Partie I : Un résultat utile

(Q1) a) $(\{X=n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(X=n)\in[0,1] \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)=1.$$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n\in[0,1]$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=1$.

<u>$(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs ou nul vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n=1$</u>

b) Soit $x\in[0,1]$. 1) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq a_n x^n\leq a_n$;

2) la série de terme général a_n converge d'après a)

les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $a_n x^n$ converge.

<u>Pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, la série de terme général $a_n x^n$ converge.</u>

(Q2) a) Soit $x\in[0,1[$.

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(1-x^n)=\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[a_n\underbrace{(1-x)\sum_{k=0}^{n-1}x^k}_{1-x^n=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})}\Big]$$

<u>$\forall x\in[0,1[,\ \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\sum_{k=0}^{n-1}x^k\Big)$.</u>

b) Posons $\forall x\in[0,1[,\ \varphi(x)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$.

Soient x et y deux éléments de $[0,1[$ tels que $x\leq y$. $0\leq x\leq y$ donc :

$\forall k\in\mathbb{N},\ x^k\leq y^k$. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}x^k\leq\sum_{k=0}^{n-1}y^k$ et $a_n\geq 0$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n\sum_{k=0}^{n-1}x^k\leq a_n\sum_{k=0}^{n-1}y^k$.

Ainsi $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\sum_{k=0}^{n-1}x^k\Big)\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\sum_{k=0}^{n-1}y^k\Big)=\varphi(y)$; $\varphi(x)\leq\varphi(y)$.

<u>Par conséquent $x\mapsto\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$.</u>

b) $x \mapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$ et admet pour limite $f'(1)$ en 1 ainsi :

$\forall x \in [0,1[, \quad \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq f'(1).$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell \geq 0$ donc $\sum_{n=1}^{N}\left(a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell\right)$
Soit $x \in [0,1[$.

$$\text{Alors } \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell\right) \leq \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq f'(1).$$

$\forall x \in [0,1[, \quad \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell\right) \leq f'(1)$. En faisant tendre x vers 1 il vient

alors $\sum_{n=1}^{N}\left(a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} 1\right) \leq f'(1)$ ou $\sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1)$.

$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1).$

La série de terme général $n a_n$ est à termes positifs et ce qui précède montre que la suite de ses sommes partielles est majorée par $f'(1)$.

Alors la série de terme général $n a_n$ converge.

d) $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1)$ et la série de terme général $n a_n$ converge.

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$.

Soit $x \in [0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell \underset{a_n \geq 0}{\leq} a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = n a_n$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ car les deux séries convergent.

$$\text{Alors } \quad \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$

$\forall x \in [0,1[, \quad \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1).$

d) $\forall x \in [0,1[,\quad 0 \leq \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$

En faisant tendre x vers 1 il vient : $\quad f'(1) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1)$.

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = f'(1)$.

La série de terme général $n a_n$ est à termes positifs et convergente.
Elle est donc absolument convergente.
Ainsi X possède une espérance qui vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ donc $f'(1)$.

<u>X possède une espérance et $E(X) = f'(1)$.</u>

Q3 • $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$ (voir Q2 b))

• Soit $x \in [0,1[$. $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} 1$ et $a_n \geq 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell \leq n a_n$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell\right)$ existe et vaut $\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ existe également

et vaut $E(X)$. Donc $\quad \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq E(X)$.

<u>Donc $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est majorée sur $[0,1[$ par $E(X)$.</u>

φ est croissante et majorée sur $[0,1[$ donc φ admet une limite finie (à gauche) en 1.

Alors <u>f est dérivable (à gauche) en 1.</u>

<u>Finalement</u> || $E(X)$ existe si et seulement si f est dérivable (à gauche en 1). En cas d'existence : $E(X) = f'(1)$.

⚠ Il est clair que ce résultat vaut encore si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et si $P(X=0)=0$!!
Cela peut servir ... Il n'est pas difficile de l'adapter au cas où X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

PARTIE II : Loi du temps d'attente de la première configuration "pile, pile, face".

Q1 Soit $n \in [\![3,+\infty[\![$. $U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i \subset \bigcup_{i=3}^{n+1} B_i = U_{n+1}$, donc $P(U_n) \leq P(U_{n+1})$.

Alors $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Notons que $u_3 = P(U_3) \geqslant 0$; ainsi $u_3 \geqslant 0 = u_2 = u_1$; donc $u_3 \geqslant u_2 \geqslant u_1$!

Ainsi $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $u_n \leq u_{n+1}$. $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $u_n = P(U_n) \leq 1$ et $u_1 = u_2 = 0 \leq 1$.

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante et majorée par 1 donc converge.

