I GENERALITÉS SUR LES LOIS BÊTA DE PREMIÈRE ESPÈCE

Q1 Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Posons $\forall t\in]0,1[$, $u_{\alpha,\beta}(t)=t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$. $u_{\alpha,\beta}$ est continue sur $]0,1[$.

▲ • $u_{\alpha,\beta}(t)\underset{0}{\sim} t^{\alpha-1}=\dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$.

• $\forall t\in]0,1[$, $u_{\alpha,\beta}(t)\geqslant 0$

• $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ converge si et seulement si $1-\alpha<1$ ou si et seulement si $\alpha>0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{1/2}u_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dt}{t^{1-\alpha}}$. Donc $\displaystyle\int_0^{1/2}u_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha>0$.

▲ • $u_{\alpha,\beta}(t)\underset{1}{\sim}(1-t)^{\beta-1}=\dfrac{1}{(1-t)^{1-\beta}}$

• $\forall t\in]0,1[$, $u_{\alpha,\beta}(t)\geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_{1/2}^1 u_{\alpha,\beta}(t)dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1\frac{1}{(1-t)^{1-\beta}}dt$ sont de même nature.

Or $\displaystyle\int_{1/2}^1\frac{dt}{(1-t)^{1-\beta}}$ converge si et seulement si $1-\beta<1$ ou si et seulement si $\beta>0$.

Donc $\displaystyle\int_{1/2}^1 u_{\alpha,\beta}(t)dt$ converge si et seulement si $\beta>0$.

Alors $\underline{\underline{B(\alpha,\beta)}}=\underline{\underline{\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}}$ $\underline{\underline{\text{converge si et seulement si }\alpha>0\text{ et }\beta>0.}}$

Q2 a) $t\mapsto 1-t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $v=1-t$ dans ce qui suit.

Soit $(a,b)\in]0,1[^2$. $\displaystyle\int_a^b u_{\alpha,\beta}(t)dt=\int_{1-a}^{1-b}(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}(-dv)=\int_{1-b}^{1-a}(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}dv$.

$\displaystyle\lim_{a\to 0}(1-a)=1$ et $\displaystyle\lim_{b\to 1}(1-b)=0$ donc $\displaystyle\int_0^1 u_{\alpha,\beta}(t)dt=\int_0^1 u_{\beta,\alpha}(v)\,dv$ (les deux intégrales existant).

Donc $\underline{\underline{B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha).}}$

b) Soit $(a,b)\in]0,1[^2$. Une intégration par parties permet de montrer que

$$\int_a^b t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt=\left[t^{\alpha}\left[-\frac{(1-t)^{\beta}}{\beta}\right]\right]_a^b-\int_a^b\alpha t^{\alpha-1}\left[-\frac{(1-t)^{\beta}}{\beta}\right]dt$$

$$\int_a^b t^\alpha(1-t)^{\beta-1}dt = -\frac{1}{\beta}\, b^\alpha(1-b)^\beta + \frac{1}{\beta}a^\alpha(1-a)^\beta + \frac{\alpha}{\beta}\int_a^b t^{\alpha-1}(1-t)^\beta dt.$$

$\lim\limits_{b\to 1}\left(-\frac{1}{\beta}b^\alpha(1-b)^\beta\right) = \lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{1}{\beta}a^\alpha(1-a)^\beta\right) = 0$. En faisant tendre a vers 0 et b vers 1 il vient alors $B(\alpha+1,\beta) = \int_0^1 t^\alpha(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^\beta dt = \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta+1)$.

Donc $\underline{\underline{B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta+1)}}$. et $\underline{\underline{B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)}}$.

c] $B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1) = \int_0^1 t^\alpha(1-t)^{\beta-1}dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^\beta dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}[t+(1-t)]\,dt = B(\alpha,\beta)$.

$\underline{\underline{B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1) = B(\alpha,\beta)}}$.

d] $B(\alpha,\beta) = B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1) \overset{b]}{=} B(\alpha+1,\beta) + \frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)$.

Ainsi $\underline{\underline{B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)}}$.

Q3 Soit $q\in\mathbb{N}$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ B(p+2,q+1) = \frac{p+1}{p+q+2}B(p+1,q+1)$; $\forall p\in\mathbb{N},\ (p+q+2)B(p+2,q+1) = (p+1)B(p+1,q+1)$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ (p+q+2)\times\frac{(p+q+1)!}{(p+1)!}\times B(p+2,q+1) = \frac{(p+q+1)!}{(p+1)!}(p+1)\,B(p+1,q+1)$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ \frac{(p+q+2)!}{(p+1)!}B(p+2,q+1) = \frac{(p+q+1)!}{p!}B(p+1,q+1)$.

Ainsi la suite $\left(\frac{(p+q+1)!}{p!}B(p+1,q+1)\right)_{p\geq 0}$ est constante.

$\forall p\in\mathbb{N},\ \frac{(p+q+1)!}{p!}B(p+1,q+1) = \frac{(q+1)!}{0!}B(1,q+1)$; $B(p+1,q+1) = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}B(1,q+1)$.

$B(1,q+1) = \int_0^1(1-t)^q dt = \left[-\frac{1}{q+1}(1-t)^{q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{q+1}$.

Alors $B(p+1,q+1) = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!}\,\frac{1}{q+1} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$.

$\underline{\underline{\forall p\in\mathbb{N},\forall q\in\mathbb{N},\ B(p+1,q+1) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}}$.

Q4 a) * $\forall t \in]0,1[$, $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} > 0$ donc $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt > 0$ car $0<1$

Alors $\forall t \in]0,1[$, $f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \geqslant 0$.

De plus $\forall t \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$, $f_{\alpha,\beta}(t) = 0$.

Finalement $\underline{\forall t \in \mathbb{R},\ f_{\alpha,\beta}(t) \geqslant 0.}$

* $t \mapsto \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0,1[$ donc $f_{\alpha,\beta}$ est continue sur $]0,1[$.

$f_{\alpha,\beta}$ étant nulle sur $]-\infty,0]$ et sur $[1,+\infty[$, $f_{\alpha,\beta}$ est continue sur ces deux intervalles.

Ainsi $\underline{f \text{ est au moins continue sur } \mathbb{R}-\{0,1\} \text{ donc sur } \mathbb{R} \text{ privé d'un ensemble fini de points}}$.

* $\forall t \in]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$, $f_{\alpha,\beta}(t) = 0$.

Donc $\int_{-\infty}^0 f_{\alpha,\beta}(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)dt$ existent et valent 0.

$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ existe et vaut $B(\alpha,\beta)$ donc $\int_0^1 f_{\alpha,\beta}(t)dt$ existe et vaut 1.

Alors $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(t)dt \text{ existe et vaut } 1.}$

Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{f_{\alpha,\beta} \text{ est une densité de probabilité}}}$.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in]0,1[$, $t^r f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\beta-1} = \frac{B(\alpha+r,\beta)}{B(\alpha,\beta)} f_{\alpha+r,\beta}(t)$.

Mieux $\forall t \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$, $t^r f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{B(\alpha+r,\beta)}{B(\alpha,\beta)} f_{\alpha+r,\beta}(t)$ ($f_{\alpha,\beta}$ et $f_{\alpha+r,\beta}$ sont nulles sur $]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$).

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha+r,\beta}(t)dt$ existe et vaut 1 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_{\alpha,\beta}(t)dt$ existe et vaut $\frac{B(\alpha+r,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$.

$\underline{\underline{\text{Pour tout } r \text{ dans } \mathbb{N}^*, X \text{ possède un moment d'ordre } r \text{ qui vaut } \frac{B(\alpha+r,\beta)}{B(\alpha,\beta)}}}$.

" $B(\alpha+r,\beta) = \frac{\alpha+r-1}{\alpha+\beta+r-1} B(\alpha+r-1,\beta) = \frac{(\alpha+r-1)(\alpha+r-2)\dots(\alpha)}{(\alpha+\beta+r-1)(\alpha+\beta+r-2)\cdots(\alpha+\beta)} B(\alpha,\beta)$ "

" $B(\alpha+r,\beta) = \prod_{k=1}^{r} \frac{\alpha+r-k}{\alpha+\beta+r-k} \times B(\alpha,\beta)$ "

Une récurrence très simple montre alors que pour tout r dans $\mathbb{N}^*$ le moment d'ordre r de X est : $\prod_{l=1}^{r} \frac{\alpha+r-l}{\alpha+\beta+r-l} = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{\alpha+i}{\alpha+\beta+i}$

Ainsi $E(X)$ et $E(X^2)$ existent et valent : $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$.

