Q1 Complément 1

a] $A{}^tA = {}^tAA = I_n$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

En particulier $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1$. Notons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(1-a_{ik}) = 0$.

Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_{ik}(1-a_{ik}) \geqslant 0$ (car $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 \leqslant a_{ik} \leqslant 1$)

Donc $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ik} = 0$ ou 1.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_{ik} = 0$ ou 1.

Or $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$. Donc il existe au moins un élément k_i de $[\![1,n]\!]$ tel que

$a_{ik_i} \neq 0$. Alors $a_{ik_i} = 1$.

$a_{ik_i} = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

<u>Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de A a tous ses coefficients nuls sauf un qui vaut 1.</u>

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\exists !\, \sigma(i) \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrons que σ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ et nous aurons ainsi $A = P_\sigma$.

* Soient i et i' deux éléments de $[\![1,n]\!]$ tels que $\sigma(i) = \sigma(i')$.

Posons $j = \sigma(i) = \sigma(i')$.

Nous avons $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 = 1$ (voir au début) et $a_{ij} = a_{i'j} = 1$.

Alors si $i \neq i'$: $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 \geqslant 2$! Donc $i = i'$.

<u>σ est injective.</u>

* Montrons que σ est surjective. Soit $j \in [\![1,n]\!]$.

Supposons qu'il n'existe pas $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i)=j$.

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_{kj}=0$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est alors nulle.

Ceci est impossible car A est orthogonale donc inversible.

Ainsi $\exists i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i)=j$, ceci pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. σ est surjective.

Finalement σ est bijective et $A = P_\sigma$.

b) Supposons qu'il existe une bijection σ de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ telle que $A=P_\sigma$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma(i)=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{ij} \in \{0,1\}$; $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \geqslant 0$.

* $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i\sigma(i)} = 1$

* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = a_{i\sigma(i)}\, a_{j\sigma(i)} = a_{j\sigma(i)} = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma(j)=\sigma(i) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. $A\,{}^tA = I_n$.

Les trois points précédents suffisent pour dire que A est une matrice stochastique et orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$.

Les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ stochastiques et orthogonales sont les matrices de permutation.

Q2 $\boxed{\text{Complément 2}}$

* Soit $A=(a_{ij})$ une matrice stochastique de $M_n(\mathbb{C})$ ou $M_n(\mathbb{R})$!

Supposons que A soit inversible et que A^{-1} soit stochastique.

Posons $A^{-1}=(b_{ij})$. $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$.

Alors $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=1=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}$. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(1-b_{ki})=0$.

Or $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik}\geqslant 0$ et $1-b_{ki}\geqslant 0$.

Donc $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik}(1-b_{ki})\geqslant 0$.

Dans ces conditions $\underline{\forall k\in[\![1,n]\!],\ a_{ik}(1-b_{ki})=0}$. $\underline{\forall k\in[\![1,n]\!]\ a_{ik}=0 \text{ ou } b_{ki}=1}$.

Supposons que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $b_{ki}\neq 1$. Alors $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik}=0$. La i^e ligne de A est nulle. Ceci est impossible car A est inversible.

Donc $\exists k_0\in[\![1,n]\!]$, $b_{k_0 i}=1$.

$\sum_{\ell=1}^{n} b_{k_0\ell}=1=\sum_{\ell=1}^{n} b_{k_0\ell}a_{\ell k_0}$. Donc $\sum_{\ell=1}^{n} b_{k_0\ell}(1-a_{\ell k_0})=0$.

Or $\forall \ell\in[\![1,n]\!]$, $b_{k_0\ell}(1-a_{\ell k_0})\geqslant 0$.

Donc $\forall \ell\in[\![1,n]\!]$ $b_{k_0\ell}(1-a_{\ell k_0})=0$. En particulier $b_{k_0 i}(1-a_{ik_0})=0$.

Comme $b_{k_0 i}=1$: $a_{ik_0}=1$. Or $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1$ et $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik}\geqslant 0$

Donc $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{ik}=\begin{cases}1 & k=k_0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

La ligne de A contient un coefficient égal à 1 et un seul tous les autres étant nuls.

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\exists!\ \sigma(i)\in[\![1,n]\!]$, $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } j=\sigma(i)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Montrons que σ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.

Soit $(i,i')\in[\![1,n]\!]^2$, $\sigma(i)=\sigma(i')$. Posons $j=\sigma(i)=\sigma(i')$.

Supposons $i\neq i'$. Notons que $a_{ij}=a_{i'j}=1$.

Nous avons vu que $\forall \ell\in[\![1,n]\!]$, $a_{i\ell}(1-b_{\ell i})=a_{i'\ell}(1-b_{\ell i'})=0$.

Alors $a_{ij}(1-b_{ji})=a_{i'j}(1-b_{ji'})=0$.

Donc $b_{ji}=b_{ji'}=1$. Alors $1=\sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk}\geqslant 2$!!

Donc $i=i'$. Ceci achève de montrer que σ est injective.

Montrons que σ est surjective. Soit $j\in[\![1,n]\!]$.

Supposons que : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(i)\neq j$.

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $a_{ij}=0$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est nulle. Ceci est impossible

car A est inversible.

Donc $\exists i\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(i)=j$. σ est surjective. Finalement $\underline{\underline{\sigma \text{ est bijective}}}$.

Alors $\underline{\underline{A=P_\sigma}}$.

* Réciproquement supposons $A=P_\sigma$ avec σ bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.

$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ $\quad a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } \sigma(i)=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{ij}\geqslant 0$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}=a_{i\sigma(i)}=1$.

Alors A est stochastique.

Posons $P_{\sigma^{-1}}=(q_{ij})$ et $AP_\sigma=(r_{ij})$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

$r_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i\sigma(i)}b_{\sigma(i)j}=b_{\sigma(i)j}=\begin{cases}1 \text{ si } \sigma^{-1}(\sigma(i))=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

$r_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Alors $AP_{\sigma^{-1}}=I_n$. A est inversible et $A^{-1}=P_{\sigma^{-1}}$

On montre comme pour A que $A^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ est une matrice stochastique.

Donc si $A = P_\sigma$, A est une matrice stochastique inversible et A^{-1} est une matrice stochastique.

Finalement si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est une matrice stochastique inversible dont l'inverse est une matrice stochastique.

ii) A est une matrice de permutation.

R

Q3 $\boxed{\text{Variante 1}}$

a) $AX = \lambda X$ donne en particulier $\lambda x_k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell$. Rappelons que $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$.