$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Remarque.. Un corollaire du théorème de la limite monotone indique que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=3}^{n} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} B_i\right) ; \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} P(U_n) = P\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} B_i\right)$$

ceci donne immédiatement la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Q2 a) $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $P(B_n) = P(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \overset{\text{indépendance}}{=} P(P_{n-2})P(P_{n-1})P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $P(B_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

b) Soit $n \in [\![3,+\infty[\![$. $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$, $B_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}$ et

$B_{n+2} = P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2}$

B_n et B_{n+1} sont incompatibles car on ne peut pas réaliser simultanément F_n et P_n.

B_n et B_{n+2} ———————————————— F_n et P_n

B_{n+1} et B_{n+2} ———————————————— P_{n+1} et F_{n+1}

B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles pour tout n dans $[\![3,+\infty[\![$.

c) $u_3 = P(U_3) = P(B_3) = \frac{1}{8}$.

$u_4 = P(U_4) = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ car B_3 et B_4 sont incompatibles

$u_5 = P(U_5) = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ car B_3, B_4 et B_5 sont deux à deux incompatibles.

$\underline{u_3 = \frac{1}{8},\ u_4 = \frac{1}{4},\ u_5 = \frac{3}{8}}$.

Q3 a) Soit $n \in [\![5, +\infty[\![$.

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n) \cap B_{n+1}$$
$$= (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}).$$

Or $B_{n-1} \cap B_{n+1} = B_n \cap B_{n+1} = \emptyset$ car B_{n-1}, B_n et B_{n+1} sont deux à deux incompatibles.

Ainsi $\underline{U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}}$.

$$U_{n-2} = \bigcup_{i=3}^{n-2} B_i = \bigcup_{i=3}^{\boxed{n-2}} (P_{i-2} \cap P_{i-1} \cap F_i) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = \underline{P_{n-1}} \cap \underline{P_n} \cap \underline{F_{n+1}}.$$

Les tirages étant indépendants, les événements U_{n-2} et B_{n+1} le sont également.

Alors $P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2})\, P(B_{n+1}) = \frac{1}{8} P(U_{n-2}) = \frac{1}{8} u_{n-2}$

Donc $\underline{P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = \frac{1}{8} u_{n-2}}$ et ceci pour $n \in [\![5, +\infty[\![$.

b) $V_{n+1} = \bigcup_{i=3}^{n+1} B_i = \bigcup_{i=3}^{n} B_i \cup B_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$. $\underline{U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}}$.

$u_{n+1} = P(U_{n+1}) = P(U_n \cup B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1})$

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2}$. $\underline{u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})}$ pour tout n dans $[\![5, +\infty[\![$.

c) Rappelons que $u_1=u_2=0$, $u_3=\frac{1}{8}$ et $u_4=\frac{1}{4}$.

$u_2+\frac{1}{8}(1-u_1)=0+\frac{1}{8}(1-0)=\frac{1}{8}=u_3$; $u_3=u_2+\frac{1}{8}(1-u_1)$.

$u_3+\frac{1}{8}(1-u_2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}(1-0)=\frac{1}{4}=u_4$; $u_4=u_3+\frac{1}{8}(1-u_2)$.

Notons que ceci n'a aucun intérêt!

c') Il est plus intéressant d'essayer de valider la formule de b) pour $n=3$ et $n=4$.

$u_1=u_2=0$; $u_3=\frac{1}{8}$, $u_4=\frac{1}{4}$ et $u_5=\frac{3}{8}$.

$u_3+\frac{1}{8}(1-u_{3-2})=u_3+\frac{1}{8}(1-u_1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}(1-0)=\frac{1}{4}=u_4$.

$u_4+\frac{1}{8}(1-u_{4-2})=u_4+\frac{1}{8}(1-u_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(1-0)=\frac{3}{8}=u_5$.

Finalement $\forall n\in[\![3,+\infty[\![$, $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{8}(1-u_{n-2})$.

d) Rappelons que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et que $\lim_{n\to+\infty} u_n=P\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} B_i\right)$.

Posons $\ell=\lim_{n\to+\infty} u_n$.

$\forall n\in[\![3,+\infty[\![$, $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{8}(1-u_{n-2})$. En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $\ell=\ell+\frac{1}{8}(1-\ell)$; $\frac{1}{8}(1-\ell)=0$. Ainsi $\ell=1$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$ et $P\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} B_i\right)=1$.

Pour tout $i\in[\![3,+\infty[\![$, B_i est l'événement la séquence "pile, pile, face" est obtenue au $i^{ème}$ lancer.

$\bigcup_{i=3}^{+\infty} B_i$ est alors l'événement on obtient la séquence "pile, pile, face".

Alors $P(Y=0)=P\left(\overline{\bigcup_{i=3}^{+\infty} B_i}\right)=1-P\left(\bigcup_{i=3}^{+\infty} B_i\right)=1-1=0$. $P(Y=0)=0$.

