Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucune connaissance n'est nécessaire sur les intervalles de confiance. Le tout est très long il faut donc travailler, vite et bien. Avant tout je veux une combativité d'enfer.

On pourra utiliser sans preuve le résultat classique concernant $Y = aX + b$ (resp. $Y = X^2$) lorsque X est une variable aléatoire à densité.

Sauf mention du contraire les variables aléatoires du texte sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et si X est une telle variable aléatoire nous noterons le plus souvent F_X sa fonction de répartition.

I GÉNÉRALITÉS SUR LES LOIS BÊTA DE PREMIÈRE ESPÈCE.

Q1 α et β sont deux réels.

Montrer que $B(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Q2 α et β sont deux réels strictement positifs.

a) Montrer que $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

b) Exprimer $B(\alpha, \beta + 1)$ en fonction de $B(\alpha + 1, \beta)$.

c) Montrer que $B(\alpha + 1, \beta) + B(\alpha, \beta + 1) = B(\alpha, \beta)$.

d) Montrer alors que $B(\alpha + 1, \beta) = \dfrac{\alpha}{(\alpha + \beta)}\, B(\alpha, \beta)$.

Q3 p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$. Montrer que $B(p + 1, q + 1) = \dfrac{p!\,q!}{(p + q + 1)!}$.

Q4 (α, β) est un élément de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$. $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha, \beta)}\, t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1} & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire qui admet $f_{\alpha,\beta}$ pour densité suit **une loi bêta de première espèce, de paramètres α et β.**

b) X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant pour densité $f_{\alpha,\beta}$ et r est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que X possède un moment d'ordre r et l'exprimer en fonction de r, α et β.

Calculer alors $E(X)$ et $V(X)$.

Q5 **Où nous redémontrons un résultat de cours et un peu plus...**

α et β sont deux réels strictement positifs. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$ et $Y \hookrightarrow \gamma(\beta)$. On note f_X (resp. f_Y) la densité de X (resp. Y) nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

On considère la fonction $h : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que h est définie et nulle sur $]-\infty, 0]$.

b) x est un réel strictement positif. Montrer que $\displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1}\,(x-u)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u$ existe et vaut $x^{\alpha+\beta-1}\,B(\alpha,\beta)$.

En déduire que h est définie en x et que $h(x) = \dfrac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, e^{-x}\, x^{\alpha+\beta-1}$.

c) Montrer alors que $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et que h en est une densité.

d) Établir alors que : $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

II QUELQUES ILLUSTRATIONS

Ces trois questions sont totalement indépendantes

Q1 **Du concret 1** n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. n clients numérotés de 1 à n ont réservé indépendamment les uns des autres, chacun une table dans un restaurant.

Chaque client est censé arriver entre 20h et 21h. Pour tout i dans X_i est la variable aléatoire égale au temps d'attente après 20 h du client numéro i.

On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

r est un élément de $[\![1, n]\!]$. On note Y_r la variable aléatoire égale au temps d'attente après 20 h du $r^{\text{ème}}$ client (qui n'a aucune raison d'être le client numéro r !). Notons que Y_r prend ses valeurs dans $[0,1]$. On note F_r la fonction de répartition de Y_r.

a) Montrer que $\forall t \in [0,1],\ F_r(t) = \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ (on pourra introduire une variable aléatoire qui suit une loi binômiale). Achever la détermination de F_r.

Vérifier que $\forall t \in]0,1[,\ F_r'(t) = r\dbinom{n}{r}\, t^{r-1}\,(1-t)^{n-r}$ (et pas plus ! !). *Ceci a été ajouté après écriture de la correction.*

b) Montrer que Y_r est une variable aléatoire à densité qui suit une loi bêta de première espèce dont on précisera les paramètres. Donner l'espérance de Y_r.

► **AUJOURD'HUI Q2 N'EST PAS À FAIRE** **et n'est pas utile pour la suite. On passe à Q3**

Q2 **Du concret 2** n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et r est un élément de $[\![0, n-1]\!]$. Le contrôle d'embarquement des voitures de la SNCM dans le port de Nice est constitué de n postes.

Une voiture A se présente au contrôle. Tous les postes sont occupés et r voitures attendent déjà. On suppose que :

- L'intant 0 est l'instant où la voiture arrive au contrôle ;
- Chaque contôle prend a minutes ($a > 0$) ;
- les instants des débuts des contrôles des n voitures qui occupent les postes sont des variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, ..., X_n qui suivent une loi uniforme sur $[-a, 0]$.