Comme $|\lambda| = 1$, $|x_k| = |\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k\ell}\, x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} = |x_k|$.

Ce qui donne : $|x_k| = \left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell\right|$. Alors $\left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, \dfrac{x_\ell}{x_k}\right| = 1$ car x_k n'est pas nul.

Le complexe $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, \dfrac{x_\ell}{x_k}$ a donc pour module 1. $\exists \theta \in \mathbb{R},\ \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, \dfrac{x_\ell}{x_k} = e^{i\theta}$.

$\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, \dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} = 1 = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}$. Par conséquent : $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, \left(\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} - 1\right) = 0$.

b) En prenant la partie réelle on obtient : $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, \left(\Re e \left(\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}\right) - 1\right) = 0$ (les coefficients de A sont réels).

Pour tout ℓ dans $[\![1, n]\!]$, notons t_ℓ la partie réelle de $\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}$. Alors $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, (t_\ell - 1) = 0$.

Rappelons que la partie réelle d'un complexe est inférieure ou égale à son module ($x \leqslant |x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$...).

$\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \left|\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}\right| = \dfrac{|x_\ell|}{|x_k|} \leqslant 1$. Par conséquent $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ t_\ell \leqslant 1$ et $a_{k\ell} > 0$. Donc $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ a_{k\ell}\ (t_\ell - 1) \leqslant 0$.

Comme $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\ (t_k - 1) = 0 : \forall \ell \in [\![1, n]\!],\ a_{k\ell}\ (t_\ell - 1) = 0$. Ainsi $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ t_\ell - 1 = 0$ car les coefficients de A sont strictement positifs. Par conséquent $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ t_\ell = 1$.

Fixons ℓ dans $[\![1, n]\!]$. $\dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta}$ est un nombre complexe de module au plus 1 dont la partie réelle t_ℓ vaut 1. Nécessairement ce complexe vaut 1.

$\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{x_\ell}{x_k}\, e^{-i\theta} = 1$. Alors $\forall \ell \in [\![1, n]\!],\ x_\ell = e^{i\theta}\, x_k$ (en faisant $k = 1$ on obtient $e^{i\theta} = 1$...).

Donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Alors X appartient à SEP $(A, 1)$ et donc $\lambda = 1$. Mieux nous avons montré que tout vecteur propre associé à la valeur propre λ donc à la valeur propre 1 est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi SEP $(A, 1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ de module } 1,\ \lambda = 1 \text{ et SEP } (A, \lambda) = \text{SEP } (A, 1) \text{ est de dimension } 1}$.

Q3' $\boxed{\text{Variante 2}}$

a) Etape 1.. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

→ Supposons que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$.

$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$.

Or $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$

Ainsi $|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2$

donc $2|z_1||z_2| = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

Notons que $|z_1||z_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1\bar{z}_2|$

Alors $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2|$. Posons $x = \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ et $y = \mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)$.

$x = \sqrt{x^2+y^2}$ donc $x \geq 0$ et $x^2 = x^2+y^2$; $x \geq 0$ et $y = 0$.

$z_1\bar{z}_2$ est donc un élément de $\mathbb{R}_+$. Posons $\delta = z_1\bar{z}_2$.

1er cas.. $z_1 = z_2 = 0$. En posant $\delta_1 = \delta_2 = \theta = 0$ on a $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$, $\delta_2 \in \mathbb{R}_+$,

$z_1 = \delta_1 e^{i\theta}$ et $z_2 = \delta_2 e^{i\theta}$. cqfd

2ème cas.. $z_1 \neq 0$. $\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $z_1 = \delta_1 e^{i\theta}$

$\delta = \delta_1 e^{i\theta}\bar{z}_2$; $\bar{z}_2 = \dfrac{\delta}{\delta_1 e^{i\theta}} = \dfrac{\delta}{\delta_1} e^{-i\theta}$; $z_2 = \dfrac{\delta}{\delta_1} e^{i\theta}$.

Posons $\delta_2 = \dfrac{\delta}{\delta_1}$. $\delta_2 \in \mathbb{R}_+$ et $z_2 = \delta_2 e^{i\theta}$.

3ème cas.. $z_2 \neq 0$. $\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $z_2 = \delta_2 e^{i\theta}$.

$\delta = z_1 \delta_2 e^{-i\theta}$; $z_1 = \dfrac{\delta}{\delta_2} e^{i\theta}$. Posons $\delta_1 = \dfrac{\delta}{\delta_2}$.

$\delta_1 \in \mathbb{R}_+$ et $z_1 = \delta_1 e^{i\theta}$.

dans les trois cas $\exists \rho_1 \in \mathbb{R}^+, \exists \rho_2 \in \mathbb{R}^+, \exists \theta \in \mathbb{R}, z_1 = \rho_1 e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta}$

→ Réciproquement supposons que : $\exists \rho_1 \in \mathbb{R}^+, \exists \rho_2 \in \mathbb{R}^+, \exists \theta \in \mathbb{R}, z_1 = \rho_1 e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta}$.

$|z_1+z_2| = |\rho_1 e^{i\theta} + \rho_2 e^{i\theta}| = |(\rho_1+\rho_2)e^{i\theta}| = |\rho_1+\rho_2||e^{i\theta}| \overset{\rho_1+\rho_2 \geq 0}{=} \rho_1+\rho_2$.

$|z_1|+|z_2| = |\rho_1 e^{i\theta}| + |\rho_2 e^{i\theta}| = |\rho_1||e^{i\theta}| + |\rho_2||e^{i\theta}| = |\rho_1|+|\rho_2| = \rho_1+\rho_2$

donc $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$.

<u>Etape 2.</u> Montrons la propriété par récurrence.

- c'est clair pour $n=1$.
- supposons la propriété vraie pour n élément de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

Soient $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ dans $\mathbb{C}$ tels que $|z_1+z_2+\dots+z_{n+1}| = |z_1|+|z_2|+\dots+|z_{n+1}|$.

Alors $\underline{|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|+|z_{n+1}|} = |z_1+\dots+z_{n+1}| \leq |z_1+\dots+z_n|+|z_{n+1}| \leq \underline{|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|+|z_{n+1}|}$.

Alors (1) : $|z_1+\dots+z_n+z_{n+1}| = |z_1+\dots+z_n|+|z_{n+1}|$

(2) : $|z_1+\dots+z_n|+|z_{n+1}| = |z_1|+\dots+|z_n|+|z_{n+1}|$ ou $|z_1+\dots+z_n| = |z_1|+\dots+|z_n|$.