Q4 a) $v_1 = 1-u_1 = 1$; $v_2 = 1-u_2 = 1$; $v_3 = 1-u_3 = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; $v_4 = 1-u_4 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$$\underline{v_1 = v_2 = 1 \text{ ; } v_3 = \frac{7}{8} \text{ et } v_4 = \frac{3}{4}.}$$

b) Soit $n \in [\![3,+\infty[\![$.

$v_{n+1} = 1-u_{n+1} = 1-u_n - \frac{1}{8}(1-u_{n-2}) = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}$.

$$\underline{\forall n \in [\![3,+\infty[\![, \ v_{n+1} = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}.}$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$\forall k \in [\![3,+\infty[\![$, $v_k - v_{k+1} = \frac{1}{8}v_{k-2}$. Alors $\sum_{k=3}^{N+2}(v_k - v_{k+1}) = \frac{1}{8}\sum_{k=3}^{N+2} v_{k-2}$

Donc $v_3 - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum_{k=3}^{N+2} v_{k-2} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k$. Rappelons que $v_3 = \frac{7}{8}$. Ainsi :

$$\underline{\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{N} v_k.}$$

d) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{N} v_k = 7 - 8v_{N+3}$ donc $\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} v_k\right) = 7$.

<u>La série de terme général v_n converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 7$.</u>

e) Soit $n \in [\![3,+\infty[\![$. $U_n = B_3 \cup B_4 \cup \dots \cup B_n$ et $\forall i \in [\![3,+\infty[\![$, $B_i = P_{i-2}\cap P_{i-1}\cap F_i$

Ainsi U_n est l'événement les n premiers tirages ont donné au moins une fois la séquence "pile, pile, face".

Alors $\overline{U_n} = \{Y=0\}\cup\{Y>n\}$.

Donc $v_n = 1-u_n = 1-P(U_n) = P(\overline{U_n}) = P(\{Y=0\}\cup\{Y>n\}) \overset{\text{événements incompatibles}}{=} \underbrace{P(Y=0)}_{=0} + P(Y>n) = P(Y>n)$.

$$\underline{\forall n \in [\![3,+\infty[\![, \ v_n = P(Y>n).}$$

Rappelons que $v_1 = v_2 = 1$ et que $P(Y>1) = P(Y>2) = 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = P(Y>n)$.

Or la série de terme général v_n est convergente donc la série de terme général $P(Y>n)$ est convergente.

Il est alors de notoriété publique que $E(Y)$ existe et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y>n)$.

Ainsi $E(Y)$ existe et vaut $P(Y>0) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1+7 = 8$.

Q5 a) Soit $n \in [\![4, +\infty[\![$.

$\{Y=n\} = \overline{U_{n-1}} \cap B_n$ et $U_n = U_{n-1} \cup B_n$.

Alors $\{Y=n\} = \overline{U_{n-1}} \cap B_n$ et $\overline{U_n} = \overline{U_{n-1}} \cap \overline{B_n}$

donc $\{Y=n\} \cup \overline{U_n} = (\overline{U_{n-1}} \cap B_n) \cup (\overline{U_{n-1}} \cap \overline{B_n}) = \overline{U_{n-1}}$.

$(\{Y=n\} \cup \overline{U_n}) \cap U_n = \overline{U_{n-1}} \cap U_n$.

Donc $(\{Y=n\} \cap U_n) \cup \underbrace{(\overline{U_n} \cap U_n)}_{=\emptyset} = \overline{U_{n-1}} \cap U_n$; $\{Y=n\} \cap U_n = \overline{U_{n-1}} \cap U_n$.

Or $\{Y=n\} \subset U_n$ donc $\{Y=n\} \cap U_n = \{Y=n\}$.

Finalement $\{Y=n\} = \overline{U_{n-1}} \cap U_n$.

$P(U_n) = P(\overline{U_{n-1}} \cap U_n) + P(U_{n-1} \cap U_n) = P(Y=n) + P(U_{n-1} \cap U_n)$

$P(U_n) = P(Y=n) + P(U_{n-1})$ car $U_{n-1} \subset U_n$.

Ainsi $P(Y=n) = P(U_n) - P(U_{n-1}) = u_n - u_{n-1} = (1-u_{n-1}) - (1-u_n) = v_{n-1} - v_n$.

$\forall n \in [\![4, +\infty[\![$, $P(Y=n) = v_{n-1} - v_n$. $\forall n \in [\![4, +\infty[\![$, $c_n = v_{n-1} - v_n$.