Alors $V(X)$ existe et vaut : $E(X^2)-(E(X))^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{\alpha\left[(\alpha+1)(\alpha+\beta)-\alpha(\alpha+\beta+1)\right]}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

$$V(X) = \frac{\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha+\beta-\alpha^2-\alpha\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

X possède une espérance et une variance. $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

Q5 a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } t \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{t^{\beta-1}e^{-t}}{\Gamma(\beta)} & \text{si } t \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $x \in]-\infty,0]$. $\forall t \in]-\infty,0]$, $f_X(t) = 0$ et $\forall t \in]0,+\infty[$, $f_Y(x-t) \underset{x-t \in]-\infty,0]}{=} 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_X(t) f_Y(x-t) = 0$.

Donc $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$ existe et vaut 0 pour tout x dans $]-\infty,0]$.

b) Soit $x \in]0,+\infty[$. $u \to \frac{u}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $t = \frac{u}{x}$ dans ce qui suit.

Soit $(a,b) \in]0,x[^2$.

$$\int_a^b u^{\alpha-1}(x-u)^{\beta-1}du \underset{t=\frac{u}{x}}{=} \int_{a/x}^{b/x} (xt)^{\alpha-1}(x-xt)^{\beta-1}x\,dt = x^{\alpha-1+\beta-1+1}\int_{a/x}^{b/x} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt.$$

$\lim_{a\to 0} \frac{a}{x} = 0$, $\lim_{b\to x} \frac{b}{x} = 1$ et $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ existe et vaut $B(\alpha,\beta)$.

Alors $\int_0^x u^{\alpha-1}(x-u)^{\beta-1}du$ existe et vaut $x^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)$ pour tout x dans $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]0,+\infty[$.

$\forall t \in [x,+\infty[$, $x-t \leq 0$; $\forall t \in [x,+\infty[$, $f_Y(x-t)=0$.

$\forall t \in [x,+\infty[$, $f_X(t)f_Y(x-t) = 0$. $\int_x^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$ existe et vaut 0.

$\forall t \in]-\infty,0]$, $f_X(t)f_Y(x-t) = 0 \times f_Y(x-t) = 0$. $\int_{-\infty}^{0} f_X(t)f_Y(x-t)dt$ existe et vaut 0.

$\forall t \in]0,x[$, $f_X(t)f_Y(x-t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}e^{-t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} (x-t)^{\beta-1} e^{-(x-t)}$.

$\forall t \in]0,x[$, $f_X(t)f_Y(x-t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-x} t^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}$.

Or $\int_0^x t^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}dt$ existe et vaut $x^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)$

Alors $\int_0^x f_X(t)f_Y(x-t)dt$ existe et vaut $\frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}$.

donc h est définie en x et $h(x) = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x}$ pour tout x dans $]0,+\infty[$

Finalement h est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x} \text{ si } x \in]0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

c) * X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f_X et f_Y.

* X et Y sont indépendantes

* $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Le théorème de convolution montre alors que $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\,dt$ en est une densité... définie sur $\mathbb{R}$.

d) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ell(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \text{ si } t \in]0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

ℓ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètre $\alpha+\beta$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ h(x) = \dfrac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ \Gamma(\alpha+\beta)\, f(x).$

Mieux $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ \Gamma(\alpha+\beta)\, f(x)$ car $\forall x \in]-\infty,0],\ h(x) = f(x) = 0$.

Alors $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,du = \dfrac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ \Gamma(\alpha+\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = \dfrac{B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times 1.$

Ainsi $\dfrac{B(\alpha,\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} = 1$ et donc $h = f$.

Alors $\underline{\underline{B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}}$ et $\underline{\underline{X+Y \hookrightarrow \gamma(\alpha+\beta)}}$.

<u>Remarque</u>.. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. $B(p+1,q+1) = \dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+1+q+1)} = \dfrac{p!\ q!}{(p+q+1)!}$.

Ainsi nous retrouvons le résultat de Q3.

(Q1) a) Soit $t \in [0,1]$. Notons Z_t la variable aléatoire égale au nombre de clients arrivés dans l'intervalle de temps $[20, 20+t]$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent toutes la loi uniforme sur $[0,1]$ donc la probabilité pour qu'un client donné arrive dans l'intervalle de temps $[20, 20+t]$ est t.
Dès lors les clients arrivant de manière indépendante, Z_t suit la loi binomiale de paramètres n et t.

$F_r(t) = P(Y_r \leq t)$. De plus $\{Y_r \leq t\}$ se réalise si et seulement si au moins r clients arrivent dans l'intervalle de temps $[20, 20+t]$ donc $\{Y_r \leq t\} = \{Z_t \geq r\}$.

$$F_r(t) = P(Y_r \leq t) = P(Z_t \geq r) = \sum_{\ell=r}^{n} P(Z_t = \ell) = \sum_{\ell=r}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$\forall t \in [0,1], \quad F_r(t) = \sum_{\ell=r}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}.$

$X_1, X_2, \dots, X_r$ prenant leurs valeurs dans $[0,1]$: $\forall t \in]-\infty, 0[, \ F_r(t) = 0$ et

$\forall t \in]1, +\infty[, \ F_r(t) = 1.$

b) $t \mapsto 0$, $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \sum_{\ell=r}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F_r est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$, $[0,1]$ et $]1, +\infty[$. Alors :

* F_r est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.
* F_r est continue en tout point de $\mathbb{R} - \{0,1\}$, continue à droite en 0 et à gauche en 0.
* $\lim_{t \to 0^-} F_r(t) = 0 = F_r(0)$ ($t \mapsto \sum_{\ell=r}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$ prend la valeur 0 en 0 car $r \geq 1$).

F_r est donc continue à gauche en 0. Mieux F_r est continue en 0.

$\lim\limits_{t \to 1^+} F_r(t) = 1 = F_r(1)$ ($t \mapsto \sum\limits_{\ell=r}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$ prend la valeur 1 en 1).

F_r est donc continue à droite en 1. Finalement F_r est continue.

Ainsi $\underline{F_r \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

Ceci achève de montrer que $\underline{Y_r \text{ est une variable aléatoire à densité}}$.

$\forall t \in]-\infty, 0[,\ F_r(t) = 0$ donc $\forall t \in]-\infty, 0[,\ F'_r(t) = 0$.

$\forall t \in]0,1[,\ F_r(t) = \sum\limits_{\ell=r}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$ donc $\forall t \in]0,1[,\ F'_r(t) = \sum\limits_{\ell=r}^{n} \binom{n}{\ell} \left[\ell t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell} - (n-\ell) t^\ell \times (1-t)^{n-\ell-1}\right]$.

$\forall t \in]1, +\infty[,\ F_r(t) = 1$ donc $\forall t \in]1,+\infty[,\ F'_r(t) = 0$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ f_r(t) = \begin{cases} \sum\limits_{\ell=r}^{n} \binom{n}{\ell} \left[\ell t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell} - (n-\ell) t^\ell (1-t)^{n-\ell-1}\right] & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_r est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_r sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ donc f_r est une densité de Y_r.

Soit $t \in]0,1[$.

$$f_r(t) = \sum_{\ell=r}^{n} \ell \binom{n}{\ell} t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell} - \sum_{\ell=r}^{n \text{ ou } \boxed{n-1}} \binom{n}{\ell} (n-\ell) t^\ell (1-t)^{n-\ell-1} \quad \downarrow \ell \mapsto \ell-1$$

$$f_r(t) = \sum_{\ell=r}^{n} \ell \binom{n}{\ell} t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell} - \sum_{\ell=r+1}^{n} \binom{n}{\ell-1} (n-\ell+1) t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell}.$$

$$f_r(t) = r\binom{n}{r} t^{r-1}(1-t)^{n-r} + \sum_{\ell=r+1}^{n} \left[\ell \binom{n}{\ell} - (n-\ell+1)\binom{n}{\ell-1}\right] t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell}.$$

Notons que si $\ell \in [\![r+1, n]\!]$: $\ell\binom{n}{\ell} - (n-\ell+1)\binom{n}{\ell-1} = \ell \times \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} - (n-\ell+1)\frac{n!}{(\ell-1)!(n-\ell+1)!} = 0$!!

Alors $f_r(t) = r\binom{n}{r} t^{r-1}(1-t)^{(n-r+1)-1} = r\frac{n!}{r!(n-r)!} t^{r-1}(1-t)^{(n-r+1)-1} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} t^{r-1}(1-t)^{(n-r+1)-1}$

Notons que $B(r, n-r+1) \overset{Q2}{=} \frac{(r-1)!\,(n-r)!}{(r-1+n-r+1)!} = \frac{(r-1)!\,(n-r)!}{n!}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ f_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{B(r, n-r+1)} t^{r-1}(1-t)^{(n-r+1)-1} & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $f_r = f_{r, n-r+1}$.

Ainsi Y_r suit la loi bêta de première espèce de paramètres r et $n-r+1$.

$E(Y_r) = \dfrac{r}{r+(n-r+1)}$. $E(Y_r) = \dfrac{r}{n+1}$.

(Q2) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $P(X_i + a \leq t) = P(X_i \leq t-a) = \dfrac{(t-a)-(-a)}{0-(-a)} = \dfrac{t}{a}$.

