PARTIE I Chaînes de Markov.

(Q1) **a)** Considérons un mobile M se déplaçant sur les bords d'un triangle dont les sommets sont S_1, S_2 et S_3.

- A l'instant 0, M se trouve sur l'un des sommets.
- Si à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$) le mobile M se trouve sur le sommet S_i à l'instant $k+1$ il a une chance sur 2 de rester en S_i ; s'il ne reste pas en S_i il va sur l'un des deux autres sommets avec la même probabilité.

→ Les trois états du système sont E_1, E_2 et E_3 où E_i correspond au cas où M est en S_i.

→ L'état du système à l'instant $k+1$ ne dépend que de son état à l'instant k.

→ $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $t_{ij} = P_{(X_k=i)}(X_k=j) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } j=i \\ 1/4 & \text{si } j \neq i \end{cases}$

La matrice de transition est donc $T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Un pion se déplace sur un échiquier à quatre cases C_1, C_2, C_3, C_4. S

- A l'instant 0, le pion est sur l'une des cases.
- Si à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$) le pion est en C_i avec $i \in [\![1,3]\!]$ à l'instant $k+1$ il se trouve sur l'une des trois autres cases et ceci avec la même probabilité.
- Si à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$) le pion est en C_4 à l'instant $k+1$ il est encore en C_4.

→ Les quatre états du système sont E_1, E_2, E_3, E_4 où E_i correspond au cas où le jeton se trouve sur C_i.

→ L'état du système à l'instant $k+1$ ne dépend que de son état à l'instant k.

<u>EXERCICE</u> .. Montrer que la matrice de transition est : $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

R

Q2 Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(X_k=i) \neq 0$.

- $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,j} = P_{\{X_k=i\}}(X_{k+1}=j) \geqslant 0$

- Rappelons que $P_{\{X_k=i\}}$ est une probabilité et que $(\{X_{k+1}=j\})_{j\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements. Alors :

$$\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} P_{\{X_k=i\}}(X_{k+1}=j) = P_{\{X_k=i\}}\left(\bigcup_{j=1}^{n}\{X_{k+1}=j\}\right) = P_{\{X_k=i\}}(\Omega) = 1.$$

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], t_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} = 1$.

T est une matrice stochastique.

Q3 Soit k dans $\mathbb{N}$ et soit j dans $[\![1,n]\!]$. $(\{X_k=i\})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements. Alors $P(X_{k+1}=j) = \sum_{i=1}^{n} P(\{X_k=i\}\cap\{X_{k+1}=j\})$.

Soit i dans $[\![1,n]\!]$.

1er cas.. $P(X_k=i)\neq 0$. Alors $P(\{X_k=i\}\cap\{X_{k+1}=j\}) = P(X_k=i)\, P_{\{X_k=i\}}(X_{k+1}=j)$.

donc $P(\{X_k=i\}\cap\{X_{k+1}=j\}) = P(X_k=i)\, t_{i,j}$.

2ème cas.. $P(X_k=i)=0$. Comme $\{X_k=i\}\cap\{X_{k+1}=j\} \subset \{X_k=i\}$ par croissance de P on a : $0 \leqslant P(\{X_k=i\}\cap\{X_{k+1}=j\}) \leqslant P(X_k=i)=0$.

Donc $P(\{X_k=i\}\cap\{X_{k+1}=j\}) = P(X_k=i) = 0$.

Alors $P(\{X_k=i\}\cap\{X_{k+1}=j\}) = 0 = 0\times t_{i,j} = P(X=i)\, t_{i,j}$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(\{X_k=i\}\cap\{X_{k+1}=j\}) = P(X=i)\, t_{i,j}$.

Alors $P(X_{k+1}=j) = \sum_{i=1}^{n} P(X_k=i)\, t_{i,j}$ et ceci pour tout j dans $[\![1,n]\!]$.

Ce qui signifie que $W_{k+1} = W_k\, T$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Une récurrence simple donne : $\forall k \in \mathbb{N}$, $W_k = W_0\, T^k$.

(Q4) a] et b] D'une pierre deux coups ! Fixons r dans $\mathbb{N}$ et notons par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}^{(*)}$, pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}^{(k)}$ est la probabilité pour que le système soit dans l'état E_j à l'instant $r+k$ sachant qu'il était dans l'état E_i à l'instant r.

* La propriété est vraie pour $k=1$ d'après Q3 ... elle est aussi vraie pour $k=0$

* Supposons la propriété vraie pour un élément k dans $\mathbb{N}^*$ et notons la pour $k+1$.
 Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Supposons que $P(X_r=i)\neq 0$.
 Notons que $P_{\{X_r=i\}}(X_{r+k+1}=j)=t_{i,j}^{(k+1)}$.

$(\{X_{r+k}=\ell\})_{\ell\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

Alors $P_{\{X_r=i\}}(X_{r+k+1}=j)=\dfrac{P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k+1}=j\})}{P(X_r=i)}=\dfrac{1}{P(X_r=i)}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\}\cap\{X_{r+k+1}=j\})$

Soit $\ell\in[\![1,n]\!]$

1er cas.. $P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\})\neq 0$.

$P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\}\cap\{X_{r+k+1}=j\})=P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\})\,P_{\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\}}(X_{r+k+1}=j)$.

$P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\}\cap\{X_{r+k+1}=j\})=P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\})\,P_{\{X_{r+k}=\ell\}}(X_{r+k+1}=j)$

$$\boxed{P_{\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\}}(X_{r+k+1}=j)=P_{\{X_{r+k}=\ell\}}(X_{r+k+1}=j).}$$

$P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\}\cap\{X_{r+k+1}=j\})=P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\})\,t_{\ell,j}$.

2ème cas.. $P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\})=0$.

Alors le résultat précédent reste vrai car par croissance de la probabilité on a : $P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\}\cap\{X_{r+k+1}=j\})=0$.

Finalement $P_{\{X_r=i\}}(X_{r+k+1}=j)=\dfrac{1}{P(X_r=i)}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+k}=\ell\})\,t_{\ell,j}$.

L'hypothèse de récurrence donne alors :

$\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $P(\{X_r=i\}\cap\{X_{r+\ell}=\ell\}) = P(X_r=i)\, P_{\{X_r=i\}}(X_{r+k}=\ell) = P(X_r=i)\times t_{i,\ell}^{(k)}$

Alors $P_{\{X_r=i\}}(X_{r+k+1}=j) = \dfrac{1}{P(X_r=i)} \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} P(X_r=i)\, t_{i,\ell}^{(k)}\, t_{\ell,j}$.

Donc $P_{\{X_r=i\}}(X_{r+k+1}=j) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} t_{i,\ell}^{(k)} t_{\ell,j} = t_{i,j}^{(k+1)}$ ce qui achève la récurrence.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}^{(*)}$ et pour tout élément (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}^{(k)}$ est la probabilité pour que le système soit dans l'état E_j à l'instant $r+k$ sachant qu'il était dans l'état E_i à l'instant r.

(Q5) a) Nous n'utiliserons pas le fait que T est symétrique ... pour la réduction

Observons que $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12+\frac14+\frac14\\ \frac14+\frac12+\frac14\\ \frac14+\frac14+\frac12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Alors 1 est valeur propre de T et $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \subset SEP(T,1)$;

$T-\frac14 I_3 = \frac14\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. $\frac14\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

donc elle n'est pas inversible.