Remarque.- La question ajoutée Q4 c) donne immédiatement

$\forall n \in [\![4, +\infty[\![$, $P(Y=n) = P(Y>n-1) - P(Y>n) = v_{n-1} - v_n$.

b) $c_2 = P(Y=2) = 0$ et $v_1 - v_2 = 1 - 1 = 0$. $\underline{\underline{c_2 = v_1 - v_2.}}$

$c_3 = P(Y=3) = P(B_3) = \frac{1}{8}$ et $v_2 - v_3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$. $\underline{\underline{c_3 = v_2 - v_3.}}$

Finalement $\underline{\underline{\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ c_k = v_{k-1} - v_k.}}$

c) Soit $x \in [0,1]$. $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{\underline{\underline{n=2}}}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (v_{n-1} - v_n) x^n$

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} [x\, v_{n-1} x^{n-1} - v_n x^n].$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le v_n x^n \le v_n$ et la série de terme général v_n converge d'après Q4 d). Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $v_n x^n$ converge.

1) cela justifie la définition de h ;

2) cela permet d'écrire : $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} [x v_{n-1} x^{n-1} - v_n x^n] = x \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1} x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n$

Alors $g(x) = x \sum_{\underline{\underline{n=1}}}^{+\infty} v_n x^n - \sum_{\underline{\underline{n=1}}}^{+\infty} v_n x^n + v_1 x = (x-1)h(x) + x$.

$\underline{\underline{\forall x \in [0,1],\ g(x) = (x-1)h(x) + x.}}$

d) $\forall x \in [0,1[$, $\frac{g(x) - g(1)}{x-1} \underset{\uparrow}{=} \frac{g(x) - 1}{x-1} = h(x) + 1$. $\forall x \in [0,1[$, $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = h(x) + 1$.

$g(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1$ d'après Q3 d)

e) Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x \le y$.

$0 \le x \le y$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le x^n \le y^n$ et $v_n \ge 0$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n x^n \le v_n y^n$. Ainsi $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n \le \sum_{n=1}^{+\infty} v_n y^n = h(y)$.

$\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $x \le y \Rightarrow h(x) \le h(y)$; $\underline{\underline{h \text{ est croissante sur } [0,1].}}$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $v_\ell x^\ell \ge 0$ donc $\sum_{\ell=1}^{N} v_\ell x^\ell \le \sum_{\ell=1}^{+\infty} v_\ell x^\ell = h(x)$.

Soit $x \in [0,1]$

h est croissante sur $[0,1]$ donc $h(x) \leq h(1)$.

Ainsi $\forall x \in [0,1]$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{N} v_k x^k \leq h(x) \leq h(1)$

h est croissante sur $[0,1[$ et majorée par $h(1)$.

Par conséquent h admet une limite à gauche en 1. Posons $L = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x)$.

$\forall x \in [0,1[$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{N} v_k x^k \leq h(x) \leq h(1)$.

Alors $\sum_{k=1}^{N} v_k 1^k \leq L \leq h(1)$ et ceci pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{N} v_k \leq L \leq h(1)$. En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient : $h(1) \leq L \leq h(1)$

Ainsi $L = h(1)$. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) = h(1)$. ou $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = h(1)$.

f] $\forall x \in [0,1[$, $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = h(x)+x$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = h(1)+1$

Alors g est dérivable en 1 et $g'(1) = h(1)+1 = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + 1 = 7+1 = 8$.

g est dérivable en 1 et $g'(1) = 8$.

En appliquant (*) légèrement I on peut alors dire que Y possède une espérance qui vaut $g'(1) = 8$.

$E(Y)$ existe et $E(Y) = 8$.

(*) Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et pas dans $\mathbb{N}^*$ ...

Q6

```
function BISKRA: integer;
var k,s:integer;
begin
k:=0; s:=0;
repeat
k:=k+1;
if random(2)=1 then s:=s+1
               else s:=0;
until s = 2;
repeat
k:=k+1;
until random(2)=0;
BISKRA:=k;
end;
```

Pile est codé 1

Face est codé 0

PARTIE III : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Q1 a) Soit $n \in [\![3,+\infty[\![$. $B'_n = F_{n-2}\cap P_{n-1}\cap P_n$, $B'_{n+1} = F_{n-1}\cap P_n\cap P_{n+1}$ et $B'_{n+2} = F_n \cap P_{n+1}\cap P_{n+2}$

B'_n et B'_{n+1} sont incompatibles car P_{n-1} et F_{n-1} ne peuvent se produire simultanément.

B'_{n+1} et B'_{n+2} ——— P_n et F_n ———.

B'_n et B'_{n+2} ——— P_n et F_n ———.