$X_i \hookrightarrow U([-a,0])$ et $t-a \in [-a,0[$

Ainsi la probabilité pour qu'une voiture occupant un poste de contrôle le libère avant l'instant t est $\frac{t}{a}$.
L'indépendance des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ autorise alors à dire que Z_t suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{t}{a}$. $Z_t \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{t}{a})$.

Notons $\{T \leq t\}$ se réalise si au moins $r+1$ postes se libèrent dans l'intervalle de temps $[0,t]$ car r voitures attendent avant la voiture A.

Ainsi $F_T(t) = P(T \leq t) = P(Z_t \geq r+1) = \sum_{k=r+1}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{t}{a}\right)^k\left(1-\frac{t}{a}\right)^{n-k}$.

$\forall t \in [0,a[,\ F_T(t) = \sum_{k=r+1}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{t}{a}\right)^k\left(1-\frac{t}{a}\right)^{n-k}$.

Le temps du contrôle d'une voiture étant a et r étant strictement inférieur à n, T prend ses valeurs dans $[0,a]$.

Alors $\forall t \in]-\infty,0[,\ F_T(t) = 0$ et $\forall t \in [a,+\infty[,\ F_T(t) = 1$.

b) $t \mapsto 0$, $t \mapsto 1$, $t \mapsto \sum_{k=r+1}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{t}{a}\right)^k\left(1-\frac{t}{a}\right)^{n-k}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Alors F_T est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$, $[0,a[$ et $[a,+\infty[$.

F_T est donc - au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,a\}$
- continue à droite en 0 et a.

$\lim_{t\to 0^-} F_T(t) = 0 = F_T(0)$ et $\lim_{t\to a^-} F_T(t) = \lim_{t\to a^-} \sum_{k=r+1}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{t}{a}\right)^k\left(1-\frac{t}{a}\right)^{n-k} = \binom{n}{n}\left(\frac{a}{a}\right)^n \times 1 = 1$
$= F_T(a)$.

F_T est ainsi continue à gauche en 0 et a.

Finalement F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{0,a\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

<u>T est donc une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall t \in]-\infty,0[,\ F_T(t)=0$ et $\forall t \in]a,+\infty[,\ F_T(t)=1$.

Alors $\forall t \in]-\infty,0[\, \cup\,]a,+\infty[,\ F_T'(t)=0$.

$\forall\ t \in]0,a[\quad F_T(t)=\displaystyle\sum_{k=r+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{t^k}{a^k}\,\frac{(a-t)^{n-k}}{a^{n-k}}$.

$$\forall t\in]0,a[,\ F_T'(t)=\sum_{k=r+1}^{n}\frac{1}{a^n}\binom{n}{k}k\,t^{k-1}(a-t)^{n-k}+\sum_{k=r+1}^{n \text{ ou } n-1}\frac{1}{a^n}\binom{n}{k}t^k(-1)(n-k)(a-t)^{n-k-1}$$

$\downarrow k \mapsto k-1$

$$\forall t\in]0,a[,\ F_T'(t)=\frac{1}{a^n}\sum_{k=r+1}^{n}\binom{n}{k}k\,t^{k-1}(a-t)^{n-k}-\sum_{k=r+2}^{n}\frac{1}{a^n}\binom{n}{k-1}t^{k-1}(n-k+1)(a-t)^{n-k}$$

$$\forall t\in]0,a[,\ F_T'(t)=\frac{1}{a^n}\binom{n}{r+1}(r+1)t^r(a-t)^{n-r-1}+\frac{1}{a^n}\sum_{k=r+2}^{n}\underbrace{\left[k\binom{n}{k}-(n-k+1)\binom{n}{k-1}\right]}_{\frac{k\,n!}{k!(n-k)!}-\frac{(n-k+1)\,n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=0\ !}t^{k-1}(a-t)^{n-k}$$

$$\forall t\in]0,a[,\ F_T'(t)=\frac{r+1}{a^n}\binom{n}{r+1}t^r(a-t)^{n-r-1}$$

Posons $\forall t\in\mathbb{R},\ f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{r+1}{a^n}\dbinom{n}{r+1}t^r(a-t)^{n-r-1} & \text{si } t\in]0,a[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. ← pour les besoins de la cause...

f_T est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_T' sur $\mathbb{R}-\{0,a\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. <u>f_T est donc une densité de T.</u>

Posons $\hat{T}=\frac{1}{a}T$. $\hat{T}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $f_{\hat{T}}: t \mapsto a\, f_T(at)$

Soit $t \in]0,1[$. $at \in]0,a[$.

$$f_{\hat{T}}(t) = a f_T(at) = a \frac{r+1}{a^n} \binom{n}{r+1} (at)^r (a-at)^{n-r-1} = (r+1)\binom{n}{r+1} t^r (1-t)^{n-r-1}.$$

$$f_{\hat{T}}(t) = \frac{n!}{r!(n-r-1)!} t^r (1-t)^{n-r-1} = \frac{1}{B(r+1,n-r)} t^r (1-t)^{n-r-1} = f_{r+1,n-r}(t).$$

$\forall t \in]0,1[$, $f_{\hat{T}}(t) = f_{r+1,n-r}(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R} -]0,1[$. $at \notin]0,a[$ donc $f_{\hat{T}}(t) = 0 = f_{r+1,n-r}(t)$.

Finalement $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{\hat{T}}(t) = f_{r+1,n-r}(t)$.

Ainsi $\hat{T}$ suit la loi Bêta de première espèce de paramètre $r+1$ et $n-r$.

Alors $\hat{T}$ possède une espérance qui vaut : $\frac{r+1}{n-r+r+1}$.

$E(\hat{T})$ existe et vaut $\frac{r+1}{n+1}$.

$T = a\hat{T}$ donc $E(T)$ existe et vaut $a\frac{r+1}{n+1}$.

Q3

Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons Z_t le nombre de variables aléatoires de la suite $X_1, X_2, \dots, X_n$ qui prennent une valeur dans $]-\infty, t]$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X_i \leq t) = P(X \leq t) = F(t)$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ étant indépendantes Z_t suit la loi binomiale de paramètres n et $F(t)$.

$\{Y_r \leq t\} = \{Z_t \geq r\}$

donc $F_r(t) = P(Y_r \leq t) = P(Z_t \geq r) = \sum_{k=r}^{n} P(Z_t = k) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} (F(t))^k (1-F(t))^{n-k}.$

$\forall t \in \mathbb{R},\ F_r(t) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} (F(t))^k (1-F(t))^{n-k}$.

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est une partie finie de $\mathbb{R}$.

Alors F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus D$, $F'(x) = f(x)$.

Ainsi F_r est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$.

<u>Y_r est une variable aléatoire à densité.</u>

Soit $t \in \mathbb{R}\setminus D$. $F_r'(t) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k F'(t) (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k} + \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} (F(t))^k (-1)(n-k) F'(t) \times (1-F(t))^{n-k-1}$.

$$F_r'(t) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k f(t) (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k} - \sum_{k=r}^{\boxed{n-1}} \binom{n}{k} f(t) (F(t))^k (n-k) (1-F(t))^{n-k-1}$$

$$F_r'(t) = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k f(t) (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k} - \sum_{k=r+1}^{n} (n-k+1) \binom{n}{k-1} f(t) (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k}$$

$$F_r'(t) = \binom{n}{r} r f(t) (F(t))^{r-1} (1-F(t))^{n-r} + \sum_{k=r+1}^{n} \Big[\underbrace{k\binom{n}{k} - (n-k+1)\binom{n}{k-1}}_{k \frac{n!}{k!(n-k)!} - (n-k+1)\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = 0} \Big] f(t) (F(t))^{k-1} (1-F(t))^{n-k}$$

Ainsi <u>$\forall t \in \mathbb{R}\setminus D$, $F_r'(t) = r\binom{n}{r} f(t) (F(t))^{r-1} (1-F(t))^{n-r}$.</u>

Posons <u>$\forall t \in \mathbb{R}$, $f_r(t) = r\binom{n}{r} f(t) (F(t))^{r-1} (1-F(t))^{n-r}$.</u>

f_r est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_r' sur $\mathbb{R}\setminus D$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. <u>f_r est une densité de Y_r.</u>

c) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. On peut donc prendre pour fonction f la fonction définie par

$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ ... pour les besoins de la cause

$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]-\infty, 0[\\ t \text{ si } t \in [0,1[\\ 1 \text{ si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$.

$\forall t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, $f_r(t) = 0$ car $f(t) = 0$.

$\forall t \in]0,1[$, $f_r(t) = r\binom{n}{r} 1 \quad t^{r-1}(1-t)^{n-r} = \dfrac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \quad t^{r-1}(1-t)^{n-r}$.

$B(r, n-r+1) = \dfrac{(r-1)!(n-r)!}{(r-1+n-r+1)!} = \dfrac{(r-1)!\ (n-r)!}{n!}$

Alors $\forall t \in]0,1[$, $f_r(t) = \dfrac{1}{B(r, n-r+1)} \quad t^{r-1}(1-t)^{n-r} = f_{r, n-r+1}(t)$.