$T-\frac14 I_3$ n'est pas inversible ainsi 1/4 est valeur propre de T.

De plus $\dim SEP(T,\frac14) = 3 - rg(T-\frac14 I_3) = 3-1 = 2$.

Résumons. $1 \in Sp(T)$, $\frac14 \in Sp\,T$, $\dim SEP(T,1) \geqslant 1$ et $\dim SEP(T,\frac14) = 2$.

T étant une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, nécessairement : $Sp\,T = \{1, \frac14\}$,

$\dim SEP(T,1) = 1$ et $\dim SEP(T,\frac14) = 2$.

Alors $\dim SEP(T,1) + \dim SEP(T,1/4) = 3$. T est diagonalisable.

R

Soit (Y_1) une base de $SEP(T,1)$ et (Y_2, Y_3) une base de $SEP(T,\frac{1}{4})$.

Comme $M_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(T,1) \oplus SEP(T,\frac{1}{4})$: (Y_1, Y_2, Y_3) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de T respectivement associés aux valeurs propres 1, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (Y_1, Y_2, Y_3).

P est inversible et $P^{-1}TP = \mathrm{Diag}(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Ainsi <u>T est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1,\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.</u>

▲ **Remarque** .. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(T,1)$ et il est facile de montrer que $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(T,\frac{1}{4})$. Nous pouvons donc prendre

$Y_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Cela conduit à $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

Un calcul simple donne $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$. Et pour quelques dollars de plus :

$$\underline{T^k = P\,\mathrm{Diag}(1, (\tfrac{1}{4})^k, (\tfrac{1}{4})^k)\,P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2(1/4)^k & 1-(1/4)^k & 1-(1/4)^k\\ 1-(1/4)^k & 1+2(1/4)^k & 1-(1/4)^k\\ 1-(1/4)^k & 1-(1/4)^k & 1+2(1/4)^k\end{pmatrix}}.$$ ▼

Reprenons le cours de l'énoncé.

$P^{-1}TP = \mathrm{Diag}(1, 1/4, 1/4)$ donc $T = P\,\mathrm{Diag}(1, 1/4, 1/4)\,P^{-1}$.

Une récurrence simple donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k = P\,\mathrm{Diag}(1, (1/4)^k, (1/4)^k)\,P^{-1}$.

$\lim_{k\to+\infty} (\frac{1}{4})^k = 0$ donc $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{Diag}(1, (\frac{1}{4})^k, (\frac{1}{4})^k) = \Delta$ où $\Delta = \mathrm{Diag}(1,0,0)$.

R

Alors $(T^k)_{k\geq 0}$ converge vers $P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{Diag}(1,0,0)$.

Dans la suite S est la limite de la suite $(T^k)_{k\geq 0}$. Donc $S = P\Delta P^{-1}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $W_k = W_0 T^k$. La suite $(W_k)_{k\geq 0}$ converge alors vers $W_0 S$.

Donc la suite $(V_k)_{k\geq 0}$ converge vers ${}^t(W_0 S)$ car $\forall k \in \mathbb{N}$, $V_k = {}^t W_k$.

La suite $(V_k)_{k\geq 0}$ converge vers ${}^t S\, {}^t W_0$

Posons $V = {}^t S\, {}^t W_0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

$\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k = i) = v_i$.

$\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X_k = i) \geq 0$ donc $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $v_i \geq 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{3} P(X_k = i) = 1$ donc $\sum\limits_{i=1}^{3} v_i = 1$

Alors l'application φ de $[\![1,3]\!]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\varphi(i) = v_i$ est une loi de probabilité discrète.

Donc la suite $(X_k)_{k\geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète de loi de probabilité φ.

Le système tend donc au cours du temps à être dans l'état E_i avec la probabilité v_i et ceci pour tout i dans $[\![1,3]\!]$.

b) Posons $S = (s_{ij})$. Posons $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $U_3 \in SEP(T,1)$ donc $TU_3 = U_3$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k U_3 = U_3$ grâce à une récurrence simple.

Alors en passant à la limite $SU_3 = U_3$

Ainsi $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{3} s_{ij} \times 1 = 1$; $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{3} s_{i,j} = 1$.

$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $t_{i,j} \geq 0$. Une récurrence simple donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $t_{i,j}^{(k)} \geq 0$.

R

En passant à la limite il vient $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ s_{i,j} \geqslant 0$.

Ceci achève de montrer que S est stochastique.

Soit $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3)$ la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Rappelons que si $M \in M_3(\mathbb{R})$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $M\hat{E}_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de M.

Alors $P\hat{E}_1 = Y_1$, $P\hat{E}_2 = Y_2$ et $P\hat{E}_3 = Y_3$.

Soit $j \in [\![1,3]\!]$. $\exists (\alpha_j, \beta_j, \delta_j) \in \mathbb{R}^3$, $\hat{E}_j = \alpha_j Y_1 + \beta_j Y_2 + \delta_j Y_3$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k \hat{E}_j = \alpha_j T^k Y_1 + \beta_j T^k Y_2 + \delta_j T^k Y_3$.

$TY_1 = Y_1$, $TY_2 = \frac{1}{4} Y_2$ et $TY_3 = \frac{1}{4} Y_3$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k Y_1 = Y_1$, $T^k Y_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^k Y_2$ et $T^k Y_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^k Y_3$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k E_j = \alpha_j Y_1 + \beta_j \left(\frac{1}{4}\right)^k Y_2 + \delta_j \left(\frac{1}{4}\right)^k Y_3$. En passant à la limite il vient $SE_j = \alpha_j Y_1$.

(Y_1) est une base de $\mathrm{SEP}(S,1)$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$, $Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Alors $SE_j = \alpha_j \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ et ceci pour tout j dans $[\![1,3]\!]$.

Donc $S = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 & \alpha\alpha_2 & \alpha\alpha_3 \\ \alpha\alpha_1 & \alpha\alpha_2 & \alpha\alpha_3 \\ \alpha\alpha_1 & \alpha\alpha_2 & \alpha\alpha_3 \end{pmatrix}$. Toutes les lignes de S sont égales.

T est symétrique. Une récurrence simple montre que T^k est symétrique pour tout $k \in \mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, ${}^tT^k = T^k$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $({}^tT)^k = T^k$. En passant à la limite ${}^tS = S$. S est symétrique.

Dans ces conditions si toutes les lignes de S sont égales, toutes ses colonnes sont aussi égales.

Remarque.. Comme α n'est pas nul, ${}^tS = S$ donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Posons $\alpha' = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Alors $S = \alpha'\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme S est stochastique $3\alpha'\alpha = 1$. $\alpha'\alpha = 1/3$.

Ainsi $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ... mais oublions au moins pour c]

c] $T^{k+1} = T^k T$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

En faisant tendre k vers $+\infty$ il vient : $S = ST$

Rappelons que $(W_k)_{k\geq 0}$ converge vers $W_0 S$ et $(V_k)_{k\geq 0}$ converge vers ${}^tS\,{}^tW_0$.

