Le problème étudie la notion de taux de panne, d'abord dans le cas discret, en relation avec le concept de produit infini, puis dans les cas des variables aléatoires à densité.

Les parties II et III utilisent les notations et les résultats de la partie I. La partie III est indépendante de la partie II. Les parties IV et V sont indépendantes des parties I, II et III. Enfin, la partie V utilise les notations et les résultats de la partie IV.

Les questions nulles ne sont pas explicitement dans la correction

---

PARTIE I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à valeurs dans $[0,1[$. On lui associe la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = \prod_{k=1}^{n}(1-u_k) = (1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_n).$$

Q0 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n \in]0,1]$. Préciser $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}$ pour tout élément n de $[\![2,+\infty[\![$.

Q1 Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite L vérifie $0 \leqslant L \leqslant 1$.

Si la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non nulle, on dit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **bien convergente***. On pose alors $L = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1-u_k)$, et on dit aussi que L est un produit infini* **bien convergent***.*

Q2 *Exemples*

a) Calculer q_n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et déterminer la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b) Étudier de même le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n+1}$, puis le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Q3 a) Montrer que si la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle.

b) Montrer que si la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien convergente alors la série de terme général $\ln(1-u_n)$ est convergente.

Montrer finalement que la série de terme général u_n est convergente.

Montrer réciproquement que si que la série de terme général u_n est convergente alors la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien convergente.

c) Déduire de ce qui précède que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro si et seulement si la série de terme général u_n diverge.

PARTIE II

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeur dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X \geqslant n) > 0 \quad (1).$$

On appelle **taux de panne** asssocié à X, la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = P_{\{X\geqslant n\}}(X=n) \text{ ou } x_n = P(X=n/X\geqslant n).$$

(probabilité conditionnelle de l'événement $\{X = n\}$ sachant que $\{X \geqslant n\}$ est réalisé).

Q0 a) Sous les hypothèses précédentes montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \dfrac{P(X=n)}{P(X \geqslant n)}\cdot$

b) Déterminer le taux de panne de X si l'on suppose qu'elle suit la loi géométrique de paramètre p.

Q1 a) Vérifier que $n \to \dfrac{1}{n(n+1)}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

(On pourra déterminer deux réels θ et μ tels que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{\mu}{n+1}\cdot$)

b) Soit alors Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et telle que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$P(Y = n) = \frac{1}{n\,(n+1)}\cdot$$

Calculer $P(Y \geqslant n)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$. En déduire que Y vérifie (1) et déterminer le taux de panne associé à Y.

Q2 Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant (1).

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ son taux de panne. Montrer que :

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ P(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k) \quad (2).$$

Exprimer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $p_n = P(X = n)$ à l'aide des éléments de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Q3 Déterminer les lois des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant (1) et ayant un taux de panne constant (ne pas oublier la réciproque...).

Au choix **Q4** (texte original) ou **Q4'**. Prendre son temps.

Q4 Montrer qu'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un taux de panne si et seulement si on a les deux propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in [0, 1[$.
2. La série de terme général x_n est divergente.

Q4' a) Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant (1). Montrer que son taux de panne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in [0, 1[$.
2. La série de terme général x_n est divergente.

b) Réciproquement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels qui vérifie les deux conditions précédentes.

On pose $g(1) = x_1$ et $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ g(n) = x_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$.

Montrer que g est une loi de probabilité (on pourra remarquer que $x_n = 1 - (1 - x_n)$).

En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le taux de panne d'une variable aléatoire.

Q5 *Application.* Dans cette question, a désigne un paramètre réel. On définit les suites $\big(x_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(q_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n(a) = \frac{a^{2^n}}{1 + a^{2^n}} \text{ et } q_n(a) = \prod_{k=1}^{n}\Big(1 - x_k(a)\Big)$$

On pose de plus $q_0(a) = 1$. Enfin, on pose, lorsque ceci a un sens :

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a^{2^n}}{\prod_{k=1}^{n}(1+a^{2^k})} \right] \text{ et } L(a) = \lim_{n\to+\infty} q_n(a).$$

Attention dans les formules précédentes les indices sont un peu écrasés. 2^k c'est deux à la puissance k et non pas $2k$. Même chose pour 2^n.

a) Montrer que la suite $\big(q_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b) Pour a non nul et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que : $q_{n-1}\left(\frac{1}{a}\right) = a^{2^n-2}\, q_{n-1}(a)$

Exprimer le produit $x_n\left(\frac{1}{a}\right)\, q_{n-1}\left(\frac{1}{a}\right)$ à l'aide de a, $q_{n-1}(a)$ et $x_n(a)$.

c) Pour quelles valeurs de a la suite $\big(x_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle un taux de panne ?

Pour ces valeurs de a, justifier que $S(a)$ et $L(a)$ existent et les calculer.

d) En déduire, pour tout a réel, l'existence et la valeur de $S(a)$ et $L(a)$ (on pourra utiliser b) et c)).

e) Retrouver $L(a)$ en calculant directement $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a^{2^k})$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ (faire n=1, 2, 3...).