$\exists \theta' \in \mathbb{R}, \exists \rho \in \mathbb{R}^+, \exists \rho_{n+1} \in \mathbb{R}^+, \quad z_1+\dots+z_n = \rho e^{i\theta'}$ et $z_{n+1} = \rho_{n+1} e^{i\theta'}$. ‖ D'après l'étape 1

$\exists \theta \in \mathbb{R}, \exists (\rho_1,\dots,\rho_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \quad z_1 = \rho_1 e^{i\theta}, \dots, z_n = \rho_n e^{i\theta}$.

donc $\rho e^{i\theta'} = (\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_n)e^{i\theta}$.

<u>1er cas..</u> $\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_n \neq 0$. Alors $\rho \neq 0$ et $e^{i\theta'} = \dfrac{\rho_1+\dots+\rho_n}{\rho} e^{i\theta}$.

Comme $\dfrac{\rho_1+\dots+\rho_n}{\rho} > 0$: $\theta \equiv \theta' \, [2\pi]$ donc $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.

Alors $z_1 = \rho_1 e^{i\theta}, z_2 = \rho_2 e^{i\theta}, \dots, z_{n+1} = \rho_{n+1} e^{i\theta}$ avec $\forall k \in [\![1, n+1]\!], \rho_k \geq 0$.

<u>2ème cas..</u> $\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_n = 0$. Alors $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = 0$ car $\forall k \in [\![1,n]\!], \rho_k \in \mathbb{R}^+$.

Alors $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$. donc $z_1 = \rho_1 e^{i\theta'}, z_2 = \rho_2 e^{i\theta'}, \dots, z_{n+1} = \rho_{n+1} e^{i\theta'}$ avec $\forall k \in [\![1, n+1]\!], \rho_k \geq 0$.

Ceci achève la récurrence, non ?

b) $AX = \lambda X$ donne en particulier $\lambda\, x_k = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell$. Rappelons que $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| \leqslant |x_k|$.

Comme $|\lambda| = 1$, $|x_k| = |\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = \left|\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell\right| \leqslant \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{k\ell}\, x_\ell| = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, |x_\ell| \leqslant |x_k| \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} = |x_k|$.

Ce qui précède donne alors : $|x_k| = \left|\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell\right| = \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{k\ell}\, x_\ell| = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, |x_\ell|$.

c) Supposons qu'il existe un élément ℓ_0 tel que $|x_{\ell_0}| < |x_k|$. Alors $a_{k\ell_0}\, |x_\ell| < a_{k\ell_0}\, |x_k|$ car $a_{k\ell_0} > 0$.

Ainsi $\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, |x_\ell| < |x_k| \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} = |x_k|$ ce qui n'est pas. Par conséquent $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$.

Dans la suite nous poserons $\rho = |x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$.

d) Rappelons que $\left|\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell\right| = \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{k\ell}\, x_\ell|$. Alors a) permet alors de dire qu'il existe un réel θ et des réels positifs ou nuls $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ tels que $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ a_{k\ell}\, x_\ell = \rho_\ell\, e^{i\theta}$. Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k\ell}}\, e^{i\theta}$.

Comme $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{\rho_\ell}{a_{k\ell}} \geqslant 0$, $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k\ell}}\cdot$ Or $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ |x_\ell| = \rho$. Donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{\rho_\ell}{a_{k\ell}} = \rho$.

Par conséquent $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = \dfrac{\rho_\ell}{a_{k\ell}}\, e^{i\theta} = \rho\, e^{i\theta}$. Finalement $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Ce qui précède prouve alors que $\mathrm{SEP}\,(A, \lambda) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

$\mathrm{SEP}\,(A, \lambda)$ étant un sous espace vectoriel de dimension au moins 1 nécessairement $\mathrm{SEP}\,(A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

Or $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. Par conséquent $\lambda = 1$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ de module } 1,\ \lambda = 1 \text{ et } \mathrm{SEP}\,(A, \lambda) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right).}$$

R

(Q4) $\boxed{\text{complément 3}}$

a) $AX=\lambda X$ donc $\forall s\in [\![1,n]\!],\ \sum_{\ell=1}^{n} a_{s\ell}\, x_\ell=\lambda x_s$.

En particulier $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell=\lambda x_k$.

Alors $|x_k|=|\lambda||x_k|=|\lambda x_k|=\left|\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}x_\ell\right|$; $\underset{x_k\neq 0}{\downarrow}\ 1=\left|\frac{1}{x_k}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}x_\ell\right|$.

Alors $\exists\theta\in\mathbb{R},\ e^{i\theta}=\frac{1}{x_k}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}x_\ell$.

donc $1=\sum_{\ell=1}^{n}\frac{e^{-i\theta}}{x_k}a_{k\ell}x_\ell$. Or $1=\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}$.

donc $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}=\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}$

Ainsi $\exists\theta\in\mathbb{R},\ \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}-1\right)=0$.

b) Soit $\ell\in[\![1,n]\!]$. $\left|\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right|=\frac{|x_\ell|}{|x_k|}|e^{-i\theta}|=\frac{|x_\ell|}{|x_k|}\leqslant 1$

$Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)\leqslant\left|Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)\right|=\sqrt{\left(Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)\right)^2}$

$Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)\leqslant\sqrt{\left(Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)\right)^2+\left(Im\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)\right)^2}=\left|\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right|\leqslant 1$

$\forall\ell\in[\![1,n]\!],\ Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)\leqslant 1$.

$\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}-1\right)=0$. En prenant la partie réelle il vient :

$\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\left[Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)-1\right]=0$. Or $\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $a_{k\ell}\geqslant 0$ et $Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)-1\leqslant 0$

donc $\forall\ell\in[\![1,n]\!],\ a_{k\ell}\left[Re\left(\frac{x_\ell}{x_k}e^{-i\theta}\right)-1\right]=0$.

$\forall\ell\in[\![1,n]\!]$, $a_{k\ell}\geqslant 0$ et $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}=1$ donc $\exists k'\in[\![1,n]\!],\ a_{kk'}\neq 0$.

Alors $\mathrm{Re}\left(\frac{x_{k'}}{x_k}e^{-i\theta}\right)-1=0$.

$\exists k'\in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Re}\left(\frac{x_{k'}e^{-i\theta}}{x_k}\right)=1$. Posons un instant $z=\frac{x_{k'}e^{-i\theta}}{x_k}$.

D'après ce qui précède $\mathrm{Re}(z)=1$ et $|z|\leq 1$ (voir plus haut...).

Alors $1=\mathrm{Re}(z)=|\mathrm{Re}(z)|=\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2}\leq\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2}=|z|\leq 1$.