Alors $W = {}^tV = {}^t({}^tS\,{}^tW_0) = W_0 S$. W est la limite de $(W_k)_{k\geq 0}$!

$$W = W_0 S \underset{S = ST}{=} W_0 (ST) = (W_0 S) T = WT. \quad \underline{\underline{W = WT.}}$$

Nous avons vu que les coefficients de V sont positifs ou nuls et de somme 1

donc <u>les coefficients de W sont positifs ou nuls et de somme 1.</u>

Soit W' un élément de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls de somme 1 qui vérifie $W' = W'T$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $W' = W'T^k$. En passant à la limite on obtient $W' = W'S$

Posons $W' = (\omega'_1\ \omega'_2\ \omega'_3)$, $W = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et $S = (s_{ij})$

$\forall j \in [\![1, 3]\!]$, $\omega'_j = \sum_{i=1}^{3} \omega'_i s_{ij} \underset{\substack{\text{Toutes les}\\ \text{lignes de } S \text{ sont}\\ \text{les mêmes.}}}{=} s_{1j} \sum_{i=1}^{3} \omega'_i = s_{1j}$. $(W = WS)$

De même $\forall j \in [\![1, 3]\!]$, $\omega_j = s_{1j}$. Ainsi $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\omega'_j = \omega_j$. $\underline{\underline{W' = W.}}$

W est l'unique élément de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls de somme 1 et qui vérifie $W = WT$.

Remarque.- Notons que W, et donc V, ne dépend pas de W_0.
Ainsi la "loi limite" de la suite $(X_k)_{k\geq 0}$ ne dépend que de l'état initial du système.

d] • Nous avons déjà vu que $\lim_{k\to+\infty} T^k = S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

• Nous pouvons aussi obtenir ce résultat par réduction de T. La remarque de la page 5 fournit tous les résultats pour retrouver $\lim_{k\to+\infty} T^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Proposons une autre idée. Posons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $J^2 = 3J$.
$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $J^i = 3^{i-1} J$ et $T = \frac{1}{4} I_3 + \frac{1}{4} J$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$I_3 J = J I_3$ donc $T^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k (I_3 + J)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} I_3^{k-i} J^i$.

$$T^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k \left[I_3 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} J^i\right] = \left(\frac{1}{4}\right)^k \left[I_3 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} 3^{i-1} J\right]$$

$$T^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k \left[I_3 + \frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 3^i - 1\right] J\right]$$

$$T^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k \left[I_3 + \frac{1}{3}\left[(3+1)^k - 1\right] J\right] = \left(\frac{1}{4}\right)^k I_3 + \frac{1}{3\times 4^k}\left[4^k - 1\right] J.$$

$$T^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k I_3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 4^k}\right) J.$$ Or $\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{3\times 4^k}\right) = 0$.

Donc $\lim_{k\to+\infty} T^k = \frac{1}{3} J$. Alors $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

R

Cherchons $V = \lim_{\ell \to +\infty} V_\ell$.

<u>V1</u> • $\forall k \in \mathbb{N}$, $W_k = W_0 T^k$. Ainsi $W = \lim_{\ell \to +\infty} W_k = W_0 S = (P(X_0=1)\ P(X_0=2)\ P(X_0=3))\, S$

$$W = (P(X_0=1)\ P(X_0=2)\ P(X_0=3))\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right)$$

$P(X_0=1)+P(X_0=2)+P(X_0=3)=1$

Alors $V = \lim_{\ell \to +\infty} V_\ell = \lim_{\ell \to +\infty} {}^tW_k = {}^t\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. $\quad \underline{V = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$.

<u>V2</u> Nous avons vu que $W = WT$. Alors $V = {}^tW = {}^t(WT) = {}^tT\,{}^tW \overset{{}^tT = T}{=} TV$.

Donc $V \in SEP(T,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Posons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $v_1 = \alpha$, $v_2 = \alpha$, $v_3 = \alpha$. Ainsi $v_1 = v_2 = v_3$.

Or nous avons vu que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ donc $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{3}$. $V = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

<u>Alors la suite $(X_\ell)_{\ell \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$.</u>

PARTIE II

Q1 Notons que les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls.

Alors $A \in \mathcal{S}_n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AU_n$. $\forall i \in [\![1,n]\!], y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], y_i = 1 \Leftrightarrow Y = U_n$

donc $A \in \mathcal{S}_n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \Leftrightarrow Y = U_n \Leftrightarrow AU_n = U_n$.

donc <u>A est stochastique si et seulement si $AU_n = U_n$.</u>

Q2 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{S}_n$. Posons $C = (c_{ij}) = AB$.

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \in \mathbb{R}^+$ car les coefficients de A et B sont des réels positifs ou nuls.

- $\underset{\substack{\uparrow \\ B \in \mathcal{S}_n}}{ABU_n =} \underset{\substack{\uparrow \\ A \in \mathcal{S}_n}}{AU_n =} U_n$

Les deux points précédents montrent que $AB \in \mathcal{S}_n$.

<u>Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_n$ est un élément de $\mathcal{S}_n$.</u>

Q3 Posons $\forall k \in [\![n_0, +\infty[\![$, $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ et $B = (b_{ij})$.

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim_{k \to +\infty} a_{ij}^{(k)} = b_{ij}$ et $\forall k \in [\![n_0, +\infty[\![, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}^{(k)} \in \mathbb{R}^+$

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{ij} \in \mathbb{R}^+$

- $\forall k \in [\![n_0, +\infty[\![, \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} = 1$; en passant à la limite il vient :

$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$.

Ceci achève de montrer que <u>B appartient à $\mathcal{S}_n$.</u>

b) A appartient à $\mathcal{B}_n$, une récurrence simple s'appuyant sur Q2 montre alors que : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \in \mathcal{B}_n$. Comme $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers B ce qui précède montre que $\underline{\underline{B \text{ appartient à } \mathcal{B}_n}}$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A^k A$. $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers B donc $(A^{k+1})_{k\geq 0}$ converge vers B et $(A^k A)_{k\geq 0}$ converge vers BA ; ainsi $B = BA$.

En partant de $\forall k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A A^k$ on obtient de la même manière $B = AB$.

Ainsi $\underline{\underline{B = BA = AB}}$.

Une récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ B = BA^k$.

Comme (A^k) converge vers B, $(BA^k)_{k\geq 0}$ converge vers B^2. Ainsi $B = B^2$.

$\underline{\underline{B^2 = B}}$. $\underline{\underline{B \text{ est la matrice d'une projection}}}$.

Q4 **a)** Posons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = AY$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\quad \forall j \in [\![1,n]\!],\ m(Y) \leq y_j \leq M(Y)$ et $a_{ij} \geq 0$

$\forall j \in [\![1,n]\!],\ m(Y)\, a_{ij} \leq a_{ij} y_j \leq M(Y)\, a_{ij}$.

$$m(Y) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{1} \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j}_{z_i} \leq M(Y) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{1}.$$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!],\ m(Y) \leq z_i \leq M(Y)$.

Ainsi $m(Y) \leq \min_{1\leq i\leq n} z_i \leq \max_{1\leq i\leq n} z_i \leq M(Y)$; $\underline{\underline{m(Y) \leq m(AY) \leq M(AY) \leq M(Y).}}$

Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant ce qui précède à $A^k Y$ il vient :

$m(A^k Y) \leq m(A A^k Y) \leq M(A A^k Y) \leq M(A^k Y)$.

Ainsi $m(A^k Y) \leq m(A^{k+1} Y)$ et $M(A^{k+1} Y) \leq M(A^k Y)$.

$\forall \ell \in \mathbb{N},\quad m(A^{\ell}Y) \leq m(A^{\ell+1}Y)$ et $M(A^{\ell+1}Y) \leq M(A^{\ell}Y)$.