On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente de la voiture A avant de passer son contrôle.

a) t est un élément de $[0, a[$. Préciser la loi de la variable aléatoire Z_t égale au nombre de postes qui se libèrent pour la première fois avant l'instant t. En déduire $F_T(t)$. Achever la détermination de F_T.

b) Montrer que T est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Montrer que $\dfrac{1}{a}T$ suit une loi Bêta de première espèce. Calculer $E(T)$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ **Statistique d'ordre.** X est une variable aléatoire à densité dont on note F la fonction de répartition et f une de ses densités. n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et r un élément de $[\![1,n]\!]$.

X_1, X_n, ..., X_n sont n variables aléatoires, sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, indépendantes et de même loi que X. Autrement dit $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est un n-échantillon indépendant identiquement distribué de la loi X.

Pour tout élément ω de Ω on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ..., $X_n(\omega)$. On obtient une suite croissante $(X_{i_1}(\omega),X_{i_2}(\omega),\dots,X_{i_n}(\omega))$ et on pose $Y_r(\omega)=X_{i_r}(\omega)$.

On admet que l'application Y_r, de Ω dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément ω de Ω associe $Y_r(\omega)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Notons que $\forall\omega\in\Omega,\ Y_1(\omega)=\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Min}}X_i(\omega)$ et $\forall\omega\in\Omega,\ Y_n(\omega)=\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Max}}X_i(\omega)$.

a) Trouver la fonction de répartition F_r de Y_r.

b) Montrer que Y_r est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction :

$$f_r\ :\ t\to r\binom{n}{r}f(t)\left(F(t)\right)^{r-1}\left(1-F(t)\right)^{n-r}.$$

c) On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que Y_r suit une loi bêta de première espèce dont on précisera les paramètres. Donner l'espérance de $E(Y_r)$.

III GÉNÉRALITÉS SUR LES LOIS BÊTA DE DEUXIÈME ESPÈCE.

► **AUJOURD'HUI Q1 N'EST PAS À FAIRE et on admet ces deux résultats classiques.**

Si S est une variable aléatoire à densité et si f_S en est une densité définie sur $\mathbb{R}: T=e^S$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f_T définie par $\forall t\in\mathbb{R},\ f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}f_S(\ln t) & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Si T est une variable aléatoire à densité prenant presque sûrement (pléonasme...) ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et si f_T en est une densité définie sur $\mathbb{R}: S=\ln T$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f_S définie par $\forall t\in\mathbb{R},\ f_S(t)=e^t f_T(e^t)$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ a) Soit S une variable aléatoire à densité et f_S une densité de S définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $T=e^S$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité en fonction de f_S.

b) Soit T une variable aléatoire à densité prenant presque sûrement (pléonasme...) ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et f_T une de ses densités définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $S=\ln T$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité en fonction de f_T.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ α et β sont deux réels strictement positifs. X est une variable aléatoire à densité qui suit la loi Bêta de première espèce de paramètres α et β. On considère la variable aléatoire $Y=\dfrac{X}{1-X}$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $g_{\alpha,\beta}$ définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ g_{\alpha,\beta}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\,\dfrac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

(on pourra commencer par une étude rapide de $t \to \dfrac{t}{1-t}$ sur $]0,1[$).

On dit qu'une variable aléatoire qui admet $g_{\alpha,\beta}$ pour densité suit **une loi bêta de deuxième espèce, de paramètres α et β.**

b) Énoncer avec précision le théorème de transfert pour les variables aléatoires à densité.

Soit r un élément de $\mathbb{N}^*$. Étudier l'existence de $E(Y^r)$ et montrer que cette espérance vaut $\dfrac{B(\alpha+r,\beta-r)}{B(\alpha,\beta)}$ lorsqu'elle existe.

c) Étudier l'existence de $E(Y)$ et $V(Y)$ et en donner les valeurs (en fonction de α et β) en cas d'existence.

Q3 α et β sont deux réels strictement positifs. U et V sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $U \hookrightarrow \gamma(\alpha)$ et $V \hookrightarrow \gamma(\beta)$.

a) Montrer que $S = \ln U - \ln V$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction f_S définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^{\alpha\, x}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u\,(e^x+1)}\, u^{\alpha+\beta-1}\,\mathrm{d}u$.