Finalement $1=\mathrm{Re}(z)=|\mathrm{Re}(z)|=\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2}$

Nécessairement $\mathrm{Im}(z)=0$. Alors $z=\mathrm{Re}(z)=1$.

Par conséquent : $\frac{x_{k'}e^{-i\theta}}{x_k}=1$. $\underline{\underline{x_{k'}=e^{i\theta}x_k}}$.

Rappelons que $e^{i\theta}=\frac{1}{x_k}\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}x_\ell$ et $\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}x_\ell=\lambda x_k$.

Alors $e^{i\theta}=\lambda$.

donc $\underline{\underline{x_{k'}=\lambda x_k}}$.

<u>Remarque</u>.. Si $k'=k$: $x_k=\lambda x_k$ donc $\lambda=1$ car $x_k\neq 0$.

Ainsi $\underline{\underline{k'\neq k}}$.

De plus $\underline{\underline{|x_{k'}|=|\lambda x_k|=|\lambda|\,|x_k|=|x_k|\,;\ |x_{k'}|=|x_k|}}$.

c) Supposons que $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\lambda^r\neq 1$.

Montrons que $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $\exists k_r\in[\![1,n]\!]$, $x_{k_r}=\lambda^r x_k$.

* ce qui précède montre que la propriété est vraie pour $r=1$ (il suffit de prendre $k_1=k'$).

* Supposons la propriété vraie pour un élément r de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $r+1$.

$\exists k_r\in[\![1,n]\!]$, $x_{k_r}=\lambda^r x_k$.

$|x_{k_r}|=|\lambda^r|\,|x_k|=|\lambda|^r|x_k|=|x_k|$. Ainsi $|x_{k_r}|=\max_{1\leq\ell\leq n}|x_\ell|$.

Alors comme nous l'avons vu dans b] on peut trouver k_{r+1} tel que

$x_{k_{r+1}} = \lambda x_{k_r}$. Donc $x_{k_{r+1}} = \lambda \lambda^r x_k = \lambda^{r+1} x_k$. ceci achève la récurrence.

$\forall r \in \mathbb{N}^*, \exists k_r \in [\![1,n]\!], \quad x_{k_r} = \lambda^r x_k$.

Notons que les éléments de la suite $(k_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux distincts.

Supposons que r et r' sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} r<r' \\ k_r = k_{r'} \end{cases}$.

Alors $\lambda^r x_k = x_{k_r} = x_{k_{r'}} = \lambda^{r'} x_k$. Or $x_k \neq 0$.

Donc $\lambda^r = \lambda^{r'}$; $\lambda^{r-r'} = 1$ et $r-r' \in \mathbb{N}^*$. ceci contredit l'hypothèse !

Donc les éléments de la suite $(k_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux distincts.

Or ce sont des éléments de l'ensemble fini $[\![1,n]\!]$!!

Ce n'est pas une très bonne idée d'avoir supposé que $\forall r \in \mathbb{N}^*, \lambda^r = 1$.

Finalement $\exists r \in \mathbb{N}^*, \lambda^r = 1$. λ est une racine $r$ième de l'unité.

Si λ est une valeur propre de A de module 1, λ est une racine de l'unité.

(Q5) $\boxed{\text{Variante 3}}$

a) * $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{K}^n$ d'après le théorème du rang.

* $\to \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$

$\to \dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg} f = n - \operatorname{rg} f^2 = \dim \operatorname{Ker} f^2 < +\infty$

Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. $f(x) = 0_{\mathbb{K}^n}$ et $\exists t \in \mathbb{K}^n,\ x = f(t)$.

Alors $f^2(t) = f(x) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Donc $t \in \operatorname{Ker} f^2$. Comme $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$, $t \in \operatorname{Ker} f$.

Ainsi $x = f(t) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Ceci achève de montrer que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

b) ▼ Remarque.. Analysons le problème avant de répondre aux questions.

Il s'agit de trouver un endomorphisme g de $\mathbb{K}^n$ tel que $\begin{cases} f \circ g \circ f = f \\ g \circ f \circ g = g \\ f \circ g = g \circ f \end{cases}$

Supposons que g est solution du problème.

- Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. $g(x) = (g \circ f \circ g)(x) = (g \circ g \circ f)(x) = (g \circ g)(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^n}$.

  Donc g est nul(le) sur $\operatorname{Ker} f$.

- Soit $x \in \operatorname{Im} f$. $\exists t \in E,\ x = f(t)$.

  $x = f(t) = (f \circ g \circ f)(t) = g(f^2(t)) = g(f(x))$

  Alors $\forall x \in \operatorname{Im} f,\ (g \circ f)(x) = x$. g est coïncide sur $\operatorname{Im} f$ avec l'inverse de la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ non ?

Ceci éclaire la construction et les questions proposées. ▲

Montrons que f_1 est un automorphisme de $\operatorname{Im} f$.

Comme $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie il suffit de montrer que f_1 est injectif.

Soit $x \in \mathrm{Ker} f_1$. $x \in \mathrm{Im} f$ et $0_{\mathbb{K}^n} = f_1(x) = f(x)$.

Alors $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Donc $\mathrm{Ker} f_1 = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Ceci achève de montrer que f_1 est un automorphisme de $\mathrm{Im} f$. Exercice.. Pour le fun montrer que f_1 est surjectif.

c) ⚠ Attention à ne pas dire que $g = f_1^{-1} \circ p$ car f_1^{-1} est une application de $\mathrm{Im} f$ sur $\mathrm{Im} f$.

→ $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $g(x) = f_1^{-1}(p(x)) \in E$.

→ Soit $(x,y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$g(\lambda x+y) = f_1^{-1}(p(\lambda x+y)) \underset{\substack{\uparrow \\ p \text{ est linéaire}}}{=} f_1^{-1}(\lambda p(x)+p(y)) \underset{\substack{\uparrow \\ f_1^{-1} \text{ est linéaire}}}{=} \lambda f_1^{-1}(p(x)) + f_1^{-1}(p(y)) = \lambda g(x)+g(y)$$

donc g est linéaire.

g est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

Pour montrer que $\Pi' = \Pi_B(g)$ est un pseudo inverse de $\Pi = \Pi_B(f)$ il suffit de montrer que $\begin{cases} \Pi\Pi'\Pi = \Pi \\ \Pi'\Pi\Pi' = \Pi' \\ \Pi\Pi' = \Pi'\Pi \end{cases}$ ce qui revient à montrer que $\begin{cases} f\circ g\circ f = f \\ g\circ f\circ g = g \\ f\circ g = g\circ f \end{cases}$.