<u>La suite $(m(A^{\ell}Y))_{\ell \geq 0}$ est croissante et la suite $(M(A^{\ell}Y))_{\ell\geq 0}$ est décroissante.</u>

<u>b)</u> $d = \min\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}$. Comme $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $a_{ij} > 0$: $d > 0$.

Soit $i \in \llbracket 1,n\rrbracket$. $1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} d = nd$. $d \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ car $n \geq 2$.

Ainsi <u>$d \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$.</u>

Soit $i \in \llbracket 1,n\rrbracket$. $M(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \overset{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(M(Y)-y_j) \overset{a_{ij}\geq d \text{ et } M(Y)-y_j \geq 0}{\geq} d \sum_{j=1}^{n}(M(Y)-y_j)$.

$M(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \geq d \sum_{j=1}^{n} (M(Y)-y_j)$. $\exists j_0 \in \llbracket 1,n\rrbracket$, $m = y_{j_0}$. Alors :

$$M(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \geq \underbrace{d \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{n} (M(Y)-y_j)}_{\geq 0} + d(M(Y)-y_{j_0}) \geq d(M(Y)-y_{j_0}) = d(M(Y)-m(Y)).$$

Ainsi <u>$\forall i \in \llbracket 1,n\rrbracket$, $M(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \geq d(M(Y)-m(Y))$.</u>

$\exists i_0 \in \llbracket 1,n\rrbracket$, $M(AY) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\, y_j$

En utilisant ce qui précède il vient $M(Y) - M(AY) \geq d(M(Y)-m(Y))$.

Alors <u>$M(AY) \leq (1-d)M(Y) + d\,m(Y)$.</u>

Soit $i \in \llbracket 1,n\rrbracket$, $m(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(m(Y)-y_j) \overset{a_{ij}\geq d \text{ et } m(Y)-y_j \leq 0}{\leq} d \sum_{j=1}^{n} (m(Y)-y_j)$

$m(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \leq d \sum_{j=1}^{n} (m(Y)-y_j)$. $\exists j_0' \in \llbracket 1,n\rrbracket$, $y_{j_0'} = M(Y)$.

$$\text{Alors } m(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \leq \underbrace{d \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0'}}^{n} (m(Y)-y_j)}_{\leq 0} + d(m(Y)-M(Y)) \leq d(m(Y)-M(Y)).$$

Alors $\forall i \in \llbracket 1,n\rrbracket$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \geq d\,M(Y) + (1-d)\,m(Y)$.

donc $m(AY) = \min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq d\, M(Y) + (1-d)\, m(Y)$.

$m(AY) \geq d\, M(Y) + (1-d)\, m(Y)$.

c) $0 \leq M(AY) - m(AY) = M(AY) + (-m(AY)) \leq (1-d) M(Y) + d\, m(Y) + (-d M(Y) - (1-d) m(Y))$

donc $0 \leq M(AY) - m(AY) \leq (1-d) M(Y) + d\, m(Y) - d\, M(Y) - (1-d)\, m(Y)$

$0 \leq M(AY) - m(AY) \leq (1-2d)\,(M(Y) - m(Y))$. (▲) ceci pour tout Y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq M(A^kY) - m(A^kY) \leq (1-2d)^k (M(Y) - m(Y))$.

* c'est vrai pour $k = 1$ d'après (▲).
* Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

En appliquant (▲) avec A^kY il vient :

$0 \leq M(A^{k+1}Y) - m(A^{k+1}Y) \leq (1-2d)(M(A^kY) - m(A^kY))$. Or $1-2d \geq 0$ et

par hypothèse de récurrence $0 \leq M(A^kY) - m(A^kY) \leq (1-2d)^k (M(Y) - m(Y))$.

Alors $0 \leq M(A^{k+1}Y) - m(A^{k+1}Y) \leq (1-2d)(1-2d)^k (M(Y) - m(Y)) = (1-2d)^{k+1}(M(Y) - m(Y))$.

ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq M(A^kY) - m(A^kY) \leq (1-2d)^k (M(Y) - m(Y))$.

$d \in]0, \frac{1}{2}]$ donc $0 \leq 1-2d < 1$. Alors $|1-2d| < 1$. Par conséquent il vient

$\lim_{k\to+\infty} ((1-2d)^k (M(Y) - m(Y))) = 0$, ce qui donne $\lim_{k\to+\infty} (M(A^kY) - m(A^kY)) = 0$ par encadrement.

Or $(m(A^kY))_{k\geq0}$ est croissante et $(M(A^kY))_{k\geq0}$ est décroissante ainsi

les suites $(m(A^kY))_{k\geq0}$ et $(M(A^kY))_{k\geq0}$ sont adjacentes.

Ainsi les suites $(m(A^\ell Y))_{\ell\geq 0}$ et $(M(A^\ell Y))_{\ell\geq 0}$ sont convergentes et ont même limite ℓ_Y

$\boxed{R}$ repère pour la question 4 c)

Posons $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $A^\ell Y=\begin{pmatrix} y_1^{(\ell)}\\ \vdots\\ y_n^{(\ell)}\end{pmatrix}$.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $m(A^\ell Y)\leq y_i^{(\ell)}\leq M(A^\ell Y)$ et $\lim\limits_{\ell\to+\infty} m(A^\ell Y)=\lim\limits_{\ell\to+\infty} M(A^\ell Y)=\ell_Y$.

Alors par encadrement $\lim\limits_{\ell\to+\infty} y_i^{(\ell)}=\ell_Y$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Donc $(A^\ell Y)_{\ell\geq 0}$ converge vers $\begin{pmatrix}\ell_Y\\ \ell_Y\\ \vdots\\ \ell_Y\end{pmatrix}$ c'est à dire vers $\ell_Y U_n$.

$(A^\ell Y)_{\ell\geq 0}$ converge vers $\ell_Y U_n$.

d) Notons $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, il existe un réel ℓ_j tel que $(A^\ell E_j)_{\ell\geq 0}$ converge vers $\ell_j U_n$

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{\ell\to+\infty} a_{ij}^{(\ell)}=\ell_j$ car pour tout ℓ dans $\mathbb{N}$ et pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, $A^\ell E_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A^ℓ.

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{\ell\to+\infty} a_{ij}^{(\ell)}=\ell_j$.

$\forall \ell\in\mathbb{N}$, $A^\ell\in\mathcal{S}_n$.

1) $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $a_{ij}^{(\ell)}\geq 0$.

Alors $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{\ell\to+\infty} a_{ij}^{(\ell)}\geq 0$ donc $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\ell_j\geq 0$.

2) $\forall \ell\in\mathbb{N}$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\ell)}=1$

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $1=\lim\limits_{\ell\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\ell)}=\sum\limits_{j=1}^{n}\ell_j$. $\sum\limits_{j=1}^{n}\ell_j=1$

Il existe une suite $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ de réels positifs ou nuls tels que $\sum_{j=1}^{n} \ell_j = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \lim_{\ell \to +\infty} a_{ij}^{(\ell)} = \ell_j$.

$\forall j \in [\![1,n]\!], \lim_{j \to +\infty} A^{\ell} E_j = \ell_j U_n$ et $U_n L E_j = (L E_j) U_n = \ell_j U_n$.

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!], \lim_{j \to +\infty} A^{\ell} E_j = (U_n L) E_j$.

Notons A_∞ la limite de la suite $(A^{\ell})_{\ell \geq 0}$.