Mieux $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_r(t) = f_{r, n-r+1}(t)$.

Ainsi <u>Y_r suit la bêta de première espèce de paramètres r et $n-r+1$.</u>

$E(Y_r)$ existe et vaut $\dfrac{r}{r+n-r+1}$. <u>$E(Y_r)$ existe et vaut $\dfrac{r}{n+1}$.</u>

III GÉNÉRALITÉS SUR LES LOI BÊTA DE DEUXIÈME ESPÈCE

(Q1) a) T prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$

. $\forall x \in]-\infty, 0]$, $T^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid e^{S(\omega)} \leq x\} = \varphi \in \mathcal{A}$.

. $\forall x \in]0, +\infty[$, $T^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid e^{S(\omega)} \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid S(\omega) \leq \ln x\}$;

$\forall x \in]0, +\infty[$, $T^{-1}(]-\infty, x]) = S^{-1}(]-\infty, \ln x]) \in \mathcal{A}$.

Ainsi <u>T est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$</u>. Notons F_T sa fonction de répartition. Notons encore F_S la fonction de répartition de S.

$\forall x \in]-\infty, 0]$, $F_T(x) = 0$. $\forall x \in]0, +\infty[$, $F_T(x) = P(T \leq x) = P(S \leq \ln x) = F_S(\ln x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_T(x) = \begin{cases} F_S(\ln x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

f_S est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.

Alors F_S est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F_S'(x) = f_S(x)$.

$x \mapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et F_S est continue sur $\mathbb{R}$; par composition <u>F_T est continue sur $\mathbb{R}_+^*$</u>.

F_T étant nulle sur $]-\infty, 0]$, <u>F_T est continue sur $]-\infty, 0]$</u>.

Pour montrer que F_T est continue sur $\mathbb{R}$ il ne reste plus qu'à montrer que F_T est continue à droite en 0.

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} F_S(x) = 0$. Alors $\lim_{x \to 0^+} F_T(x) = \lim_{x \to 0^+} F_S(\ln x) = 0 = F_T(0)$.

Finalement <u>F_T est continue à droite en 0</u> ce qui achève de montrer que <u>F_T est continue sur $\mathbb{R}$</u>.

Posons $\Delta = \{e^d ; d \in D\}$.

- F_T est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc <u>F_T est de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$</u>

- . $x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

 . $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \Delta$, $\ln x \in \mathbb{R} \setminus D$

 . F_S est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$.

Par composition F_T est de classe <u>C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \Delta$</u>.

Donc F_T est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}-(\{0\}\cup\Delta)$ et $\{0\}\cup\Delta$ est fini.

ceci achève alors de montrer que <u>T est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x\in]-\infty,0[$, $F_T(x)=0$; $\forall x\in]-\infty,0[$, $F'_T(x)=0$.

$\forall x\in]0,+\infty[$, $F_T(x)=F_S(\ln x)$; $\forall x\in]0,+\infty[\setminus\Delta$, $F'_T(x)=\frac{1}{x}F'_S(\ln x)=\frac{1}{x}f_S(\ln x)$.

$\ln x\in\mathbb{R}\setminus D$

Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_T(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}f_S(\ln x) & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

f_T est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_T sur $\mathbb{R}-(\{0\}\cup\Delta)$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

<u>f_T est une densité de T.</u>

<u>b)</u> $\forall x\in\mathbb{R}$, $S^{-1}(]-\infty,x])=\{\omega\in\Omega\mid S(\omega)\leq x\}=\{\omega\in\Omega\mid T(\omega)\leq e^x\}=T^{-1}(]-\infty,e^x])\in\mathcal{A}$.

S est une variable aléatoire. Notons F_S et F_T les fonctions de répartition de S et T.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_S(x)=P(S\leq x)=P(T\leq e^x)=F_T(e^x)$.

$x\mapsto e^x$ et F_T sont continues sur $\mathbb{R}$ donc <u>F_S est continue sur $\mathbb{R}$.</u>

f_T est continue sur $\mathbb{R}\setminus\hat{D}$ où $\hat{D}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.

Donc F_T est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\hat{D}$ et $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\hat{D}$, $F'_T(x)=f_T(x)$.

Posons $\hat{\Delta}=\{\ln d\ ;\ d\in\hat{D}\cap\mathbb{R}_+^*\}$. $\hat{D}$ est fini donc $\hat{\Delta}$ est fini.

$x\mapsto e^x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\hat{\Delta}$, $e^x\in\mathbb{R}\setminus\hat{D}$ et F_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\hat{D}$. Par composition F_S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\hat{\Delta}$.

donc <u>F_S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.</u>

ceci achève de montrer que <u>S est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\hat{\Delta}$, $F'_S(x)=e^x F'_T(e^x)=e^x f_T(e^x)$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_S(x) = e^x f_T(e^x)$.

f_S est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_S sur $\mathbb{R} \setminus \Delta$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Ainsi f_S est une densité de S.

Q2 X prend ses valeurs dans $]0,1[$. ($\dots f_{\alpha,\beta}$ est nulle en dehors de $]0,1[$)

Posons $\forall t \in]0,1[,\ \varphi(t) = \frac{t}{1-t}$. φ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall t \in]0,1[,\ \varphi'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} > 0$

$\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = 0$ et $\lim_{t \to 1^-} \varphi(t) = +\infty$. Ainsi $\varphi(]0,1[) =]0,+\infty[$ ... φ réalise même une bijection de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in]0,+\infty[,\ \varphi^{-1}(t) = \frac{t}{1+t}$

donc Y prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$. Soit F_Y la fonction de répartition de Y et F_X celle de X.

$\forall x \in]-\infty,0],\ F_Y(x) = 0$. Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$F_Y(x) = P\left(\frac{X}{1-X} \leqslant x\right) \underset{\uparrow}{=} P(X \leqslant x(1-X)) = P((1+x)X \leqslant x) \underset{\uparrow}{=} P\left(X \leqslant \frac{x}{1+x}\right).$$

(X prend ses valeurs dans $]0,1[$; $1+x>0$)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} F_X\left(\frac{x}{1+x}\right) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$f_{\alpha,\beta}$ qui est une densité de X définie sur $\mathbb{R}$ et au moins continue sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

Ainsi F_X est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} - \{0,1\},\ F'_X(x) = f_{\alpha,\beta}(x)$.

$x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et F_X est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par composition,

F_Y est continue sur $]0,+\infty[$.

F_Y est nulle sur $]-\infty,0]$ donc F_Y est continue sur $]-\infty,0]$.

$\lim_{x \to 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \to 0^+} F_X\left(\frac{x}{1+x}\right) = F_X(0) = \int_{-\infty}^{0} f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = 0 = F_Y(0)$; F_Y est continue à droite en 0 et ceci achève de montrer que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

F_Y est nulle sur $]-\infty,0]$ donc F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{x}{1+x} \in]0,1[$ $\left(\frac{x}{1+x} > 0 \text{ et } 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+x} > 0 \ldots \right)$.

donc $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est C^1 sur $]0,+\infty[$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $\frac{x}{1+x} \in]0,1[$ et F_X est de classe C^1 sur $]0,1[$ donc par composition F_Y est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Finalement F_Y est au moins de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ceci achève de montrer que <u>Y est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty,0[$, $F_Y(x) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty,0[$, $F'_Y(x) = 0$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F_Y(x) = F_X\left(\frac{x}{1+x}\right)$ et $\frac{x}{1+x} \in]0,1[\subset \mathbb{R} - \{0,1\}$ donc

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F'_Y(x) = \frac{1}{(1+x)^2} F'_X\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2} f_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} f_{\alpha,\beta}\left(\frac{x}{1+x}\right) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_Y est positive sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_Y sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. f_Y est une densité de Y.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $f_Y(t) = \frac{1}{(1+t)^2} f_{\alpha,\beta}\left(\frac{t}{1+t}\right) \underset{\frac{t}{1+t} \in]0,1[}{=} \frac{1}{(1+t)^2} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{\beta-1}$.

$\forall t \in]0,+\infty[$, $f_Y(t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{1}{(1+t)^2} \times \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha-1}} \times \frac{1}{(1+t)^{\beta-1}} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = g_{\alpha,\beta}(t)$.

$\forall t \in]-\infty,0]$, $f_Y(t) = 0 = g_{\alpha,\beta}(t)$.

Ainsi <u>$g_{\alpha,\beta}$ est une densité de $Y = \frac{X}{1-X}$.</u>

b) X prend ses valeurs dans $]0,1[$ et $t \mapsto \left(\frac{t}{1-t}\right)^r$ est continue sur $]0,1[$.

Ainsi $E\left(\left(\frac{X}{1-X}\right)^r\right)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^r f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ est

absolument convergente. Notons que $\forall t \in]0,1[,\ \left(\frac{t}{1-t}\right)^r f_{\alpha,\beta}(t) \geq 0$.