Q6 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant (1), de taux de panne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose $Z = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^* \mid U_k \leqslant x_k\}$. Z est donc la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^* \mid U_k(\omega) \leqslant x_k\}.$$

Montrer que le loi de Z est celle de X.

PARTIE III

On considère toujours un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Q1 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $a_n = P(A_n)$.

On pose encore encore $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ B_N = \displaystyle\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$ et $C = \displaystyle\bigcap_{N=1}^{+\infty} B_N$.

a) Montrer par double inclusion que que C est l'événement : “une infinité d'événements A_n sont réalisés”.

b) Montrer que $P(C) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} P(B_N)$

c) On suppose que la série de terme général a_n converge.

Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ P(B_N) \leqslant \displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} P(A_n)$. En déduire que : $P(C) = 0$. Interpréter ce résultat.

d) Montrer que si les événements A_n sont indépendants et si la série de terme général a_n diverge, alors $P(C) = 1$. Interpréter alors le résultats.

Q2 Vous êtes responsable de la sécurité d'une entreprise. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement “un accident se produit dans cette entreprise durant l'année n (depuis votre prise de fonction)”. On appelle T la variable aléatoire égale au numéro de la première année durant laquelle se produit un accident. On suppose que les événements A_n sont indépendants, que l'entreprise a une durée de vie infinie et qu'il ne peut se produire qu'au plus un accident chaque année ! !

Vous avez confié l'étude de la sécurité à trois équipes de recherche, qui proposent chacune des mesures permettant de réduire chaque année la probabilité de survenue d'un accident.

L'équipe I garantit les valeurs $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \dfrac{1}{n+1}\cdot$

L'équipe II garantit les valeurs $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot$

L'équipe III garantit les valeurs $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}\cdot$

a) Calculer dans chaque cas, d'une part la probabilité qu'une infinité d'accidents (resp. un nombre fini d'accident) se produisent au cours du temps.

b) Exprimer la loi de T à l'aide des éléments de la suite de terme général $P(A_n)$.

Dans les trois cas donner la loi de T et étudier l'existence de son espérance.

c) Quelle stratégie adoptez-vous ?

Les probabilité précédentes ont été choisies pour la commodité des calculs, mais on pourrait faire un raisonnement analogue avec des valeurs plus réalistes.

PARTIE IV

Soit toujours $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui possèdent une densité nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

Q1 Soit X un élément de $\mathcal{S}$. Montrer que X possède une unique densité nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

Q2 Soit X un élément de $\mathcal{S}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\,*},\ P(X > x) > 0 \quad (3)$$

On note F sa fonction de répartition et f la densité de X nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

a) Justifier, pour tout x dans $\mathbb{R}^{+\,*}$, l'existence de $\varphi(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \left[\dfrac{1}{h} P_{\{X>x\}}(X \leqslant x+h)\right]$ et vérifier que

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} \quad (4)$$

On appelle **taux de panne** associé à X la fonction φ ainsi définie sur $\mathbb{R}^{+\,*}$.

b) Montrer que, pour tout réel strictement positif x, $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\ln\big(1-F(x)\big)$.

Exprimer F à l'aide de φ.

Q3 Soit X un élément de $\mathcal{S}$. f est la densité de X nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

Montrer que si f est strictement positive sur $]0, +\infty[$ alors X vérifie (3).

Q4 *Exemple 1.* Soit deux réels α et β strictement positifs. Déterminer la constante K pour que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{K}{(1+\beta\,x)^{\alpha+1}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

Soit Y une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant g pour densité. Montrer que Y appartient à $\mathcal{S}$, vérifie (3) et calculer son taux de panne.

Q5 a) *Exemple 2.* Soit Z une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que Z appartient à $\mathcal{S}$, vérifie (3) et calculer son taux de panne.

b) Soit X un élément de $\mathcal{S}$. f est la densité de X nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$. On suppose que son taux de panne est constant. Montrer que X suit une loi exponentielle.

Q6 W est un élément de $\mathcal{S}$ qui vérifie (3) et dont le taux de panne est la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ h(t) = a\,\lambda^a\,t^{a-1},$$

où a et λ sont deux paramètes strictement positifs.

Trouver la fonction de répartition F_W de W et donner une densité de W. Que trouve-t-on pour $a = 1$?

Q7 a) Soit X un élément de $\mathcal{S}$ qui vérifie (3). On note φ son taux de panne.

Étudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit un taux de panne d'une variable aléatoire.

c) Existe-t-il des variables aléatoires ayant pour taux de panne la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ ?$$

Si oui donner une densité d'une variable aléatoire dont le taux de panne est ψ.

PARTIE V

Dans cette partie X est un élément de $\mathcal{S}$ qui vérifie (3).

F est sa fonction de répartition, f est sa densité nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$ et φ est son taux de panne.

On note G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = 1 - F(x)$

On note Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1 Etudier les variations de Φ.

Q2 Montrer que si φ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ G(x+y) \leqslant G(x)\,G(y)$$

Et si φ est décroissante ? Retrouver ainsi le résultat de IV 5.

Q3 On suppose ici que f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \Phi(X)$.

b) En déduire la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$. Retrouver directement ce résultat.

c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = -\ln U$.

d) Utiliser ce qui précède pour simuler la variable aléatoire W de **IV Q6**.