Soit x un élément de $\mathbb{K}^n$.

$\exists! (y,z) \in \mathrm{Im} f \times \mathrm{Ker} f$, $x = y+z$. Notons que $y = p(x)$.

- $f(x) = f(y) + f(z) = f(y) = f(p(x)) = f_1(p(x))$ (car $p(x) \in \mathrm{Im} f$).
- $g(x) = f_1^{-1}(p(x))$.

$$g(f(x)) = f_1^{-1}(p(f(x))) \overset{\downarrow}{=} f_1^{-1}(f(x)) = f_1^{-1}(f_1(p(x))) = p(x)$$

($f(x) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n})$)

$$f(g(x)) = f(f_1^{-1}(p(x))) \underset{\uparrow}{=} f_1(f_1^{-1}(p(x))) = p(x).$$ Ainsi $g(f(x)) = f(g(x)) = p(x)$

($f_1^{-1}(p(x)) \in \mathrm{Im} f$)

Ce qui précède nous donne alors $\underline{g\circ f = f\circ g = p}$. Nous avons aussi vu que $f = f\circ p$.

Alors $f\circ g\circ f = f\circ(g\circ f) = f\circ p = f$; $\underline{f\circ g\circ f = f}$.

$g\circ f\circ g = g\circ p$.

$\forall x \in \mathbb{K}^n$, $g(p(x)) = f_1^{-1}(p(p(x))) = f_1^{-1}(p(x)) = g(x)$; $g\circ p = g$.

Donc $\underline{g\circ f\circ g = g}$.

Comme $\pi' = \Pi_B(g)$ et $\pi = \Pi_B(f)$: $\begin{cases} \pi\pi'\pi = \pi \\ \pi'\pi\pi' = \pi' \\ \pi\pi' = \pi'\pi \end{cases}$.

π' est un pseudo inverse de π.

<u>π possède un pseudo inverse.</u>

Q6 a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

• $\|X\| = 0 \Leftrightarrow \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], |x_k| = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], x_k = 0 \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

$\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

• $\|\lambda X\| = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda x_k| = \max_{1\leq k\leq n} (|\lambda|\,|x_k|) = |\lambda| \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = |\lambda|\,\|X\|$. $\|\lambda X\| = |\lambda|\,\|X\|$.

• $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|x_k + x'_k| \leq |x_k| + |x'_k| \leq \max_{1\leq l\leq n} |x_l| + \max_{1\leq l\leq n} |x'_l| = \|X\| + \|X'\|$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|x_k + x'_k| \leq \|X\| + \|X'\|$ donc $\|X+X'\| = \max_{1\leq k\leq n} |x_k + x'_k| \leq \|X\| + \|X'\|$.

$\|X+X'\| \leq \|X\| + \|X'\|$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|y_k| = \left|\sum_{l=1}^n a_{kl} x_l\right| \leq \sum_{l=1}^n |a_{kl}|\,|x_l| \leq \|X\| \sum_{l=1}^n |a_{kl}| = \|X\| \underbrace{\sum_{l=1}^n a_{kl}}_{=1} = \|X\|$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|y_k| \leq \|X\|$. Alors $\|AX\| = \max_{1\leq k\leq n} |y_k| \leq \|X\|$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\|AX\| \leq \|X\|$.

Remarque.. Une récurrence simple donne $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}, \|A^k X\| \leq \|X\|$

c) Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1} Y$.

* $\lambda^1 X + 1\,\lambda^{1-1} Y = \lambda X + Y = \lambda X + (A - \lambda I_n)X = \lambda X + AX - \lambda X = AX = A^1 X$.

Ainsi la propriété est vraie pour $k=1$.

* Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

$A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1} Y$ donc $A^{k+1} X = \lambda^k AX + k\lambda^{k-1} AY$

$A^{k+1}X = \lambda^k AX + k\lambda^{k-1} AY = \lambda^k AX + k\lambda^{k-1}(A-\lambda I_n + \lambda I_n)Y.$

$A^{k+1}X = \lambda^k AX + k\lambda^{k-1}(A-\lambda I_n)Y + k\lambda^k Y$. Or $(A-\lambda I_n)Y = (A-\lambda I_n)^2 X \overset{X\in Ker(A-\lambda I_n)^2}{=} 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Donc $A^{k+1}X = \lambda^k AX + k\lambda^k Y = \lambda^k(A-\lambda I_n + \lambda I_n)X + k\lambda^k Y$.

$A^{k+1}X = \lambda^k \underbrace{(A-\lambda I_n)X}_{Y} + \lambda^k(\lambda X) + k\lambda^k Y = \lambda^{k+1}X + (k+1)\lambda^k Y$.

$A^{k+1}X = \lambda^{k+1}X + (k+1)\lambda^{(k+1)-1}Y$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1}Y.$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $Y = \frac{1}{k\lambda^{k-1}}A^k X - \frac{\lambda}{k}X$ ($|\lambda|=1$ donc $\lambda\neq 0$).

$\|Y\| = \left\|\frac{1}{k\lambda^{k-1}}A^k X + \left(-\frac{\lambda}{k}\right)X\right\| \leq \left\|\frac{1}{k\lambda^{k-1}}A^k X\right\| + \left\|-\frac{\lambda}{k}X\right\| = \frac{1}{k|\lambda|^{k-1}}\|A^k X\| + \left|-\frac{\lambda}{k}\right|\|X\|$

Rappelons que $|\lambda|=1$.

Alors $0 \leq \|Y\| \leq \frac{1}{k}\|A^k X\| + \frac{1}{k}\|X\| \leq \frac{1}{k}\|X\| + \frac{1}{k}\|X\| = \frac{2}{k}\|X\|$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq\|Y\|\leq\frac{2}{k}\|X\|.$

En faisant tendre k vers $+\infty$ il vient $\|Y\|=0$ donc $Y = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Alors $(A-\lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$; par conséquent $X\in Ker(A-\lambda I_n)$.

Ainsi $Ker(A-\lambda I_n)^2 \subset Ker(A-\lambda I_n)$.

Réciproquement supposons que $X\in Ker(A-\lambda I_n)$.

$(A-\lambda I_n)^2 X = (A-\lambda I_n)((A-\lambda I_n)X) = (A-\lambda I_n)0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$; $X\in Ker(A-\lambda I_n)^2$.

Donc $Ker(A-\lambda I_n)\subset Ker(A-\lambda I_n)^2$.