Ainsi $E(Y^r)$ existe si et seulement si $\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^r f_{\alpha,\beta}(t)\,dt$ converge.

$\forall t \in]0,1[,\ \left(\frac{t}{1-t}\right)^r f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{t^r}{(1-t)^r} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\beta-r-1}$

Ainsi $E(Y^r)$ existe si et seulement si $\int_0^1 t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\beta-r-1}\,dt$ existe donc

si et seulement si $\alpha+r>0$ et $\beta-r>0$ d'après I Q1. Notons que : $\alpha+r>0$.

Finalement $E(Y^r)$ existe si et seulement si $\beta > r$.

Supposons que $E(Y^r)$ existe c'est à dire que $\beta>r$.

$E(Y^r) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^r f_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\beta-r-1}\,dt.$

$E(Y^r) = \frac{B(\alpha+r,\beta-r)}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 f_{\alpha+r,\beta-r}(t)\,dt = \frac{B(\alpha+r,\beta-r)}{B(\alpha,\beta)}.$

$$E(Y^r) = \frac{B(\alpha+r,\beta-r)}{B(\alpha,\beta)}.$$

$B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha,\beta+1)$

Remarque... D'après I Q1 b :

" $B(\alpha+r,\beta-r) = \frac{\alpha+r-1}{\beta-r} B(\alpha+r-1,\beta-r+1) = \frac{\alpha+r-1}{\beta-r} \times \frac{\alpha+r-2}{\beta-r+1} \times \dots \times \frac{\alpha}{\beta-1} B(\alpha,\beta)$ "

donc $E(Y^r) = \prod_{k=1}^{r} \frac{\alpha+k-1}{\beta-k}$ ... ce que confirme une récurrence simple.

c] $E(Y)$ existe si et seulement si $\beta>1$. I 9 1 b)

Si $\beta>1$ $E(Y)$ existe et vaut $\dfrac{B(\alpha+1,\beta-1)}{B(\alpha,\beta)} \overset{\downarrow}{=} \dfrac{\alpha}{\beta-1} B(\alpha,\beta)\times\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}=\dfrac{\alpha}{\beta-1}$.

$E(Y^2)$ existe si et seulement si $\beta>2$. Donc $V(Y)$ existe si et seulement si $\beta>2$.

Supposons $\beta>2$. $E(Y^2)=\dfrac{B(\alpha+2,\beta-2)}{B(\alpha,\beta)}=\dfrac{\alpha+1}{\beta-2}B(\alpha+1,\beta-1)\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}=\dfrac{\alpha+1}{\beta-2}\times\dfrac{\alpha}{\beta-1}\,\dfrac{B(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$.

$E(Y^2)=\dfrac{(\alpha+1)\alpha}{(\beta-2)(\beta-1)}$. $V(Y)=\dfrac{(\alpha+1)\alpha}{(\beta-2)(\beta-1)}-\left(\dfrac{\alpha}{\beta-1}\right)^2=\dfrac{\alpha}{(\beta-2)(\beta-1)^2}\underbrace{\left[(\alpha+1)(\beta-1)-\alpha(\beta-2)\right]}_{\alpha+\beta-1}$

$V(Y)=\dfrac{\alpha(\alpha+\beta-1)}{(\beta-2)(\beta-1)^2}$.

$E(Y)$ existe si et seulement si $\beta>1$. Si $\beta>1$, $E(Y)=\dfrac{\alpha}{\beta-1}$.

$V(Y)$ existe si et seulement si $\beta>2$. Si $\beta>2$, $V(Y)=\dfrac{\alpha(\alpha+\beta-1)}{(\beta-2)(\beta-1)^2}$.

Q3 ** Ici $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$, $Y\hookrightarrow\gamma(\beta)$.

a] Pour $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_X(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et $f_Y(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{\beta-1}e^{-t}}{\Gamma(\beta)} & \text{si } t\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

f_X (resp. f_Y) est une densité de X (resp. Y). X (resp. Y) prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

D'après Q 1 a] $\ln X$ (resp. $\ln Y$) est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $f_{\ln X}$ (resp. $f_{\ln Y}$) définie par :

$\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\ln X}(t)=e^t f_X(e^t)$ (resp. $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\ln Y}(t)=e^t f_Y(e^t)$).

$\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\ln X}(t)=e^t\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}(e^t)^{\alpha-1}e^{-e^t}=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}e^{\alpha t}e^{-e^t}$. De même

$\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\ln Y}(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}e^{\beta t}e^{-e^t}$.

** Dans le texte c'est U et V à la place de X et Y.

Notons que $-\ln Y$ est également une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $f_{-\ln Y}$ définie par $\forall t\in\mathbb{R},\ f_{-\ln Y}(t) = f_{\ln Y}(-t)$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ f_{-\ln Y}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\, e^{-\beta t}\, e^{-e^{-t}}$.

Montrons que $f_{\ln X}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $t\mapsto e^{\alpha t}e^{-e^{t}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ ou que $\psi : u\mapsto u^{\alpha}e^{-u}$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall u\in]0,+\infty[,\ \psi'(u) = \alpha u^{\alpha-1}e^{-u} - u^{\alpha}e^{-u} = u^{\alpha-1}e^{-u}(\alpha-u)$.

ψ est donc croissante sur $]0,\alpha]$, décroissante sur $[\alpha,+\infty[$. ψ possède donc un maximum sur $]0,+\infty[$ en α. Alors $\forall u\in]0,+\infty[,\ 0\leq \psi(u)\leq \psi(\alpha)$.

ψ est bornée sur $]0,+\infty[$. Ainsi $f_{\ln X}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

- $\ln X$ et $-\ln Y$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives $f_{\ln X}$ et $f_{-\ln Y}$.
- $\ln X$ et $-\ln Y$ sont indépendantes
- $f_{\ln X}$ est bornée.

Alors $S = \ln X - \ln Y$ est une variable aléatoire à densité.

et $f_S : x\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X}(x-t)\, f_{-\ln Y}(t)\, dt$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $f_S(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X}(x-t)\, f_{-\ln Y}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, e^{\alpha(x-t)}\, e^{-e^{x-t}}\, \frac{1}{\Gamma(\beta)}\, e^{-\beta t}\, e^{-e^{-t}}\, dt$

$$f_S(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x}\, e^{-(\alpha+\beta)t}\, e^{-(1+e^{x})e^{-t}}\, dt = \frac{e^{\alpha x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)t}\, e^{-(1+e^{x})e^{-t}}\, dt.$$

$t\mapsto e^{-t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise le changement de variable $u=e^{-t}$ dans ce qui suit. Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

$$\int_A^B e^{-(\alpha+\beta)t}\, e^{-(1+e^{x})e^{-t}}\, dt \underset{\substack{u=e^{-t}\\ du=-e^{-t}dt}}{=} -\int_{e^{-A}}^{e^{-B}} u^{\alpha+\beta}\, e^{-(1+e^{x})u}\, \frac{1}{u}\, du = \int_{e^{-B}}^{e^{-A}} u^{\alpha+\beta-1}\, e^{-(1+e^{x})u}\, du$$

$\lim\limits_{A\mapsto-\infty} e^{-A}=+\infty$, $\lim\limits_{B\mapsto+\infty} e^{-B}=0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)t}\, e^{-(1+e^{x})e^{-t}}\,dt$ existe et vaut

$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\, e^{-\alpha x} f_S(x)$!

Ainsi $\int_0^{+\infty} u^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+e^{x})u}\,du$ existe et vaut $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\, e^{-\alpha x} f(x)$.

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_S(x)=\dfrac{e^{\alpha x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+e^{x})u}\,du$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.
Pour $\forall u\in\mathbb{R}$, $\tilde{f}(u)=\begin{cases}\dfrac{(1+e^{x})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, u^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+e^{x})u} & \text{si } u\in\,]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$\tilde{f}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètres $\dfrac{1}{1+e^{x}}$ et $\alpha+\beta$.

Alors $1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(u)\,du=\int_0^{+\infty}\tilde{f}(u)\,du=\frac{(1+e^{x})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{+\infty}u^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+e^{x})u}\,du$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}u^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+e^{x})u}\,du=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+e^{x})^{\alpha+\beta}}$.