Montrer sans calcul que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_S(x) = \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\, \dfrac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^{\alpha+\beta}}$.

b) En déduire que $\dfrac{U}{V}$ suit la loi Bêta de deuxième espèce de paramètres α et β .

c) a et b sont deux réels strictement positifs. U' et V' sont deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que $U' \hookrightarrow \Gamma(a,\alpha)$ et $V' \hookrightarrow \Gamma(b,\beta)$.

Utiliser b) et un résultat classique de "cours" pour montrer que $\dfrac{U'}{V'}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h nulle sur $]-\infty,0]$ et telle que :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ h(t) = \frac{a^\beta\, b^\alpha}{B(\alpha,\beta)}\, \frac{t^{\alpha-1}}{(a+b\,t)^{\alpha+\beta}}.$$

Étudier l'existence de $E\left(\dfrac{U'}{V'}\right)$ et en donner la valeur en cas d'existence.

IV LOI DU χ^2 ET LOI DE STUDENT

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite.

On note Φ la fonction de répartition de ces variables aléatoires. On rappelle que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Q1 a) Montrer que X_1^2 suit la loi gamma de paramètres 2 et $\dfrac{1}{2}$.

Notons qu'il en est alors de même pour X_n^2 et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

b) n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Donner la loi de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$. C'est **la loi du Chi-deux (ou du Khi-deux) à n degrés de liberté**. On écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \chi^2(n)$.

Donner la loi de $M_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $Q_n = \dfrac{X_0}{\sqrt{M_n}}$.

On admet que Q_n est une variable aléatoire et que Q_n et $-Q_n$ ont même loi (normal dans la mesure où X_0 et $-X_0$ ont même loi...)

a) En utilisant III Q3 c) donner une densité pour Q_n^2. Montrer alors que $|Q_n|$ est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(Q_n = x) = 0$. Exprimer la fonction de répartition de Q_n en fonction de celle de $|Q_n|$.

$\left(\forall x \in [0, +\infty[, F_{Q_n}(x) = \dfrac{1}{2}\Big(1 + F_{|Q_n|}(x)\Big) \text{ et } \forall x \in]-\infty, 0[, F_{Q_n}(x) = \dfrac{1}{2}\Big(1 - F_{|Q_n|}(-x)\Big)\right)$

En déduire que Q_n est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction φ_n définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

On dit que Q_n suit la **loi de Student à n degré de liberté** et on écrit $Q_n \hookrightarrow t(n)$

c) $r \in \mathbb{N}$. Étudier l'existence de $E(Q_n^r)$.

d) Étudier l'existence de $E(Q_n)$ et $V(Q_n)$ et en donner les valeurs en cas d'existence (on pourra pour la variance utiliser III Q3 c)).

► **AUJOURD'HUI Q3 N'EST PAS À FAIRE et n'est pas utile pour la suite.**

$\boxed{\textbf{Q3}}$ a) n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $P(|M_n - 1| \geqslant n^{-\frac{1}{3}}) \leqslant 2\,n^{-\frac{1}{3}}$.

b) x est un réel strictement positif et n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. On pose $A = \left\{X_0 \leqslant x\sqrt{1 + n^{-\frac{1}{3}}}\right\}$.

Montrer que l'événement $\{Q_n \leqslant x\} \cap \overline{A}$ est contenu dans l'événement $\{|M_n - 1| \geqslant n^{-\frac{1}{3}}\}$.

En utilisant le système complet d'événements $(A, \overline{A})$ montrer que :

$P(Q_n \leqslant x) \leqslant P\left(X_0 \leqslant x\sqrt{1 + n^{-\frac{1}{3}}}\right) + 2\,n^{-\frac{1}{3}} = \Phi\left(x\sqrt{1 + n^{-\frac{1}{3}}}\right) + 2\,n^{-\frac{1}{3}}$.

Montrer que $P(Q_n \leqslant x) \geqslant (1 - 2\,n^{-\frac{1}{3}})\,P\left(X_0 \leqslant x\sqrt{1 - n^{-\frac{1}{3}}}\right) = (1 - 2\,n^{-\frac{1}{3}})\,\Phi\left(x\sqrt{1 - n^{-\frac{1}{3}}}\right)$.