$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad A_\infty E_j = \lim_{\ell \to +\infty} A^{\ell} E_j = (U_n L) E_j$.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A_∞ coïncide avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de $U_n L$.

Ainsi $A_\infty = U_n L$. $(A^{\ell})_{\ell \geq 0}$ converge vers $A_\infty = U_n L$.

Nous avons vu que $A_\infty^2 = A_\infty$ dans Q3 b)

Ainsi p est une projection.

Pour $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ($\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

$A_\infty = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \\ \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \\ \vdots & \vdots & & \\ \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}\left(\ell_1(e_1+e_2+\dots+e_n), \dots, \ell_n(e_1+e_2+\dots+e_n)\right)$

De plus $\exists j' \in [\![1,n]\!], \ell_{j'} \neq 0$ car $\sum_{j=1}^{n} \ell_j = 1$ et $\forall j \in [\![1,n]\!], \ell_j \geq 0$.

Donc $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(e_1+e_2+\dots+e_n)$.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

$p(u) = 0 \Leftrightarrow \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \dots + \ell_n x_n = 0$. De plus $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

$\operatorname{Ker} p$ est l'hyperplan d'équation $\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \dots + \ell_n x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

<u>p est la projection vectorielle sur la droite vectorielle engendrée par $e_1+e_2+\dots+e_n$ parallèlement à l'hyperplan d'équation $\ell_1 x_1+\ell_2 x_2+\dots+\ell_n x_n=0$ dans la base $\mathcal{B}$.</u>

e) * 1) $\forall j\in [\![1,n]\!],\ \ell_j \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \ell_j = 1$

2) $\forall k\in\mathbb{N},\ LA^{k+1}=(LA^k)A$. Alors $LA_\infty=(LA_\infty)A$.

$LA_\infty = LU_nL = (LU_n)L = \left(\sum_{j=1}^{n} \ell_j\right)L = L$.

Ainsi <u>$L=LA$.</u>

* supposons que $\hat{L}=(\hat{\ell}_1\ \hat{\ell}_2 \dots \hat{\ell}_n)$ soit un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que $\forall j\in[\![1,n]\!],\ \hat{\ell}_j\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n}\hat{\ell}_j=1$ et $\hat{L}=\hat{L}A$.

Une récurrence simple donne : $\forall k\in\mathbb{N},\ \hat{L}=\hat{L}A^k$.

En passant à la limite il vient : $\hat{L}=\hat{L}A_\infty$.

$\hat{L}=\hat{L}A_\infty=\hat{L}(U_nL)=(\hat{L}U_n)L=\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{\ell}_j\right)L=1\times L=L$. $\hat{L}=L$.

<u>$L=(\ell_1\ \ell_2 \dots \ell_n)$ est l'unique élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs et qui vérifie $L=LA$.</u>

f) Observons dans la démarche précédente que :

1) Nous avons montré que, pour tout $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

→ $\forall k\in\mathbb{N},\ m(A^kY)\leqslant M(A^kY)$

→ $(m(A^kY))_{k\geqslant 0}$ est croissante et $(M(A^kY))_{k\geqslant 0}$ est décroissante

et que pour ce faire nous n'avons pas utilisé la stricte positivité de α.

2) Après avoir montré que les suites $(m(A^kY))_{k\geqslant 0}$ et $(M(A^kY))_{k\geqslant 0}$ sont adjacentes, donc après le $\boxed{R}$ du début de la page 5 nous n'avons plus utilisé la stricte positivité de α.

Ainsi pour montrer que les résultats de d) et c) valent encore dans ces nouvelles conditions il suffit de montrer que $(m(A^kY))_{k\geq 0}$ et $(M(A^kY))_{k\geq 0}$ sont adjacentes pour tout Y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

On suppose donc que : $\exists r\in\mathbb{N}^*,\ \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}^{(r)}>0$. Soit $Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrons que $(m(A^kY))_{k\geq 0}$ et $(M(A^kY))_{k\geq 0}$ sont adjacentes.

On sait déjà que la première est croissante la seconde décroissante et $\forall k\in\mathbb{N},\ m(A^kY)\leq M(A^kY)$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N},\ m(A^0Y)\leq m(A^kY)\leq M(A^kY)\leq M(A^0Y)$.

donc $(m(A^kY))_{k\geq 0}$ est croissante et majorée par $M(A^0Y)$ et $(M(A^kY))_{k\geq 0}$ est décroissante et minorée par $m(A^0Y)$.

Ainsi $(m(A^kY))_{k\geq 0}$ et $(M(A^kY))_{k\geq 0}$ sont deux suites convergentes. Ne reste plus qu'à montrer qu'elles ont la même limite.

Posons $B=A^r=(b_{ij})$. Alors $B\in\mathcal{B}_n$ et $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ b_{ij}>0$.

D'après c) $(m(B^kY))_{k\geq 0}$ et $(M(B^kY))_{k\geq 0}$ sont adjacentes donc convergent et ont la même limite que nous noterons l_Y. $l_Y=\lim\limits_{k\to+\infty}(m(A^{kr}Y))=\lim\limits_{k\to+\infty}(M(A^{kr}Y))$

Alors $(m(A^kY))_{k\geq 0}$ est une suite convergente et la sous-suite $(m(A^{kr}Y))_{k\geq 0}$ converge vers l_Y. Dans ces conditions $\lim\limits_{k\to+\infty} m(A^kY)=l_Y$. De même $\lim\limits_{k\to+\infty} M(A^kY)=l_Y$.

Ce qui achève de montrer que les suites $(m(A^kY))_{k\geq 0}$ et $(M(A^kY))_{k\geq 0}$ sont adjacentes.

Alors les résultats de d) et c) valent encore si l'on remplace l'hypothèse $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ a_{ij}>0$ par $\exists r\in\mathbb{N}^*,\ \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}^{(r)}>0$.

Q5 a) $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers $A_\infty = U_n L$ donc <u>$(ZA^k)_{k\geq 0}$ converge vers ZA_∞</u>

b) $ZA_\infty = Z(U_n L) = (ZU_n)L = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) L = L$.

<u>La suite $(ZA^k)_{k\geq 0}$ converge vers L.</u>

Q6 On suppose donc que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{ij} > 0$. Alors la suite $(T^k)_{k\geq 0}$ converge vers un élément T_∞ de $M_n(\mathbb{R})$.

$\exists !\ L = (l_1\ l_2 \dots l_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que
1/ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $l_i \geq 0$
2/ $\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$
3/ $L = LT$

De plus $T_\infty = U_n L$. Notons que L ne dépend que de T et pas de W_0 !

$\forall k \in \mathbb{N}$, $W_k = W_0 T^k$. Alors la suite $(W_k)_{k\geq 0}$ converge vers $W_0 T_\infty = W_0 U_n L$.

Rappelons que $W_0 = (P(X_0=1)\ P(X_0=2) \dots P(X_0=n))$.

Alors $W_0 U_n = \sum_{k=1}^{n} P(X_0=k) = 1$ car $U_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\lim_{k\to+\infty} W_k = L$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $V_k = {}^tW_k$. Donc <u>$(V_k)_{k\geq 0}$ converge vers ${}^tL = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$</u>.

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\lim_{k\to+\infty} P(X_k = i) = l_i$.

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p(i) = l_i$. p est une loi de probabilité discrète car : $[\![1,n]\!]$ est fini, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $l_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$.