Alors $f_S(x)=\dfrac{e^{\alpha x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\times\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+e^{x})^{\alpha+\beta}}$. Or $\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=B(\alpha,\beta)$ d'après I Q5 d)

Donc $f_S(x)=\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\,\dfrac{e^{\alpha x}}{(1+e^{x})^{\alpha+\beta}}$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$.

b) $\dfrac{X}{Y}=e^{\ln\frac{X}{Y}}=e^{\ln X-\ln Y}=e^{S}$. D'après Q1 a) $\dfrac{X}{Y}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $f_{\frac{X}{Y}}$ définie par $\forall t\in\mathbb{R}$, $f_{\frac{X}{Y}}(t)=\begin{cases}\frac{1}{t}f_S(\ln t) & \text{si } t\in\,]0,+\infty[.\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$\forall t\in\,]0,+\infty[$, $f_{\frac{X}{Y}}(t)=\dfrac{1}{t}f_S(\ln t)=\dfrac{1}{t}\,\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\,\dfrac{e^{\alpha\ln t}}{(1+e^{\ln t})^{\alpha+\beta}}=\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\,\dfrac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}=g_{\alpha,\beta}(t)$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ f_{\frac{X}{Y}}(t) = g_{\alpha,\beta}(t)$ et $\forall t \in]-\infty, 0],\ f_{\frac{X}{Y}}(t) = 0 = g_{\alpha,\beta}(t)$.

Donc $f_{\frac{X}{Y}} = g_{\alpha,\beta}$. $\frac{X}{Y}$ suit la loi bêta de seconde espèce de paramètres α et β.

c) $\frac{1}{a} X' \hookrightarrow \gamma(\alpha)$, $\frac{1}{b} Y' \hookrightarrow \gamma(\beta)$ et, $\frac{1}{a} X'$ et $\frac{1}{a} Y'$ sont indépendantes car X' et Y' le sont.

Alors $\frac{b}{a} \frac{X'}{Y'}$ suit la loi bêta de second espèce de paramètres α et β.

Alors $\frac{X'}{Y'}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{(a/b)} g_{\alpha,\beta}\left(\frac{t-0}{a/b}\right)$ car $\frac{X'}{Y'} = \frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\frac{X'}{Y'}\right)$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \frac{b}{a} g_{\alpha,\beta}\left(\frac{bt}{a}\right)$. $\forall t \in]-\infty,0]$, $h(t) = 0$.

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ h(t) = \frac{b}{a} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{\left(\frac{bt}{a}\right)^{\alpha-1}}{\left(1+\frac{bt}{a}\right)^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1} a^{\alpha+\beta} \frac{t^{\alpha-1}}{(a+bt)^{\alpha+\beta}}$$

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ h(t) = \frac{a^\beta b^\alpha}{B(\alpha,\beta)} \frac{t^{\alpha-1}}{(a+bt)^{\alpha+\beta}}.$$

$\frac{X'}{Y'}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction h nulle sur $]-\infty,0]$ et telle que $\forall t \in]0,+\infty[$, $h(t) = \frac{a^\beta b^\alpha}{B(\alpha,\beta)} \frac{t^{\alpha-1}}{(a+bt)^{\alpha+\beta}}$.

$E\left(\frac{X'}{Y'}\right)$ existe $\Leftrightarrow E\left(\frac{b}{a}\frac{X'}{Y'}\right)$ existe $\Leftrightarrow \beta > 1$.

$\frac{b}{a}\frac{X'}{Y'}$ suit la loi bêta de second espèce de paramètre α et β

Supposons que $\beta > 1$. $E\left(\frac{X'}{Y'}\right)$ existe et $E\left(\frac{X'}{Y'}\right) = \frac{a}{b} E\left(\frac{b}{a}\frac{X'}{Y'}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta-1}$.

$E\left(\frac{X'}{Y'}\right)$ existe si et seulement si $\beta > 1$. En cas d'existence $E\left(\frac{X'}{Y'}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta-1}$.

IV LOI DU χ^2 ET LOI DE STUDENT

(Q1) a) Notons $F_{X_1^2}$ la fonction de répartition de X_1^2.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{X_1^2}(x) = P(X_1^2 \leq x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{X_1^2}(x) = P(X_1^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) = \phi(\sqrt{x}) - \phi(-\sqrt{x}) = 2\phi(\sqrt{x}) - 1$.

$F_{X_1^2}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc $F_{X_1^2}$ est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Par composition $F_{X_1^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} F_{X_1^2}(x) = 0 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 2\phi(0) - 1 = F_{X_1^2}(0)$; $F_{X_1^2}$ est continue à gauche en 0.

Ce qui précède montre que $F_{X_1^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$.

Cela suffit pour dire que X_1^2 est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F_{X_1^2}(x) = 2\phi(\sqrt{x}) - 1$ donc $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_{X_1^2}(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} \phi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \phi'(\sqrt{x})$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{X_1^2}(x) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_{X_1^2}(x) = 0$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{X_1^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \phi'(\sqrt{x}) & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$f_{X_1^2}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{X_1^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ donc $f_{X_1^2}$ est une densité de X_1^2.

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f_{X_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{1/2} \sqrt{\pi}} = \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{1/2} \Gamma(1/2)}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{X_1^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{1/2} \Gamma(1/2)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\underline{\underline{X_1^2 \text{ suit la loi gamma de paramètre } \Gamma(2, \tfrac{1}{2})}}$.

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes ; il en est alors de même pour $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$. Comme $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$ le cours indique que $\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ suit la loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n}{2}$.

$\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{n}{2})$ donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{n} \times 2, \frac{n}{2})$

$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2$ suit la loi gamma de paramètres $\frac{2}{n}$ et $\frac{n}{2}$.

Q2 a) $X_0^2 \hookrightarrow \Gamma(2, \frac{1}{2})$ et $M_n \hookrightarrow \Gamma(\frac{2}{n}, \frac{n}{2})$. De plus X_0^2 et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2$ sont indépendantes car $X_0, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

Alors III Q4 c) montre que Q_n^2 est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction $f_{Q_n^2}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f_{Q_n^2}(t) = \frac{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{(2 + \frac{2}{n} t)^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}} \text{ et } \forall t \in]-\infty, 0],\ f_{Q_n^2}(t) = 0.$$

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f_{Q_n^2}(t) = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n}} \frac{1}{B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \times \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{(1 + \frac{t}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f_{Q_n^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}\, B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{(1 + \frac{t}{n})^{\frac{n+1}{2}}}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{Q_n^2}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}\, B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \dfrac{1}{(1 + \frac{t}{n})^{\frac{n+1}{2}}} & \text{si } t \in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Notons $F_{|Q_n|}$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Q_n|$.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F_{|Q_n|}(x) = 0$. $\forall x \in [0, +\infty[$, $F_{|Q_n|}(x) = P(|Q_n| \leq x) = P(Q_n^2 \leq x^2) = F_{Q_n^2}(x^2)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{|Q_n|}(x) = \begin{cases} F_{Q_n^2}(x^2) \text{ si } x \in [0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

$f_{Q_n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $F_{Q_n^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{Q_n^2}(x) = f_{Q_n^2}(x)$.

$x \mapsto x^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $F_{Q_n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Par composition $F_{|Q_n|}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$F_{|Q_n|}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc $F_{|Q_n|}$ est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$.

$\lim_{x \to 0^-} F_{|Q_n|}(x) = 0 = \int_{-\infty}^{0} f_{Q_n^2}(t)dt = F_{Q_n^2}(0) = F_{|Q_n|}(0)$; $F_{|Q_n|}$ est continue à gauche en 0.

Ceci achève de montrer que $F_{|Q_n|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc que $|Q_n|$ est une variable aléatoire à densité.

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F'_{|Q_n|}(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_{|Q_n|}(x) = 2x F'_{Q_n^2}(x^2) = 2x f_{Q_n^2}(x^2)$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{|Q_n|}(x) = \begin{cases} 2x f_{Q_n^2}(x^2) \text{ si } x \in]0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$f_{|Q_n|}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $F'_{|Q_n|}$ sur $\mathbb{R}^*$; $f_{|Q_n|}$ est une densité de $|Q|$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ f_{|Q_n|}(x) = 2x f_{Q_n^2}(x^2) = 2x \frac{1}{\sqrt{n} B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_{|Q_n|}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{n} B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \dfrac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \text{ si } x \in]0, +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Remarque.. $B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{|Q_n|}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{n\pi}}\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\ \dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} & \text{si } t \in]0,+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

b) $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 \overset{|Q_n| \text{ est une var à d.}}{=} P(|Q_n|=x) = P(\{Q_n=x\} \cup \{Q_n=-x\}) \overset{\text{incompatibilité car } x>0}{=} P(Q_n=x)+P(Q_n=-x)$.

Or $P(Q_n=x) \geq 0$ et $P(Q_n=-x) \geq 0$. Donc $P(Q_n=x) = P(Q_n=-x) = 0$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $P(Q_n=x) = P(Q_n=-x) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $P(Q_n=x)=0$.

De plus $P(Q_n=0) = P(|Q_n|=0) = 0$ ($|Q_n|$ est une var à d).