Finalement $Ker(A-\lambda I_n)^2 = Ker(A-\lambda I_n)$.

Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $Ker(A-\lambda I_n)^p = Ker(A-\lambda I_n)$.

* C'est clair pour $p=1$.

* Supposons que $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^p = \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$ et montrons que $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^{p+1} = \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$.

• Soit $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$. $(A-\lambda I_n)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$ donc $(A-\lambda I_n)^{p+1}X = (A-\lambda I_n)^p 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$

donc $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^{p+1}$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^{p+1}}$.

• Soit $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^{p+1}$. Alors $(A-\lambda I_n)X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^p$.

donc $(A-\lambda I_n)X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$. Alors $(A-\lambda I_n)^2 X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}$

donc $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^2 = \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$. $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^{p+1} \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)}$.

Alors $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^{p+1} = \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$ et la récurrence s'achève.

$\underline{\underline{\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^p = \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)}}$.

$|1| = 1$ donc $\mathrm{Ker}(A-I_n)^2 = \mathrm{Ker}(A-I_n)$.

Alors $\mathrm{rg}(A-I_n)^2 = n - \dim \mathrm{Ker}(A-I_n)^2 = n - \dim \mathrm{Ker}(A-I_n) = \mathrm{rg}(A-I_n)$.

$\mathrm{rg}(A-I_n)^2 = \mathrm{rg}(A-I_n)$ donc d'après IV Q1 c) $A-I_n$ possède un pseudo-inverse.

Clairement $\mathrm{rg}(I_n-A)^2 = \mathrm{rg}(A-I_n)^2 = \mathrm{rg}(A-I_n) = \mathrm{rg}(I_n-A)$.

donc $\underline{\underline{I_n - A \text{ possède un pseudo inverse}}}$.

d) Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$. Supposons que la suite $(\lambda^k)_{k\geq 1}$ converge et notons ℓ sa limite.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^{k+1} = \lambda^k \lambda$ donc $\ell = \ell\lambda$; $(\lambda-1)\ell = 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq |1 - |\ell|| = ||\lambda^k| - |\ell|| \leq |\lambda^k - \ell|$.

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda^k - \ell| = 0$ donc $|1-|\ell|| = 0$; $|\ell| = 1$. Ainsi $\ell \neq 0$. Alors $\lambda = 1$.

$\underline{\underline{\text{Si } \lambda \text{ est un élément de } \mathbb{C} \text{ de module } 1 \text{ tel que la suite } (\lambda^k)_{k\geq 1} \text{ converge alors } \lambda = 1}}$.

Supposons que A possède une valeur propre λ distincte de 1 et de module 1.

Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Supposons que $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers une matrice B.

Alors $(A^kX)_{k\geq 0}$ converge vers BX. Or $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $A^kX=\lambda^kX$.

Donc la suite $(\lambda^kX)_{k\geq 1}$ est convergente. Posons $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

Alors pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ la suite $(\lambda^k x_i)_{k\geq 1}$ converge.

$\exists i_0\in[\![1,n]\!]$, $x_{i_0}\neq 0$. Alors la suite $\frac{1}{x_{i_0}}(\lambda^k x_{i_0})_{k\geq 1}$ converge donc la suite $(\lambda^k)_{k\geq 1}$ converge ; ce qui est impossible d'après ce qui précède.

<u>Si A possède une valeur propre de module 1 distincte de 1, la suite $(A^k)_{k\geq 0}$ ne converge pas.</u>

<u>e)</u> $i\in[\![2,r]\!]$ et $X\in\operatorname{Ker}(A-\lambda_iI_n)^{p_i}$.

Alors $(A-\lambda_iI_n)^{p_i}X=0$. On a également $\forall k\in[\![p_i,+\infty[\![$, $(A-\lambda_iI_n)^kX=0$.

Soit $k\in[\![p_i,+\infty[\![$.

Les matrices $A-\lambda_iI_n$ et λ_iI_n commutent. Ainsi :

$$A^k=((A-\lambda_iI_n)+\lambda_iI_n)^k=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(A-\lambda_iI_n)^p(\lambda_iI_n)^{k-p}=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\lambda_i^{k-p}(A-\lambda_iI_n)^p.$$

$$A^kX=\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\lambda_i^{k-p}(A-\lambda_iI_n)^pX=\sum_{p=0}^{p_i-1}\binom{k}{p}\lambda_i^{k-p}(A-\lambda_iI_n)^pX.$$

Donc $$\|A^kX\|\leq\sum_{p=0}^{p_i-1}\left\|\binom{k}{p}\lambda_i^{k-p}(A-\lambda_iI_n)^pX\right\|\leq\sum_{p=0}^{p_i-1}\binom{k}{p}|\lambda_i|^{k-p}\|(A-\lambda_iI_n)^pX\|$$

Soit $p\in[\![0,p_i-1]\!]$. $\binom{k}{p}|\lambda_i|^{k-p}\underset{k\mapsto+\infty}{\sim}\frac{k^p}{p!}|\lambda_i|^{k-p}=\frac{1}{p!}k^p|\lambda_i|^{k-p}$.

$|\lambda_i|<1$ donc par croissance comparée : $\lim_{k\mapsto+\infty}k^p|\lambda_i|^{k-p}=0$

Alors $\lim_{k\mapsto+\infty}\left(\binom{k}{p}|\lambda_i|^{k-p}\right)=\lim_{k\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{p!}k^p|\lambda_i|^{k-p}\right)=0.$

Pour tout p dans $[\![0, p_i - 1]\!]$, $\lim_{k \to +\infty} \left(\binom{k}{p} |\lambda_i|^{k-p} \|(A-\lambda_i I_n)^p X\| \right) = 0$.

Alors par encadrement $\lim_{k \to +\infty} \|A^k X\| = 0$.

Posons pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k X = \begin{pmatrix} t_1^{(k)} \\ \vdots \\ t_n^{(k)} \end{pmatrix}$. Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$,

$\forall k \in \mathbb{N}$, $|t_\ell^{(k)}| \leq \|A^k X\|$.

Comme $\lim_{k \to +\infty} \|A^k X\| = 0$: $\lim_{k \to +\infty} t_\ell^{(k)} = 0$ et ceci pour tout ℓ dans $[\![1, n]\!]$.

Alors $\lim_{k \to +\infty} A^k X = 0$

$\forall i \in [\![2, r]\!]$, $\forall X \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_i I_n)^{p_i}$, $\lim_{k \to +\infty} A^k X = 0$.

Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 I_n)^{p_1}$. $X \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 I_n)$. $X \in \mathrm{Ker}\,(A-I_n)$! $AX = X$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = X$. Donc $\lim_{k \to +\infty} A^k X = X$.