Donc la suite $(X_k)_{k\geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est p... qui est indépendante de l'état du système à l'instant 0.

Le système tend donc au cours du temps à être dans l'état E_i avec la probabilité l_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

<u>Exercice.</u>- Prendre la matrice T de I Q 1 b) et vérifier que (T^k) converge sans que tous ses coefficients soient strictement positifs.

PARTIE III

Q1 $AX=0$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$. En particulier $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j = 0$.

$a_{i_0 i_0} x_{i_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j}$.

$|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$|a_{i_0 i_0}||x_{i_0}| = |a_{i_0 i_0} x_{i_0}| = \left|-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} x_j\right| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n} a_{i_0 j} x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n} |a_{i_0 j}||x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$

Alors $0 \leq |x_{i_0}| \left[-|a_{i_0 i_0}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| \right]$ et $-|a_{i_0 i_0}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| < 0$.

Alors $|x_{i_0}| \leq 0$. Donc $|x_{i_0}| = 0$. Alors $\max_{1\leq i\leq n} |x_i| = 0$.

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i| = 0$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$. $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. **A est inversible.**

Q2 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}A$. $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc $A - \lambda I_n$ n'est pas à diagonale strictement dominante. Posons $A - \lambda I_n = (a'_{ij})$.

Alors $\exists i \in [\![1,n]\!]$, $|a'_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a'_{ij}|$.

Ainsi $|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = r_i$, $|\lambda - a_{ii}| \leq r_i$ donc $\lambda \in D_i$.

Par conséquent $\lambda \in D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$.

$\mathrm{Sp}A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Q3 a) $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. $\exists p \in [\![1,n]\!]$, $\lambda \in D_p$. $|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |a_{pj}|$.

or $A \in \mathcal{E}_n$ donc $|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} a_{pj} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} - a_{pp} = 1 - a_{pp}$

Ainsi $\exists p \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda - a_{pp}| \leq 1 - a_{pp}$ pour toute valeur propre λ de A dans $\mathbb{C}$.

(!) $|\lambda|-|a_{pp}| \leq \big||\lambda|-|a_{pp}|\big| \leq |\lambda-a_{pp}| \leq 1-a_{pp} = 1-|a_{pp}|$. Alors $|\lambda| \leq 1$.

b) $A \in \mathcal{S}_n$ donc $AU_n = U_n$ et $U_n \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi 1 est valeur propre de A et $\mathrm{Vect}(U_n) \subset SEP(A,1)$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$

c) $a_{ii} \geq m > \frac{1}{2}$. $2a_{ii} > 1$. $|a_{ii}| = a_{ii} > 1-a_{ii}$.

Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|0-a_{ii}| > 1-a_{ii}$.

D'après a) 0 n'est pas valeur propre de A. A est inversible.

d) $\lambda \in Sp A$. $\exists p \in [\![1,n]\!]$, $|\lambda - a_{pp}| \leq 1-a_{pp}$.

Alors $|\lambda - a_{pp}|^2 \leq (1-a_{pp})^2$. $(e^{i\theta}-a_{pp})(e^{-i\theta}-a_{pp}) \leq 1+a_{pp}^2-2a_{pp}$.

$1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})a_{pp}+a_{pp}^2 \leq 1+a_{pp}^2-2a_{pp}$.

$0 \leq 2\cos\theta\, a_{pp} - 2a_{pp} = 2(\cos\theta-1)a_{pp}$ et $a_{pp} \geq m > 0$.

Alors $2(\cos\theta-1) \geq 0$; $\cos\theta \geq 1$. donc $\cos\theta = 1$.

Or $\theta \in [0,2\pi[$ donc $\theta = 0$. $\lambda = e^{i0} = 1$.

$\forall \lambda \in Sp A$, $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

Q4 $\forall (i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, $c_{ij} = \begin{cases} a_{ii}-1 & \text{si } i=j \\ a_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$.

1er cas.. $n \geq 3$. $a_{ii} \leq 1$ et $a_{ij} \geq 0$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $|c_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1} |c_{ij}| = |a_{ii}-1| - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1} |a_{ij}| = 1-a_{ii}-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1} a_{ij}$

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $|c_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1} |c_{ij}| = 1-\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} = \underbrace{1-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{=0} + a_{in} = a_{in} > 0$.

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1} |c_{ij}| < |c_{ii}|$. C est à diagonale strictement dominante.

Ainsi C est inversible.

<u>2e cas : $n=2$.</u> $C \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $C = (1 - a_{11}) = (a_{12})$ et $a_{12} > 0$.

Alors <u>C est aussi inversible.</u>

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ (resp. $[\![1,n-1]\!]$) notons $C_j(A - I_n)$ (resp. $C_j(C)$) la $j$ième colonne de $A - I_n$ (resp. C).

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j C_j(A - I_n) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Par construction de C : $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j C_j(C) = 0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})}$.

Or la famille $(C_1(C), C_2(C), \dots, C_{n-1}(C))$ est libre car C est inversible.

Par conséquent $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(C_1(A-I_n), C_2(A-I_n), \dots, C_{n-1}(A-I_n))$ est libre.

Dans ces conditions $rg(A - I_n) \geqslant n-1$. Or $A - I_n$ n'est pas inversible car 1 est valeur propre de A donc $rg(A - I_n) < n$.

Alors <u>$rg(A - I_n) = n-1$.</u>

$\dim SEP(A,1) = n - rg(A - I_n) = n - (n-1) = 1$.

$SEP(A,1)$ est une droite vectorielle. De plus $U_n \in SEP(A,1)$ et $U_n \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Par conséquent $SEP(A,1) = Vect(U_n)$

<u>Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle engendrée par $U_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.</u>

PARTIE IV

(Q1) a) $M^2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = M$.

$MMM = M^2M = M^2 = M$ et $MM = MM$!

Ainsi M est un pseudo-inverse de M.

b) $M^2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. Supposons que M admette un pseudo-inverse M'.

Alors $M = MM'M \underset{M'M=MM'}{=} M^2M' = 0$! $M = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ n'a pas de pseudo-inverse.

c) Supposons que M est inversible.

* $MM^{-1}M = MI_n = M$, $M^{-1}MM^{-1} = I_nM^{-1} = M^{-1}$ et $MM^{-1} = I_n = M^{-1}M$.

M^{-1} est un pseudo-inverse de M.

* Soit M' un pseudo-inverse de M.

$MM'M = M$ donc $MM' = MM'I_n = \underbrace{MM'M}_{M}M^{-1} = MM^{-1} = I_n$.

$MM' = I_n$ donc M' est l'inverse de M ; $M' = M^{-1}$.

Si M est inversible, M admet un pseudo-inverse et un seul : M^{-1}.

d) M' et M'' sont deux pseudo-inverses de M.

$MM'MM'' = MM''$.

$MM'MM'' \underset{MM'=M'M \text{ et } MM''=M''M}{=} M'MM''M = M'M$ } Alors $MM'' = M'M$.

$M' = M'MM' = MM''M' = M''MM' = M''M'M \overset{M'M=MM''}{=} M''MM'' = M''$; $M' = M''$

Une matrice de $M_n(K)$ possède au plus un pseudo-inverse.

(Q2) a) $\pi = \pi_B(f)$, $\pi' = \pi_B(g)$, $\pi\pi'\pi = \pi$, $\pi'\pi\pi' = \pi'$, $\pi\pi' = \pi'\pi$.