Ainsi pour tout n dans $[\![3,+\infty[\![$, B'_n, B'_{n+1} et B''_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

b) Soit $n \in [\![5,+\infty[\![$.

$$U'_n \cap B'_{n+1} = \bigcup_{i=3}^{n} B'_i \cap B'_{n+1} = \Big[\underbrace{\Big(\bigcup_{i=3}^{n-2} B'_i\Big)}_{U'_{n-2}} \cap B'_{n+1}\Big] \cup \underbrace{(B'_{n-1}\cap B'_{n+1})}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(B'_n \cap B'_{n+1})}_{=\emptyset}.$$

Ainsi $U'_n \cap B'_{n+1} = U'_{n-2}\cap B'_{n+1}$. En particulier $P(U'_n\cap B'_{n+1}) = P(U'_{n-2}\cap B'_{n+1})$.

Or $U'_{n-2} = \bigcup_{i=3}^{n-2} B_i = \bigcup_{i=3}^{n-2} (F_{i-2}\cap P_{i-1}\cap P_i)$ et $B'_{n+1} = F_{n-1}\cap P_n \cap P_{n+1}$.

Les différents tirages étant indépendants U'_{n-2} et B'_{n+1} sont indépendants, ainsi

$P(U'_n \cap B'_{n+1}) = P(U'_{n-2}\cap B'_{n+1}) = P(U'_{n-2})P(B'_{n+1}) = u'_{n-2}\, P(F_{n-1}\cap P_n\cap P_{n+1})$.

Or $P(F_{n-1}\cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; donc $P(U'_n \cap B'_{n+1}) = \frac{1}{8}u'_{n-2}$.

Alors $P(U'_{n+1}) = P(U'_n \cup B'_{n+1}) = P(U'_n)+P(B'_{n+1}) - P(U'_n\cap B'_{n+1}) = u'_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u'_{n-2}$.

Ceci donne alors $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1-u'_{n-2})$ pour tout $n\in[\![5,+\infty[\![$.

$u'_3 = P(B'_3) = \frac{1}{8}$. $u'_4 = P(B'_3\cup B'_4) = P(B'_3)+P(B'_4) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

B'_3 et B'_4 sont incompatibles

Alors $u'_3 + \frac{1}{8}(1-u'_1) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}(1-0) = \frac{1}{4} = u'_4$; $u'_4 = u'_3 + \frac{1}{8}(1-u'_1)$.

$u'_5 = P(B'_3\cup B'_4\cup B'_5) = P(B'_3)+P(B'_4)+P(B'_5) = 3\times\frac{1}{8} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}(1-0) = u'_4 + \frac{1}{8}(1-u'_2)$.

B'_3, B'_4 et B'_5 sont deux à deux incompatibles

$u'_5 = u'_4 + \frac{1}{8}(1-u'_2)$.

Finalement $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1-u'_{n-2})$.

c] De plus $u'_1 = u_1 = 0$, $u'_2 = u_2 = 0$ et $u'_3 = u_3 = \frac{1}{8}$.

Alors une simple récurrence "d'ordre 3" montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u'_n = u_n$.

Ainsi les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(u'_n)_{n\geq 1}$ sont égales.

d] Le cours montre que $P(\bigcup_{i=3}^{+\infty} B'_i) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{i=3}^{n} B'_i) = \lim_{n\to+\infty} P(U'_n) = \lim_{n\to+\infty} u'_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Ainsi $P(Y'=0) = P(\overline{\bigcup_{i=3}^{+\infty} B'_i}) = 1 - P(\bigcup_{i=3}^{+\infty} B'_i) = 1-1 = 0$. $P(Y'=0) = 0 = P(Y=0)$.

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $P(Y'\leq n) = P(\{Y'=0\} \cup U'_n) = P(Y'=0) + P(U'_n) = 0 + u'_n = u'_n$.

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $P(Y'\leq n) = u'_n$; mieux $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $P(Y'\leq n) = u'_n$.

Alors $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $P(Y'=n) = P(Y'\leq n) - P(Y'\leq n-1) = u'_n - u'_{n-1} = u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n$

Donc $\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $P(Y'=n) = P(Y=n)$.

Y et Y' ont donc même loi. Or $E(Y)$ existe et vaut 8 ; par conséquent

Y' possède une espérance qui vaut 8.

(Q2) a] $g_3 = P(G_3) = P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

$g_4 = P(G_4) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Soit $n \in [\![4,+\infty[\![$. Clairement si $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ se réalise

alors le joueur J gagne au rang n ; $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \subset G_n$.

Réciproquement supposons G_n réalisé. Alors J gagne à l'issue du $n^{\text{ième}}$ lancer.

1) P_{n-2}, P_{n-1} et F_n sont réalisés.

2) Supposons que l'on ait obtenu un face avant le $(n-2)^{\text{ième}}$ lancer.

alors

Notons j le rang du dernier face parmi les $n-3$ premiers lancers.

F_j est réalisé ainsi que P_{j+1} et P_{j+2} ; J a donc gagné au plus tard à l'issue du $(j+2)^{\text{ème}}$ lancer et $j+2 \leq n-1$; ceci contredit le fait que J gagne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer.