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Q_n=x)=0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $P(|Q_n| \leq x) = P(-x \leq Q_n \leq x) = P(Q_n \leq x) - P(Q_n < -x)$

$P(|Q_n| \leq x) = P(Q_n \leq x) - P(-Q_n > x) \underset{\uparrow}{=} P(Q_n \leq x) - P(Q_n > x) = P(Q_n \leq x) - (1 - P(Q_n \leq x))$

Q_n et $-Q_n$ ont même loi

$P(|Q_n| \leq x) = 2P(Q_n \leq x) - 1$. Notons F_{Q_n} la fonction de répartition de Q_n.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F_{Q_n}(x) = P(Q_n \leq x) = \frac{1}{2}\left[P(|Q_n| \leq x)+1\right] = \frac{1}{2}\left[F_{|Q_n|}(x)+1\right]$.

Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$F_{Q_n}(x) = P(Q_n \leq x) = P(-Q_n \geq -x) = P(Q_n \geq -x) = 1 - P(Q_n < -x) \overset{P(Q_n=-x)=0}{=} 1 - P(Q_n \leq -x)$

$F_{Q_n}(x) = 1 - F_{Q_n}(-x) \overset{-x>0}{=} 1 - \frac{1}{2}\left[F_{|Q_n|}(-x)+1\right] = \frac{1}{2}\left[1 - F_{|Q_n|}(-x)\right]$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Q_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1+F_{|Q_n|}(x)\right] & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ \frac{1}{2}\left[1 - F_{|Q_n|}(-x)\right] & \text{sinon} \end{cases}.$$

$f_{|Q_n|}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $F_{|Q_n|}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F_{|Q_n|}'(x) = f_{|Q_n|}(x)$.

Or $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. $F_{|Q_n|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Alors par composition F_{Q_n} est C^1 sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, et continue sur $]-\infty,0[$ et $[0,+\infty[$.

F_{Q_n} est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et continue à droite en 0.

$$\lim_{x\to 0^-} F_{Q_n}(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\left[1 - F_{|Q_n|}(-x)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - F_{|Q_n|}(0)\right] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left[1 + F_{|Q_n|}(0)\right] = F_{Q_n}(0).$$

$F_{|Q_n|}(0) = \int_{-\infty}^{0} f_{|Q_n|}(t)\,dt = 0$.

F_{Q_n} est donc continue à gauche en 0.

Finalement F_{Q_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Cela suffit pour dire que <u>Q_n est une variable aléatoire à densité.</u>

$\forall x \in]-\infty,0[$, $F'_{Q_n}(x) = \frac{1}{2}\left[0 - (-F'_{|Q_n|}(-x))\right] = \frac{1}{2} F'_{|Q_n|}(-x) = \frac{1}{2} f_{|Q_n|}(-x)$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $F'_{Q_n}(x) = \frac{1}{2}\left[0 + F'_{|Q_n|}(x)\right] = \frac{1}{2} f_{|Q|}(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{Q_n}(x) = \frac{1}{2} f_{|Q_n|}(|x|)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{Q_n}(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x|^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$

<u>Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$.</u>

φ_n est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R}-\{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points avec F'_{Q_n}. Ainsi <u>φ_n est une densité de Q_n.</u>

c) Soit $r \in \mathbb{N}$.

→ $t \mapsto t^r \varphi_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

→ $t^r \varphi_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{t^r}{\frac{t^{n+1}}{n^{\frac{n+1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1-r}}$

→ $\forall t \in [0,+\infty[$, $t^r \varphi_n(t) \geq 0$.

Ainsi $\int_1^{+\infty} t^r \varphi_n(t)\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1-r}}$

Donc $\int_0^{+\infty} t^r \varphi_n(t)\,dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1-r}}$.

donc $\int_0^{+\infty} t^r \varphi_n(t)\,dt$ converge si et seulement si $n+1-r>1$ ou si et seulement si $n>r$.

$t \mapsto t^r \varphi_n(t)$ a la parité de r donc $\int_{-\infty}^0 t^r \varphi_n(t)\,dt$ a même nature que $\int_0^{+\infty} t^r \varphi_n(t)\,dt$.

Dans ces conditions $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r \varphi_n(t)\,dt$ converge si et seulement si $n>r$.

<u>$E(Q_n^r)$ existe si et seulement si $n>r$.</u>

<u>Remarque</u>.. Si $n>r$ et si r est impair $E(Q_n^r)$ existe et vaut 0 car $t \mapsto t^r \varphi_n(t)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

<u>d]</u> <u>$E(Q_n)$ existe si et seulement si $n>1$ et vaut 0 en cas d'existence</u>

d'après la remarque.

$V(Q_n)$ existe $\Leftrightarrow E(Q_n^2)$ existe $\Leftrightarrow n>2$. Supposons $n>2$.

$Q_n^2 = \frac{X_0^2}{\Pi_n}$, $X_0^2 \hookrightarrow \Gamma(2,\frac{1}{2})$ et $\Pi_n \hookrightarrow \Gamma(\frac{2}{n},\frac{n}{2})$.

<u>III</u> Q3 c] donne alors $E(Q_n^2) = \frac{2}{\frac{2}{n}} \times \frac{1/2}{\frac{n}{2}-1}$ car $\frac{n}{2}>1$

donc $E(Q_n^2) = \frac{n}{n-2}$. Or $E(Q_n)=0$ donc $V(Q_n) = \frac{n}{n-2}$.

<u>Exercice</u> .. Retrouver directement $E(Q_n^2)$ (en clair calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \varphi_n(t)\,dt$).

Q3 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $M_n \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{2}{n},\frac{n}{2}\right)$ donc $E(M_n)=\frac{2}{n}\times\frac{n}{2}=1$ et $V(M_n)=\left(\frac{2}{n}\right)^2\times\frac{n}{2}=\frac{2}{n}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors $P\left(|M_n-E(M_n)|\geq n^{-\frac{1}{3}}\right) \leq \frac{V(M_n)}{\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)^2}$.

Alors $P(|M_n-1|\geq n^{-1/3}) \leq \frac{2}{n\times n^{-2/3}} = \frac{2}{n^{1/3}} = 2n^{-1/3}$.

$$\underline{\underline{P(|M_n-1|\geq n^{-1/3}) \leq 2n^{-1/3}}}.$$

b) $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in[\![2,+\infty[\![$. Soit $\omega\in\{Q_n\leq x\}\cap\bar{A}$.

$\frac{X_0(\omega)}{\sqrt{M_n(\omega)}}\leq x$ et $X_0(\omega) > x\sqrt{1+n^{-1/3}}$

donc $x\sqrt{1+n^{-1/3}} < X_0(\omega) \leq x\sqrt{M_n(\omega)}$; $x\sqrt{1+n^{-1/3}} \leq x\sqrt{M_n(\omega)}$

En divisant par x ($x>0$) et en élevant au carré (toutes les quantités sont positives)

Il vient : $1+n^{-1/3} < M_n(\omega)$; $1+n^{-1/3}\leq M_n(\omega)$; $0<n^{-1/3}\leq M_n(\omega)-1$.

Alors $|M_n(\omega)-1| = M_n(\omega)-1 \geq n^{-1/3}$; $\omega\in\{|M_n-1|\geq n^{-1/3}\}$.

Par conséquent $\underline{\underline{\{Q_n\leq x\}\cap\bar{A} \subset \{|M_n-1|\geq n^{-1/3}\}}}$.

$(A,\bar{A})$ est un système complet d'événements donc.

$P(\{Q_n\leq x\}) = P(\{Q_n\leq x\}\cap A) + P(\{Q_n\leq x\}\cap\bar{A}) \leq P(\{Q_n\leq x\}\cap A) + P(|M_n-1|\geq n^{-1/3})$

$P(\{Q_n\leq x\}) \leq P(\{Q_n\leq x\}\cap A) + P(|M_n-1|\geq n^{-1/3}) \leq P(\{Q_n\leq x\}\cap A) + 2n^{-1/3}$.

$\{Q_n\leq x\}\cap A\subset A$ donc $P(\{Q_n\leq x\}\cap A)\leq P(A) = P(X_0\leq x\sqrt{1+n^{-1/3}}) = \Phi(x\sqrt{1+n^{-1/3}})$.

Alors $\underline{\underline{P(\{Q_n\leq x\})\leq\Phi(x\sqrt{1+n^{-1/3}})+2n^{-1/3}}}$.

$P(|M_n-1|\geq n^{-1/3})\leq 2n^{-1/3}$ donc $1-P(|M_n-1|<n^{-1/3})\leq 2n^{-1/3}$.

On a alors $P(|M_n-1|<n^{-1/3})\geq 1-2n^{-1/3}$ et $\Phi(x\sqrt{1-n^{-1/3}}) = P(X_0\leq x\sqrt{1-n^{-1/3}})\geq 0$

Alors $(1-2n^{-1/3})\,\Phi(x\sqrt{1-n^{-1/3}})\leq P(|M_n-1|<n^{-1/3})\,P(X_0\leq x\sqrt{1-n^{-1/3}})$.

$X_0, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes donc X_0 et $\Pi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ sont indépendantes.

Alors $(1-2n^{-1/3})\,\phi(x\sqrt{1-n^{-1/3}}) \le P(|\Pi_n-1| < n^{-1/3})\, P(X_0 \le x\sqrt{1-n^{-1/3}}) =$

$P(\{|\Pi_n-1|<n^{-1/3}\} \cap \{X_0 \le x\sqrt{1-n^{-1/3}}\})$.