Alors $f\circ g\circ f = f$, $g\circ f\circ g = g$, $f\circ g = g\circ f$. Dans la suite nous posons $E = \mathbb{K}^n$.

- $f(E) \subset E$ donc $f^2(E) \subset f(E)$. Alors $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.
- $f(E) = (f\circ g\circ f)(E) = (f\circ f\circ g)(E) = f^2(g(E)) \subset f^2(E) = \mathrm{Im}\, f^2$.

  $f\circ g = g\circ f$; $g(E) \subset E$

  Donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2$.

. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$. $f(x) = 0_E$. $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$; $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$.

  Donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$.

. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$. $f(x) = (f\circ g\circ f)(x) = (g\circ f\circ f)(x) = g(f^2(x)) = g(0_E) = 0_E$; $x \in \mathrm{Ker}\, f$.

  $f\circ g = g\circ f$

  Alors $\mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$.

On a bien : $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.

. Soit $x \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$. $\exists t \in E$, $x = f(t)$ et $f(x) = 0_E$.

  $f^2(t) = f(f(t)) = f(x) = 0_E$; $t \in \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$; $x = f(t) = 0_E$.

  Ainsi $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$

  De plus $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E < +\infty$

  Alors $\mathbb{K}^n = E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

. $(f\circ g)\circ(f\circ g) = (f\circ g\circ f)\circ g = f\circ g$ et $f\circ g \in \mathcal{L}(E)$.

  $f\circ g$ est donc une projection. C'est la projection sur $\mathrm{Im}\,(f\circ g)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(f\circ g)$.

  $g(E) \subset E$ donc $f(g(E)) \subset f(E)$; $\mathrm{Im}\, f\circ g \subset \mathrm{Im}\, f$.

  $f(E) = (f\circ g\circ f)(E) = (f\circ g)(f(E)) \subset (f\circ g)(E)$. $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f\circ g$.

  Ainsi $\mathrm{Im}\, f\circ g = \mathrm{Im}\, f$.

Soit $x \in \mathrm{Ker} f$. $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$; $x \in \mathrm{Ker}(f\circ g)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f\circ g)$. $f(x) = (f\circ g\circ f)(x) \underset{g\circ f = f\circ g}{=} (f\circ f\circ g)(x) = f((f\circ g)(x)) = f(0_E) = 0_E$;
$x \in \mathrm{Ker} f$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f\circ g) = \mathrm{Ker} f$.

Finalement <u>$f\circ g$ est la projection sur $\mathrm{Im} f$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f$.</u>

Alors <u>$\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} - f\circ g = \mathrm{Id}_E - f\circ g$ est la projection sur $\mathrm{Ker} f$ parallèlement à $\mathrm{Im} f$.</u>

<u>b)</u> On suppose que $E = \mathbb{K}^n = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$. $r = \mathrm{rg} f$.

<u>1er cas</u> : $r = 0$. Alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ est clairement un pseudo-inverse de M. M possède un pseudo-inverse.

<u>2ème cas</u> : $r = n$. $\mathrm{rg} f = n$. Alors $\mathrm{rg} M = n$ et M est inversible.
Ainsi M possède un pseudo-inverse : M^{-1}.

<u>3ème cas</u> : $0 < r < n$. Soit $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$ une base de $\mathrm{Im} f$ et $(e'_{r+1}, e'_{r+2}, \dots, e'_n)$ une base de $\mathrm{Ker} f$.

Comme $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de E.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ (base canonique de $E = \mathbb{K}^n$) à $\mathcal{B}'$ et N la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

P est inversible et $P^{-1}MP = N$ ou $M = PNP^{-1}$.

Posons $N = (n_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ et $H = (n_{ij})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r}}$.

$\forall j \in [\![1, r]\!]$, $f(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} n_{ij}\, e'_i$ et $f(e'_j) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$.

Alors <u>$\forall j \in [\![1, r]\!]$, $\forall i \in [\![r+1, n]\!]$, $n_{ij} = 0$.</u>

$\forall j \in [\![r+1, n]\!]$, $0_E \underset{e'_j \in \mathrm{Ker} f}{=} f(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} n_{ij}\, e'_i$. <u>$\forall j \in [\![r+1, n]\!]$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $n_{ij} = 0$.</u>

Alors $N = \begin{pmatrix} H & 0_{M_{r,n-r}(\mathbb{K})} \\ 0_{M_{n-r,r}(\mathbb{K})} & 0_{M_{n-r}(\mathbb{K})} \end{pmatrix}$.

Il reste plus qu'à montrer que H est inversible. Observons que H n'est autre que la matrice de la famille $(f(e'_1),\dots,f(e'_r))$ de $\mathrm{Im}\, f$ dans la base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$ de $\mathrm{Im}\, f$. Pour montrer que H est inversible il suffit alors de montrer que la famille $(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_r))$ est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(e'_i) = 0_E$.

$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e'_i\right) = 0_E$ donc $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e'_i \in \mathrm{Ker}\, f$. Mais $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e'_i \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$

Alors $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e'_i = 0_E$. Comme $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$ est libre : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$.

Ainsi $(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_r))$ est libre. H est donc une matrice inversible.

Il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible H de $M_r(\mathbb{K})$ telles que : $M = P \begin{pmatrix} H & 0_{M_{r,n-r}(\mathbb{K})} \\ 0_{M_{n-r,r}(\mathbb{K})} & 0_{M_n(\mathbb{K})} \end{pmatrix} P^{-1}$.

H est inversible donc H possède un pseudo inverse H'.

Dans la suite nous écrirons O à la place de $O_{M_{n-r,r}(\mathbb{K})}$, $O_{M_{r,n-r}(\mathbb{K})}$ et $O_{M_r(\mathbb{K})}$.

Posons $M' = P \begin{pmatrix} H' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et vérifions que M' est un pseudo inverse de M.

Notons que $HH'H = H$, $H'HH' = H'$ et $HH' = H'H$.

$$MM'M = P\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} H' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} HH'H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = M$$

On montre de même que $M'MM' = M'$.

$$MM' = P\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} H' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} HH' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} H'H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

$\Pi\Pi' = P\begin{pmatrix} H' & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} H' & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1} = \Pi'\Pi$.

ceci achève de montrer que Π' est un pseudo inverse de Π.

Ainsi si $\mathbb{K}^n = E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$, Π possède un pseudo inverse.

Mieux Π possède un pseudo inverse si et seulement si $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

c) * Supposons $\operatorname{rg}\Pi^2 = \operatorname{rg}\Pi$. alors $\operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f$.

Comme $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ alors $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f^2 = \dim \operatorname{Ker} f^2$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrons que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. On a déjà :

$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E < +\infty$. Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.

$\exists t \in E$, $x = f(t)$ et $f(x) = 0_E$. Alors $f^2(t) = 0_E$; $t \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. $x = f(t) = 0_E$.

Alors $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Donc $E = \mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Alors d'après b) Π possède un pseudo inverse.

* Réciproquement supposons que Π possède un pseudo inverse.

d'après a) : $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$. Alors $\operatorname{rg}\Pi^2 = \operatorname{rg} f^2 = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\Pi$.

Ainsi Π possède un pseudo inverse si et seulement si $\operatorname{rg}\Pi^2 = \operatorname{rg}\Pi$.