Finalement les $n-3$ premiers lancers n'ont donné aucun face.

Ainsi $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-3} \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ est réalisé.

Par conséquent $G_n \subset P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.

Ceci achève de montrer que $G_n = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.

Alors $P(G_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ... pour $n \geq 4$. Or $P(G_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Ainsi $\forall n \in [\![3, +\infty[\![$, $\underline{\underline{q_n = P(G_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}}$.

b) Soit G^J l'événement le joueur J gagne.

$P(G^J) = P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} G_n\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(G_n)$ par incompatibilité.

$$P(G^J) = \sum_{n=3}^{+\infty} q_n = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{1-1/2}.$$

$P(G^J) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1/2} = \frac{1}{4}$.

<u>La probabilité pour que le joueur J soit déclaré gagnant est $\frac{1}{4}$.</u>

Q3 a) $d_1 = 1$! $d_2 = P(\overline{P_1 \cap P_2}) = 1 - P(P_1 \cap P_2) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

b) Observons que $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ est un système complet d'événements.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons D_n l'événement lors des n premiers lancers on n'obtient pas deux piles consécutifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule des probabilités totales donne :

$$P(D_{n+2}) = P(F_1)\, P_{F_1}(D_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2)\, P_{P_1 \cap F_2}(D_{n+2}) + P(P_1 \cap P_2)\, P_{P_1 \cap P_2}(D_{n+2})$$

Notons que $P(F_1) = \frac{1}{2}$, $P(P_1 \cap F_2) = \frac{1}{4}$ et $P_{P_1 \cap P_2}(D_{n+2}) = 0$ car $n+2 \geq 3$!

Alors $P(D_{n+2}) = \frac{1}{2} P_{F_1}(D_{n+2}) + \frac{1}{4} P_{P_1 \cap F_2}(D_{n+2})$.

Supposons F_1 réalisé. D_{n+2} se réalise si et seulement si l'on n'obtient pas deux piles consécutifs au cours des $n+1$ lancers qui suivent le premier ; ainsi
$P_{F_1}(D_{n+2}) = P(D_{n+1}) = d_{n+1}$.

Supposons $P_1 \cap F_2$ réalisé. D_{n+2} se réalise si et seulement si l'on n'obtient pas deux piles consécutifs au cours des n lancers qui suivent les deux premiers ; ainsi

$P_{P_1\cap F_2}(D_{n+2}) = P(D_n) = d_n$.

Finalement $d_{n+2} = P(D_{n+2}) = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n$.

c) $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{3}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n$.

$(d_n)_{n\geq 1}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 dont l'équation caractéristique $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 = \frac{1}{2} z + \frac{1}{4}$ admet deux racines réelles $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ $\left(\dots \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - 4(-\frac{1}{4})}}{2} \dots\right)$

Alors $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$

Remarque. Avec $d_1 = 1$ et $d_2 = \frac{3}{4}$ on obtient sans difficulté $\alpha = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ et $\beta = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$.

d) $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right| < 1$ et $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right| < 1$ donc les séries de termes généraux $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$ convergent.

Alors la série de terme général d_n converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_{n+2}$. Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+2} = S - d_1 - d_2 = S - 1 - \frac{3}{4} = S - \frac{7}{4}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+1} = S - d_1 = S - 1$.

Alors $S - \frac{7}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \frac{1}{2}(S-1) + \frac{1}{4}S$.

Donc $S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}S = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$; $\frac{1}{4}S = \frac{5}{4}$; $S = 5$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5.$$

e) Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\{Z > n\} = D_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z>n) = d_n$.
Comme la série de terme général d_n converge, la série de terme général $P(Z>n)$ converge. Alors $E(Z)$ possède une espérance qui vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Z>n) = P(Z>0) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 1+5 = 6$.

<u>Z possède une espérance qui vaut 6.</u>

<u>Rappel</u>... Si la probabilité d'obtenir pile est p : $E(Z) = \frac{1+p}{p^2}$ ... et si l'on attend r piles consécutifs l'espérance est $\frac{1-p^r}{q p^r}$ $(q = 1-p)$.

(Q4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Montrons que $\{T>n\} \cup \{T=0\} = D_n \cup (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n)$.

- Si D_n est réalisé il n'y a pas eu deux piles consécutifs au cours des n premiers lancers donc il n'y a pas eu de vainqueur au cours des n premiers lancers. Ainsi $\{T>n\} \cup \{T=0\}$ est réalisé.
- Si $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n$ est réalisé il n'y a pas eu de vainqueur au cours des n premiers lancers donc $\{T>n\} \cup \{T=0\}$ est réalisé.

Finalement $D_n \cup (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n) \subset \{T>n\} \cup \{T=0\}$.