Soit maintenant X un élément quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$\exists ! (X_1, X_2, \dots, X_r) \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 I_n)^{p_1} \times \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_2 I_n)^{p_2} \times \dots \times \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_r I_n)^{p_r}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = A^k X_1 + A^k X_2 + \dots + A^k X_r$.

Alors $\lim_{k \to +\infty} A^k X = X_1 + 0 + \dots + 0 = X_1$.

Pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ la suite $(A^k X)_{k \geq 0}$ converge.

Soit $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = (a_{p,q}^{(k)})$. Soit $(p,q) \in [\![1, n]\!]^2$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{p,q}^{(k)} = {}^t\hat{E}_p A^k \hat{E}_q$.

$(A^k \hat{E}_q)_{k \geq 0}$ converge car $\hat{E}_q \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donc $({}^t\hat{E}_p A^k \hat{E}_q)_{k \geq 0}$ converge.

Ainsi $(a_{p,q}^{(k)})_{k \geq 0}$ converge et ceci pour tout (p,q) dans $[\![1, n]\!]^2$.

Alors $\underline{(A^k)_{k \geq 0} \text{ est convergente}}$.

Notons A_∞ la limite de la suite $(A^k)_{k\geq 0}$.

Soit X un élément de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. $\exists!\,(X_1,\dots,X_r)\in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 I_n)^{p_1}\times\dots\times \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_r I_n)^{p_r}$.

tel que $X = X_1+\dots+X_r$.

Nous avons vu que $\lim\limits_{k\mapsto+\infty} A^k X = X_1$. Alors $A^\infty X = X_1$.

Donc $A^\infty(A^\infty X) = A^\infty X_1 = A^\infty(X_1+0+\dots+0) = X_1 = A^\infty X$.

$\forall X\in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $(A^\infty)^2 X = A^\infty X$.

$\forall p\in [\![1,n]\!]$, $(A^\infty)^2 \hat{E}_p = A_\infty \hat{E}_p$

Pour tout p dans $[\![1,n]\!]$, $(A^\infty)^2$ et A^∞ ont même $p^{\text{ième}}$ colonne.

Alors $\underline{\underline{(A^\infty)^2 = A^\infty}}$. $\underline{\underline{A^\infty \text{ est donc une matrice de projection}}}$.

<u>Remarque 1</u>.– Si f est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A_∞, f est la projection sur $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)^{p_1} = \mathrm{Ker}(f-\lambda_1 \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{i=2}^{r} \mathrm{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}$.

<u>Remarque 2</u>.– D'une manière beaucoup plus générale si $M\in M_n(\mathbb{R})$ et si $(M^k)_{k\geq 0}$ converge vers M_∞, M_∞ est une matrice de projection. La preuve est immédiate en remarquant que $\forall k\in\mathbb{N}$, $M^{2k} = M^k M^k$.

Q7 $\boxed{\text{Complément 5}}$

Ici on suppose simplement que $A \in \mathcal{M}_n$ et on se propose de montrer que $\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Problème résolu dans IV avec A dans $\mathcal{M}_n$ mais à ~~coefficients strictement positifs~~.

Posons pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $S_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} A^j$. Pour montrer que $(S_k)_{k\geq 1}$ converge il suffit de montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $(S_k X)_{k\geq 1}$ converge. Et pour cela il suffit de montrer que pour tout i dans $[\![1,r]\!]$ et pour tout X dans $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{p_i}$, $(S_k X)_{k\geq 1}$ converge. Nous reviendrons sur cela à la fin.

Soit $i \in [\![1,r]\!]$.

<u>1er cas</u>.. $|\lambda_i| = 1$. Alors $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{p_i} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)$.

Soit $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{p_i}$. $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)$ donc $AX = \lambda_i X$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $S_k X = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} A^j X = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_i^j X = \begin{cases} X & \text{si } \lambda_i = 1 \\ \frac{1}{k}\,\frac{1-\lambda_i^k}{1-\lambda_i}\,X & \text{si } \lambda_i \neq 1. \end{cases}$

Si $\lambda_i = 1$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $S_k X = X$. $(S_k X)_{k\geq 1}$ converge ... vers X.

Supposons $\lambda_i \neq 1$. $\left|\frac{1}{k}\,\frac{1-\lambda_i^k}{1-\lambda_i}\right| = \frac{1}{k}\,\frac{|1-\lambda_i^k|}{|1-\lambda_i|} \leq \frac{1}{k}\,\frac{1+|\lambda_i^k|}{|1-\lambda_i|} = \frac{1}{k}\,\frac{1+|\lambda_i|^k}{|1-\lambda_i|} = \frac{2}{k|1-\lambda_i|}$.

Or $\lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k|1-\lambda_i|} = 0$ donc $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\,\frac{1-\lambda_i^k}{1-\lambda_i} = 0$.

Alors $(S_k X)_{k\geq 0}$ converge vers 0.

<u>2ème cas</u>.. $|\lambda_i| < 1$. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{p_i}$. Nous avons vu dans

IV Q6 <u>e)</u> que $\lim_{k\to+\infty} A^k X = 0$. Utilisons Cesàro pour montrer

que $\lim_{k\to+\infty} S_k X = 0$.

▼ <u>Lemme</u>.. Soit $(u_i)_{i\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ qui converge vers 0. Alors $\left(\frac{u_0+u_1+\dots+u_{k-1}}{k}\right)_{k\geq 1}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq p \Rightarrow |u_k| < \varepsilon/2$.

$\forall k \in [\![p, +\infty [\![, \quad \left|\frac{u_0+u_1+\dots+u_{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}|u_i| = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{p-1}|u_i| + \frac{1}{k}\sum_{i=p}^{k}|u_i|$

$\forall k \in [\![p, +\infty [\![, \quad \left|\frac{u_0+u_1+\dots+u_{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{p-1}|u_i| + \frac{1}{k}\sum_{i=p}^{k}\varepsilon/2$

$\forall k \in [\![p, +\infty [\![, \quad \left|\frac{u_0+u_1+\dots+u_{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{p-1}|u_i| + \underbrace{\frac{1}{k}(k-p+1)}_{\leq 1}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{p-1}|u_i| + \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\lim_{k\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{p-1}|u_i|\right) = 0$ donc $\exists q \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \; k \geq q \Rightarrow \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{p-1}|u_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall k \in [\![\max(p,q), +\infty [\![, \quad \left|\frac{u_0+u_1+\dots+u_{k-1}}{k}\right| < \varepsilon$.