Q3 a) $\operatorname{rg}\Pi = \operatorname{rg}(I_n - A) = n-1$. $\dim \operatorname{Im} f = n-1$. Ainsi $\operatorname{Im} f$ est un hyperplan.

Notons F l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$

Soit v un élément de $\operatorname{Im} f$. $\exists u \in \mathbb{R}^n$, $f(u) = v$.

Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ la matrice de v dans $\mathcal{B}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

$\Pi X = Y$. $Y = (I_n - A)X = X - AX$

Alors $l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_n y_n = LY = L(X - AX) = LX - LAX \overset{LA = L}{=} LX - LX = 0$.

Donc $v \in F$. Ainsi $\operatorname{Im} f \subset F$ et $\dim \operatorname{Im} f = \dim F = n-1$. Alors $\operatorname{Im} f = F$.

Im f est l'hyperplan d'équation $\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \cdots + \ell_n x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

→ $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$ $\langle \ldots \rangle$

→ Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un élément de $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$f(u) = 0_E$. $MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $(I_n - A)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $AX = X$.

$X \in SEP(A, 1) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \lambda$.

Or $u \in \operatorname{Im} f$ donc $0 = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \cdots + \ell_n x_n = \lambda(\underbrace{\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n}_{=1}) = \lambda$. $\lambda = 0$.

Alors $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. $u = 0_E$.

donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

ceci achève de montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Alors $M = I_n - A$ possède un pseudo inverse (et un seul) que nous noterons M'.

c) g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M' dans la base $\mathcal{B}$.

D'après Q2 a) $Id_{\mathbb{R}^n} - f \circ g$ est la projection sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à $\operatorname{Im} f$. $Id_{\mathbb{R}^n} - f \circ g$ est donc la projection sur la droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à l'hyperplan d'équation $\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \cdots + \ell_n x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Soit u un élément de $\mathbb{R}^n$ de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

$u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}(V_1) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow u \in \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$.

$\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

$Id_{\mathbb{R}^n} - f \circ g$ est la projection sur la droite vectorielle engendrée par $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ parallèlement à l'hyperplan d'équation $\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \cdots + \ell_n x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

II Q4 d] montre alors que $Id_{\mathbb{R}^n} - f\circ g$ est l'endomorphisme de matrice A_∞ dans $\mathcal{B}$. Ainsi $\underline{I_n - \Pi\Pi' = A_\infty = U_n L}$.

Q4 a] * $\sum_{j=0}^{1-1} A^j = A^0 = I_n$. $\Pi = I_n - A$

$(I_n - A^1)\Pi' + 1(I_n - \Pi\Pi') = \Pi\Pi' + I_n - \Pi\Pi' = I_n$.

Alors $\sum_{j=0}^{1-1} A^j = (I - A^1)\Pi' + 1(I_n - \Pi\Pi')$; la propriété est vraie pour $k=1$.

* Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$\sum_{j=0}^{k} A^j = I_n + \left(\sum_{j=1}^{k} A^{j-1}\right)A = I_n + \left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right)A = I_n + A\left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right)$.

L'hypothèse de récurrence donne alors :

$\sum_{j=0}^{k} A^j = I_n + A\left[(I_n - A^k)\Pi' + k(I_n - \Pi\Pi')\right] = I_n + A\Pi' - A^{k+1}\Pi' + k(A - A\Pi\Pi')$.

Or $A\Pi' = (I_n - \Pi)\Pi' = \Pi' - \Pi\Pi'$ et $A - A\Pi\Pi' = A - (I_n - \Pi)\Pi\Pi' = A - \Pi\Pi' + \underbrace{\Pi\Pi\Pi'}_{\underbrace{\Pi\Pi'\Pi}_{\Pi}} =$

$A - \Pi\Pi' + \Pi = I_n - \Pi - \Pi\Pi' + \Pi = I_n - \Pi\Pi'$.

Donc $A\Pi' = \Pi' - \Pi\Pi'$ et $A - A\Pi\Pi' = I_n - \Pi\Pi'$.

Alors $\sum_{j=0}^{k} A^j = I_n + \Pi' - \Pi\Pi' - A^{k+1}\Pi' + k(I_n - \Pi\Pi')$.

$\sum_{j=0}^{k} A^j = (I_n - A^{k+1})\Pi' + (k+1)(I_n - \Pi\Pi')$. Ceci achève la récurrence.

$\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{k-1} A^j = (I_n - A^k)\Pi' + k(I_n - \Pi\Pi')}$.

b] $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} A^j = \frac{1}{k}(I_n - A^k)\Pi' + I_n - \Pi\Pi'$.

Montrons que $\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right)_{k\geq 1}$ converge vers $I_n - \Pi\Pi'$.

Il suffit de montrer que $\left(\frac{1}{k}(I_n-A^k)\Pi'\right)_{k\geq 1}$ converge vers $O_{M_n(\mathbb{R})}$ ou plus simplement que $\left(\frac{1}{k}(I_n-A^k)\right)_{k\geq 1}$ converge vers $O_{M_n(\mathbb{R})}$.

Posons $A^k=(a_{i,j}^{(k)})$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $A^k\in\mathcal{S}_n$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $0\leq a_{i,j}^{(k)}\leq 1$.

Posons $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k}(I_n-A^k)=(\alpha_{i,j}^{(k)})$.

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\quad \alpha_{i,j}^{(k)}=\begin{cases}\frac{1}{k}(1-a_{i,i}^{(k)}) \text{ si } i=j\\ \frac{1}{k}(-a_{i,j}^{(k)}) \text{ si } i\neq j\end{cases}.$$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall i\in[\![1,n]\!]^2$, $0\leq \alpha_{i,i}^{(k)}=\frac{1}{k}(1-a_{i,i}^{(k)})\leq\frac{1}{k}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$.

Par encadrement $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\alpha_{i,i}^{(k)}=0$.

Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $|\alpha_{i,j}^{(k)}|=\left|-\frac{1}{k}a_{i,j}^{(k)}\right|=\frac{1}{k}a_{i,j}^{(k)}\leq\frac{1}{k}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$.

donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\alpha_{i,j}^{(k)}=0$.

Finalement $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\alpha_{i,j}^{(k)}=0$.

Alors $\left(\frac{1}{k}(I_n-A^k)\right)_{k\geq 1}$ converge vers $O_{M_n(\mathbb{R})}$.

donc $\left(\frac{1}{k}(I_n-A^k)\Pi'\right)_{k\geq 1}$ converge vers $O_{M_n(\mathbb{R})}\times\Pi'$ donc vers $O_{M_n(\mathbb{R})}$.

Alors $\left(\frac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}A^j\right)_{k\geq 1}$ converge vers $I_n-\Pi\Pi'$ donc vers A_∞.

Exercice.. Retrouver ce résultat en utilisant Cesaro.

c) $\left(\frac{1}{\ell}\sum_{j=0}^{\ell-1}A^j\right)$ converge vers $I_n - RR' = A_\infty = U_n L$.

Soit X un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs de somme 1.

$\left({}^tX\left(\frac{1}{\ell}\sum_{j=0}^{\ell-1}A^j\right)\right)_{\ell\geq 1}$ converge vers ${}^tX A_\infty = \underbrace{{}^tX U_n}_{=1} L = L$.

Ainsi $\left(\frac{1}{\ell}\sum_{j=0}^{\ell-1}{}^tXA^j\right)_{\ell\geq 1}$ converge vers L.