- <u>Réciproquement</u> supposons $\{T>n\} \cup \{T=0\}$.

<u>1er cas</u>... Les n premiers lancers n'ont pas donné deux piles consécutifs. Alors D_n est réalisé.

<u>2ème cas</u>... Les n premiers lancers ont donné deux piles consécutifs. Montrons alors que l'événement $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n$ se réalise.

Notons j le rang où pour la première fois on obtient deux piles consécutifs.
$j \in [\![2, n]\!]$.
Supposons $j \geqslant 3$. Alors $F_{j-2} \cap P_{j-1} \cap P_j$ est réalisé et il n'y a pas eu deux piles consécutifs avant le $(j-2)^{ième}$ lancer donc J gagne au rang j et T prend la valeur j. Ceci est impossible. Par conséquent $j = 2$.
Les deux premiers lancers sont donc des piles. Notons s la longueur de la première séquence de pile au cours des n premiers lancers, $s \geqslant 2$.
Supposons $s < n$. Alors l'événement $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_s \cap F_{s+1}$ est réalisé. C'est alors J qui gagne au $(s+1)^{ième}$ lancer ; ceci est impossible car $s+1 \leqslant n$!
Finalement $s = n$ et ainsi $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n$ est réalisé.
Par conséquent si $\{T=0\} \cup \{T>n\}$ est réalisé, ou D_n est réalisé ou $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n$ est réalisé.
Donc $\{T=0\} \cup \{T>n\} \subset D_n \cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n)$.

Finalement $\underline{\{T=0\} \cup \{T>n\} = D_n \cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n)}$.

D_n et $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n$ sont incompatibles ($n \geqslant 2$ ...)

Alors $P(\{T=0\} \cup \{T>n\}) = P(D_n) + P(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n)$.

Donc $P(\{T=0\} \cup \{T>n\}) = d_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\underline{\underline{P(\{T=0\} \cup \{T>n\}) = \frac{1}{2^n} + d_n}}$.

⚠ cette formule ne vaut pas pour $n = 1$ car $\frac{1}{2} + d_1 = \frac{3}{2}$!

b) Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$.

$\{T=0\} \cup \{T>n\} \cup \{T=n\} = \{T=0\} \cup \{T>n-1\}$ et

$(\{T=0\} \cup \{T>n\}) \cap \{T=n\} = \emptyset$.

Alors $P(\{T=0\} \cup \{T>n\} \cup \{T=n\}) = P(\{T=0\} \cup \{T>n\}) + P(T=n)$ et

$P(\{T=0\} \cup \{T>n\} \cup \{T=n\}) = P(\{T=0\} \cup \{T>n-1\})$.

Ainsi $P(T=n) = P(\{T=0\} \cup \{T > n-1\}) - P(\{T=0\} \cup \{T > n\})$.

$$\underset{n \geq 3}{P(T=n)} = \frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \left(\frac{1}{2^n} + d_n\right) = (2-1) \times \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n.$$

$\forall n \in [\![3,+\infty[\![$, $P(T=n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.

c) $T(\Omega) = \{0\} \cup [\![3,+\infty[\![$.

L'événement l'un des joueurs est déclaré gagnant est l'événement $\{T \neq 0\}$ ou $\bigcup_{n=3}^{+\infty} \{T=n\}$.

$(\{T=n\})_{n \geq 3}$ étant une suite d'événements deux à deux disjoints :

$$P(T \neq 0) = P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} \{T=n\}\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(T=n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n\right).$$

Les séries de termes généraux $\frac{1}{2^n}$, d_{n-1} et d_n étant convergentes :

$$P(T \neq 0) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+3}} + d_2.$$

$$P(T \neq 0) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1. \quad P(T \neq 0) = 1$$

<u>La probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.</u>

<u>Remarque</u> : <u>$P(T=0) = 0$.</u>

d) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. $\frac{1}{2^n} + d_n = P(\{T > n\} \cup \{T=0\}) \overset{\text{événements incompatibles}}{=} P(T > n) + P(T=0)$.

Or $P(T=0)$ donc $P(T > n) = \frac{1}{2^n} + d_n$. Comme les séries de termes généraux $\frac{1}{2^n}$ et d_n convergent la série de terme général $P(T > n)$ converge.

Ainsi T possède une espérance qui vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.

$$E(T) = P(T\geq 0) + P(T\geq 1) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + d_n\right) = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{+\infty} d_n$$

$$E(T) = 2 + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n - d_1\right) = 2 + \frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 5 - 1$$

$$E(T) = 2 + \frac{1}{2} + 4 = \frac{13}{2}. \quad \underline{E(T) = \frac{13}{2}.}$$

Q5 Notons $G^{J'}$ l'événement le joueur J' est déclaré gagnant.
$G^J \cup G^{J'} = \{T\neq 0\}$ et $G^J \cap G^{J'} = \emptyset$.