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists s \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \; k \geq s \Rightarrow \left|\frac{u_0+u_1+\dots+u_{k-1}}{k}\right| < \varepsilon$

donc $\lim_{k\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{k}(u_0+u_1+\dots+u_{k-1})\right) = 0$.

<u>Exercice</u> Déduire de ce qui précède que si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ qui converge vers ℓ : $\left(\frac{u_0+u_1+\dots+u_k}{k}\right)_{k\geq 1}$ converge également vers ℓ. ▲

Revenons à $\lim_{\ell\mapsto+\infty} A^\ell X = 0$.

Posons $\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad A^\ell X = \begin{pmatrix} t_1^{(\ell)} \\ t_2^{(\ell)} \\ \vdots \\ t_n^{(\ell)} \end{pmatrix}$. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad S_k X = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} A^j X = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ z_2^{(k)} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix}$ avec

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad z_i^{(k)} = \frac{t_i^{(0)} + t_i^{(1)} + \dots + t_i^{(k-1)}}{k}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{k\mapsto+\infty} t_i^{(k)} = 0$ car $\lim\limits_{k\mapsto+\infty} A^k X = 0$.

Alors d'après le lemme : $\lim\limits_{k\mapsto+\infty} z_i^{(k)} = 0$ pour tout i dans $[\![1,n]\!]$.

Ainsi $\lim\limits_{k\mapsto+\infty} S_k X = 0$.

Résumons $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\forall X \in \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{p_i}$, $\lim\limits_{k\mapsto+\infty} S_k X = \begin{cases} X & \text{si } \lambda_i = 1 \\ 0 & \text{si } \lambda_i \neq 1 \end{cases}$.

Montrons alors que pour tout X dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$, $(S_k X)_{k\geq 1}$ converge.

Rappelons que $M_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I_n)^{p_i}$ avec $\lambda_1 = 1$ et $\forall i \in [\![2,r]\!]$, $|\lambda_i| \leq 1$ et $\lambda_i \neq 1$.

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. $\exists!\, (X_1, X_2, \dots, X_r) \in \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I_n)^{p_1} \times \operatorname{Ker}(A-\lambda_2 I_n)^{p_2} \times \dots \times \operatorname{Ker}(A-\lambda_r I_n)^{p_r}$, $X = X_1 + \dots + X_r$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $S_k X = \sum\limits_{i=1}^{r} S_k X_i$ et $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\lim\limits_{k\mapsto+\infty} S_k X_i = \begin{cases} X_1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donc $(S_k X)_{k\geq 1}$ converge vers X_1.

Soit $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

Notons que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $S_k = ({}^t\hat{E}_i S_k \hat{E}_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$.

$(S_k \hat{E}_j)_{k\geq 1}$ converge donc $({}^t\hat{E}_i S_k \hat{E}_j)_{k\geq 1}$ converge.

Alors $(S_k)_{k\geq 1}$ est convergente.

Ainsi $\left(\frac{1}{k} \sum\limits_{j=0}^{k-1} A^j\right)_{k\geq 1}$ converge ... pour toute matrice stochastique A.

(Q8) Complément 6

a] Rappelons que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\ell=1}^{r} \mathrm{Ker}(A-\lambda_\ell I_n)^{p_\ell}$ et que

$\forall \ell \in [\![1,r]\!]$, $\mathrm{Ker}(A-\lambda_\ell I_n)^{p_\ell} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_\ell I_n)$ (car $|\lambda_\ell| = 1$ ... V Q6 b]).

Donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\ell=1}^{r} \mathrm{Ker}(A-\lambda_\ell I_n)$ et ainsi A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. α_k est une valeur propre de A de module 1.

Donc α_k est une racine de l'unité d'après le complément 3.

Alors $\exists s_k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k^{s_k} = 1$ et ceci pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

Soit s un multiple commun à $s_1, s_2, \dots, s_n$ (on peut prendre $s = s_1 s_2 \dots s_n$).

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k^{s} = 1$. et $s \in \mathbb{N}^*$

Donc $A^s = (Q\,\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)Q^{-1})^s = Q(\mathrm{Diag}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n))^s Q^{-1}$

$A^s = Q\,\mathrm{Diag}(\alpha_1^s,\alpha_2^s,\dots,\alpha_n^s)\,Q^{-1} = Q I_n Q^{-1} = I_n$.

$\exists s \in \mathbb{N}^*$, $A^s = I_n$.

1er cas.. $s = 1$. $A = I_n$. A est bien une matrice de permutation.

2e cas.. $s \geq 2$. $A\,A^{s-1} = I_n$. Alors A est une matrice stochastique inversible dont l'inverse est A^{s-1}.

Or A^{s-1} est stochastique car A est stochastique.

Donc d'après le complément 2 A est une matrice de permutation.

Dans les deux cas A est une matrice de permutation.

b) Soit A une matrice de permutation. Il existe une bijection σ de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ telle que $A = P_\sigma$.

Comme nous l'avons vu dans V Q 2, A est stochastique.

Montrons que ces valeurs propres dans $\mathbb{C}$ sont de module 1.

Posons $B = (b_{ij}) = A^2$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} a_{\ell j} = a_{i,\sigma(i)} a_{\sigma(i),j} = a_{\sigma(i),j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = \sigma^2(i) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors $A^2 = P_{\sigma^2}$. Une récurrence simple donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P_{\sigma^k}$.

$(\sigma^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de bijections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$. Or l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ est fini.

Ainsi $\exists (k,k') \in \mathbb{N}^2$, tel que $k' < k$ et $\sigma^k = \sigma^{k'}$. Alors : $\sigma^{k-k'} = Id_{[\![1,n]\!]}$.

Posons $s = k - k'$. $s \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma^s = \sigma^{k-k'} = Id_{[\![1,n]\!]}$

Alors $A^s = P_{\sigma^s} = P_{Id_{[\![1,n]\!]}} = I_n$.

$\exists s \in \mathbb{N}^*$, $A^s = I_n$.

$X^s - 1$ est un polynôme annulateur de A donc $\mathrm{Sp} A \subset \{z \in \mathbb{C} \mid z^s - 1 = 0\}$.

Soit z un élément de $\mathbb{C}$ tel que $z^s - 1 = 0$.

$z^s = 1$. $|z^s| = 1$. $|z|^s = 1$ donc $|z| = 1$ (car $s \in \mathbb{N}^*$).

Alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A$, $|\lambda| = 1$.

Les valeurs propres de A sont de module 1.