouver α dans $]0,1[$ tel que : $\forall t \in [\alpha, 1]$, $|g(t)-g(1)| < \varepsilon/2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left|\int_0^1 (g(t)-g(1))t^n\,dt\right| \leq \int_0^1 |g(t)-g(1)|\,t^n\,dt \leq \int_0^\alpha |g(t)-g(1)|\,t^n\,dt + \int_\alpha^1 \frac{\varepsilon}{2}\,t^n\,dt$$

$$\left|\int_0^1 (g(t)-g(1))t^n\,dt\right| \leq \alpha^n \int_0^1 |g(t)-g(1)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2(n+1)}(1-\alpha^{n+1}).$$

Posons $C = \int_0^1 |g(t)-g(1)|\,dt$.

$$\left|(n+1)\int_0^1 t^n(g(t)-g(1))\,dt\right| \leq (n+1)\alpha^n C + \frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha^{n+1}) \leq (n+1)\alpha^n C + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} ((n+1)\alpha^n C) = 0$ donc $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $(n+1)\alpha^n C < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \left|(n+1)\int_0^1 t^n(g(t)-g(1))\,dt\right| < \varepsilon$.

Ceci achève de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)\int_0^1 t^n(g(t)-g(1))\,dt\right] = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\int_0^1 t^n g(t)\,dt - \frac{g(1)}{n+1}}{g(1)/(n+1)} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\int_0^1 t^n g(t)\,dt}{\frac{g(1)}{n+1}} = 1$.

$$\int_0^1 t^n g(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{g(1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{g(1)}{n}.$$

d) $\lim\limits_{t\to 0}\left[-e^{-\psi^{-1}(t)}(\psi^{-1})'(t)\right] = \lim\limits_{t\to 0}\left[-e^{-\psi^{-1}(t)}\dfrac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}\right] \overset{\lim\limits_{t\to 0}\psi^{-1}(t)=+\infty}{=} \lim\limits_{z\to+\infty}\left[\dfrac{-e^{-z}}{\psi'(z)}\right]$

$$\lim_{t\to 0}\left[-e^{-\psi^{-1}(t)}(\psi^{-1})'(t)\right] = \lim_{z\to+\infty} \frac{-z^2 e^{-z}}{e^{-z}z - 1 + e^{-z}} = 0.$$

$t \mapsto -e^{-\psi^{-1}(t)}(\psi^{-1})'(t)$ se prolonge en une fonction g continue sur $[0,1]$.

Notons que $g(1) = -\dfrac{e^{-\psi^{-1}(1)}}{\psi'(\psi^{-1}(1))} = -\dfrac{e^{-0}}{\psi'(0)} = -\dfrac{1}{-1/2} = 2$.

Alors d'après c) $\int_0^1 t^n g(t)\,dt \sim \frac{2}{n}$ donc $I(-n,n) \sim \frac{2}{n}$.