Alors $1 = P(T\neq 0) = P(G^J) + P(G^{J'}) = \frac{1}{4} + P(G^{J'})$; $P(G^{J'}) = \frac{3}{4}$.

<u>La probabilité que le joueur J' soit déclaré gagnant est $\frac{3}{4}$.</u>

<u>Conclusion 1</u>.. le joueur J' possède un net avantage sur J ! Pourtant le temps d'attente de "pile, pile, face" suit la même loi que le temps d'attente de "face, pile, pile".
<u>Conclusion 2</u>.. Le Walter devait vachement s'embêter en 1969 (1968+1) avec ses chèvres sur le Larzac pour s'intéresser à ce type d'âneries.

Q6 Ici les deux configurations se déduisent l'une de l'autre en changeant pile en face et face en pile. La pièce étant équilibrée, le jeu aussi !

<u>Donc ce cas la probabilité pour que J gagne est la même que la probabilité pour que J' gagne.</u>

Q7 Notons encore ici que d est bien définie sur $[0,1]$ car
1) $\forall x\in[0,1]$, $0\leq d_n x^n \leq d_n$ et 2) la série de terme général d_n converge.

<u>a)</u> Soit $x\in[0,1]$. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n)x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} P(T=n)x^n$

D'après Q4 b : $f(x) = \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n\right)x^n = \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n + d_{n-1}x^{n-1}x - d_n x^n\right)$

Les séries de termes généraux $\left(\frac{x}{2}\right)^n$, $d_{n-1}x^{n-1}$ et $d_n x^n$ convergent car $x \in [0,1]$

Ainsi $t(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n + x \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1}x^{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n$.

$t(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \frac{1}{1 - x/2} + x\,(d(x) - d_1 x) - (d(x) - d_2 x^2 - d_1 x)$. Rappel : $d_1 = 1$ et $d_2 = \frac{3}{4}$.

$t(x) = \frac{x^3}{4} \frac{1}{2-x} + (x-1)d(x) - x^2 + \frac{3}{4} x^2 + x$.

$t(x) = \frac{x^2}{4}\left[\frac{x}{2-x} - 1\right] + (x-1)d(x) + x = \frac{x^2}{4} \frac{2(x-1)}{2-x} + (x-1)d(x) + x$.

Finalement $\forall x \in [0,1]$, $t(x) = (x-1)\left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)}\right) + x$.

b) $t(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n) = P(T \neq 0) = 1$. Soit $x \in [0,1[$.

$\frac{t(x) - t(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\left[(x-1)\left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)}\right) + x - 1\right] = d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1$.

$\forall x \in [0,1[$, $\frac{t(x) - t(1)}{x-1} = d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1$.

c) d est croissante et $\forall x \in [0,1]$, $d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$

Donc d est croissante et majorée sur $[0,1]$. Alors d possède une limite ℓ à gauche en 1. Montrons que $\ell = d(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$.

Soit $x \in [0,1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{n=1}^{N} d_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = d(1)$, $\sum_{n=1}^{N} d_n x^n \leq d(x) \leq d(1)$

En faisant tendre x vers 1 il vient $\sum_{n=1}^{N} d_n \leq \ell \leq d(1)$

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \leq \ell \leq d(1)$ donc $\ell = d(1)$.

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} d(x) = d(1) = 5$.

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left(\varphi(x) + \dfrac{x^2}{2(1-x)} + 1 \right) = \varphi(1) + \dfrac{1}{2} + 1 = 5 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{13}{2}.$

Alors f est dérivable à gauche en 1 et $f'(1) = \dfrac{13}{2}$.

Alors E(T) existe et vaut $\dfrac{13}{2}$ ... comme annoncé.

PARTIE IV : Simulation informatique.

•••

Q1 a)

r		1	1	1	1	0
x	0	1	2	2	2	3
y	0	0	0	0	0	1
k	0	1	2	3	4	5

On obtient :

PPPPF

J gagne au 5ème lancer.

b)

r		1	0	1	0	0	0	1	1
x	0	1	0	1	0	0	0	1	2
y	0	0	1	2	1	1	1	2	3
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8

On obtient

PFPFFFPP

J' gagne au 8ème lancer.

c)

r		0	1	0	1	0	1	1
x	0	0	1	0	1	0	1	2
y	0	1	2	1	2	1	2	3
k	0	1	2	3	4	5	6	7

On obtient

FPFPFPP

J' gagne au 7ème lancer.

Q2 On considère que si r prend la valeur 0 (resp. 1) on obtient face (resp. pile)

• k représente le nombre de lancers effectués pour obtenir un vainqueur

•• A la place des premiers (resp. second) pointillé on écrit J gagne (resp. J' gagne)

•••