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(Q_n \leqslant x) = \Phi(x)$. Morale ?

V INTERVALLE DE CONFIANCE POUR L'ESPÉRANCE ET LA VARIANCE D'UNE LOI NORMALE

Dans les questions 1 et 2 n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$

Q1 On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On pose $A = I_n - \dfrac{1}{n}\,J$.

a) Montrer l'existence d'une matrice orthogonale $P = (p_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- ${}^tPJP = P^{-1}JP = \mathrm{Diag}(0,0,\dots,0,n)$.
- $\forall j \in [\![1,n-1]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j} = 0$.
- $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_{i,n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Vérifier que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$ où $D = \mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0)$. On pose ${}^tP = (q_{i,j})$.

Vérifier que $\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} = 0$ et que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_{i,k}^2 = 1$. Préciser $q_{n,j}$ pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$.

b) Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\mu = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V = {}^tPU = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$ (on pourra considérer ${}^tVV$).

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) - n\,\mu^2 = \sum_{i=1}^{n} (u_i-\mu)^2$.

Q2 X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, qui suivent la loi normale d'espérance m et de variance σ^2 ($\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$).

On pose $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_n = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X}_n)^2}$ et $T_n = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X}_n)^2$.

Notons que $S_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X}_n)^2$

On pose encore : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ Z_i = \dfrac{X_i-m}{\sigma}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ Y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\,Z_j$ (rappelons que ${}^tP = (q_{i,j})$).

a) Montrer que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, Y_i suit la loi normale centrée réduite.

b) Montrer que $Y_n = \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = T_n = \dfrac{(n-1)\,S_n^2}{\sigma^2}$ (on pourra utiliser Q1.)

Les variables qui interviennent suivent des lois normales... On admet alors que l'indépendance de X_1, X_2, ..., X_n, donc de Z_1, Z_2, ..., Z_n, et l'orthogonalité de P donne l'indépendance de Y_1, Y_2, ..., Y_n.

c) Montrer que T_n suit la loi du Chi-deux à $n-1$ degrés de liberté et que $\dfrac{\overline{X_n}-m}{\sqrt{S_n^2/n}}$ suit la loi de Student à $n-1$ degré de liberté.

Q3 α est un élément de $]0,1[$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale d'espérance m et de variance σ^2 ($\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$).

On se propose de construire un intervalle de confiance de m à la confiance $1-\alpha$ à l'aide de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et des résultats de Q2 dont on reprend les notations.

a) On note, pour simplifier, F_n la fonction de répartition d'une variable alétaoire qui suit la loi de Student à n degré de liberté. On rappelle que φ_n est une densité d'une telle variable aléatoire.

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ F_n(-t) = 1 - F_n(t)$.

Montrer qu'il existe un réel et un seul $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ tel que $F_n\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\big) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}\cdot$ Montrer que $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ est strictement positif

b) On suppose $n \in [\![2, +\infty[\![$ Montrer que $P\left(m \in \left[\overline{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\,\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\,\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 1-\alpha$ (on pourra poser $z = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ pour facilité les écritures).

Ainsi $\left[\overline{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\,\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\,\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de m à la confiance $1-\alpha$ ou au risque α.

Q4 α est un élément de $]0,1[$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale d'espérance m et de variance σ^2 ($\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$).

On se propose de construire un intervalle de confiance de σ^2 à la confiance $1-\alpha$ à l'aide de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et des résultats de Q2 dont on reprend les notations.

a) On note G_n la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi du Chi-deux à n degré de liberté.

Soit ε un réel appartenant à $]0,1[$. Montrer qu'il existe un réel strictement positif et un seul $\chi^2_\varepsilon(n)$ tel que :

$G_n\big(\chi^2_\varepsilon(n)\big) = \varepsilon$.

b) On suppose que $n \in [\![2, +\infty[\![$. Montrer que $P\left(\sigma^2 \in \left[\dfrac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]\right) \geqslant 1-\alpha$.

Alors $\left[\dfrac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 à la confiance $1-\alpha$ ou au risque α.

La correction est donnée en deux fascicules (38 pages...)

Le tout n'est pas un problème de concours. C'est de la cuisine maison faite à partir de séquences de problèmes de concours, d'exercices d'oraux et un peu plus...)