Montrons alors que $\{|\Pi_n-1|<n^{-1/3}\} \cap \{X_0 \le x\sqrt{1-n^{-1/3}}\} \subset \{Q_n \le x\}$.

Nous aurons alors $(1-2n^{-1/3})\,\phi(x\sqrt{1-n^{-1/3}}) \le P(Q_n \le x)$.

Soit $\omega \in \{|\Pi_n-1|<n^{-1/3}\} \cap \{X_0 \le x\sqrt{1-n^{-1/3}}\}$

$-n^{-1/3} \le \Pi_n(\omega) - 1 \le n^{-1/3}$ et $X_0(\omega) \le x\sqrt{1-n^{-1/3}}$.

Donc $0 < 1-n^{-1/3} \le \Pi_n(\omega)$ et $X_0(\omega) \le x\sqrt{1-n^{-1/3}}$.

1er cas $X_0(\omega) < 0$. Alors $Q_n(\omega) = \dfrac{X_0(\omega)}{\sqrt{\Pi_n(\omega)}} \le 0 \le x$; $\omega \in \{Q_n \le x\}$.

2e cas $X_0(\omega) \ge 0$. $0 \le \dfrac{1}{\Pi_n(\omega)} \le \dfrac{1}{1-n^{-1/3}}$ car $0 < 1-n^{-1/3} \le \Pi_n(\omega)$ donc

$0 \le \dfrac{1}{\sqrt{\Pi_n(\omega)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1-n^{-1/3}}}$. De plus $0 \le X_0(\omega) \le x\sqrt{1-n^{-1/3}}$.

Par produit $Q_n(\omega) = \dfrac{X_0(\omega)}{\sqrt{\Pi_n(\omega)}} \le x$; $\omega \in \{Q_n \le x\}$.

Ceci achève de montrer que : $\underline{\underline{P(Q_n \le x) \ge (1-2n^{-1/3})\,\phi(x\sqrt{1-n^{-1/3}})}}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $(1-2n^{-1/3})\,\phi(x\sqrt{1-n^{-1/3}}) \le P(Q_n \le x) \le \phi(x\sqrt{1+n^{-1/3}}) + 2n^{-1/3}$

$\lim_{n\to+\infty}(x\sqrt{1-n^{-1/3}}) = x$, $\lim_{n\to+\infty}(x\sqrt{1+n^{-1/3}}) = x$ et ϕ est continue en x.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\left[(1-2n^{-1/3})\,\phi(x\sqrt{1-n^{-1/3}})\right] = 1 \times \phi(x) = \phi(x)$ et

$\lim_{n\to+\infty}\left(\phi(x\sqrt{1+n^{-1/3}}) + 2n^{-1/3}\right) = \phi(x) + 0 = \phi(x)$.

Il vient alors par encadrement $\lim_{n \to +\infty} P(Q_n \leq x) = \phi(x)$ et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Q_n \leq 0) = P\left(\frac{X_0}{\sqrt{\Pi_n}} \leq 0\right) = P(X_0 \leq 0) = \phi(0)$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} P(Q_n \leq 0) = \phi(0)$.

Soit $x \in]-\infty, 0[$. Rappelons que Q_n et $-Q_n$ ont même loi et que $\forall z \in \mathbb{R}$, $P(Q_n = z) = 0$.

Alors $P(Q_n \leq x) = P(-Q_n \leq x) = P(Q_n \geq -x) = 1 - P(Q_n < -x) = 1 - P(Q_n \leq -x)$.

Comme $-x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} P(Q_n \leq -x) = \phi(-x) = 1 - \phi(x)$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} P(Q_n \leq x) = 1 - (1 - \phi(x)) = \phi(x)$.

Finalement $\lim_{n \to +\infty} P(Q_n \leq x)$ pour tout tout réel x.

Donc $(Q_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

V INTERVALLE DE CONFIANCE POUR L'ESPÉRANCE ET LA VARIANCE D'UNE LOI NORMALE

$n \in [\![2,+\infty[\![$

(Q1) a) Un calcul simple montre que $J^2 = nJ$. Ainsi $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J dont les racines sont 0 et n. Ainsi les seules valeurs propres possibles de J sont 0 et n.

$\operatorname{rg} J = 1$ car toutes les colonnes de J sont égales à $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{rg} J < n$; J n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de J.

Notons que $\dim SEP(J,0) = n - \operatorname{rg} J = n-1$. Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$JX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n = 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ \cdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_n=0\end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots+x_n = 0.$$

$SEP(J,0)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0=(E_1,E_2,\dots,E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (nous retrouvons ainsi que $\dim SEP(J,0)=n-1$)

J est une matrice symétrique à coefficients réels donc J est diagonalisable.

Alors nécessairement J possède une seconde valeur propre qui est nécessairement n car $\operatorname{Sp} J \subset \{0,n\}$.

On a $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = SEP(J,0) \oplus SEP(J,n)$ et, $SEP(J,0)$ et $SEP(J,n)$ sont orthogonaux. Ainsi $SEP(J,n)$ est l'orthogonal de $SEP(J,0)$.

$SEP(J,0)$ étant l'hyperplan d'équation $x_1+\cdots+x_n=0$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée, $SEP(J,n)$ est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$. Posons $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. (U_n) est une base orthonormée de $SEP(J,n)$. Soit $(U_1,\dots,U_{n-1})$ une base orthonormée de $SEP(J,0)$.

Comme $SEP(J,0)$ et $SEP(J,n)$ sont orthogonaux et supplémentaires, $\mathcal{B}_1=(U_1,U_2,\dots,U_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J associés aux valeurs propres $0,0,\dots,0,n$. Soit $P=(p_{ij})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$.

<u>P est orthogonale</u> car $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ sont deux bases orthonormées et $\underline{\underline{P^{-1}JP=\mathrm{Diag}(0,0,\dots,0,n)}}$.

<u>Soit $j\in[\![1,n-1]\!]$</u> $U_j=\begin{pmatrix}p_{1,j}\\p_{2,j}\\\vdots\\p_{n,j}\end{pmatrix}$ $\perp U_j\in SEP(J,0)$ donc $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n}p_{i,j}=0}}$

$\begin{pmatrix}p_{1,n}\\p_{2,n}\\\vdots\\p_{n,n}\end{pmatrix}=U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ donc $\underline{\underline{\forall i\in[\![1,n]\!],\ p_{i,n}=\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.

${}^tP=(q_{i,j})$. Alors $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $q_{i,j}=p_{j,i}$.

$\forall i\in[\![1,n-1]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}q_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}p_{j,i}=0$. $\underline{\underline{\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ \sum_{j=1}^{n}q_{ij}=0}}$.

${}^tPP=I_n$ donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\sum_{\ell=1}^{n}q_{i,\ell}\,p_{\ell,j}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\0 & \text{sinon}\end{cases}$

Alors $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $1=\sum_{\ell=1}^{n}q_{i,\ell}\,p_{\ell,i}=\sum_{\ell=1}^{n}q_{i,\ell}\,q_{i,\ell}$

Par conséquent $\underline{\underline{\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{\ell=1}^{n}q_{i,\ell}^2=1}}$. $\underline{\underline{\forall j\in[\![1,n]\!],\ q_{n,j}=p_{j,n}=\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.

${}^tPAP=P^{-1}AP=P^{-1}\left(I_n-\frac{1}{n}J\right)P=P^{-1}I_nP-\frac{1}{n}P^{-1}JP=I_n-\frac{1}{n}P^{-1}JP.$

${}^tPAP=P^{-1}AP=\mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,1)-\frac{1}{n}\mathrm{Diag}(0,0,\dots,0,n)=\mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0).$

$\underline{\underline{{}^tPAP=P^{-1}AP=D \text{ avec } D=\mathrm{Diag}(1,1,\dots,1,0)}}$.

b) $\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = {}^tVV = {}^t(PU)PU = {}^tU\,{}^tPP\,U = {}^tU I_n U = {}^tUU = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$. $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2}}$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 - v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} q_{n,j}\, u_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n}(n\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\mu^2.$$

De plus $\sum_{i=1}^{n} (u_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 2\mu(n\mu) + n \times \mu^2$

Donc $\sum_{i=1}^{n} (u_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\mu^2$.

Finalement $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - n\mu^2 = \sum_{i=1}^{n} (u_i - \mu)^2}}$.

Q2 a) Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$.

- $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $X_\ell \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $Z_\ell = \frac{X_\ell - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes donc $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ le sont également.
- $(q_{i,1}, q_{i,2}, \cdots q_{i,n}) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ (dans le cas contraire la $i^{\text{ème}}$ ligne

de ${}^tP$ serait nulle et ainsi ${}^tP$ ne serait pas inversible).

Dans ces conditions $\underline{Y_i} = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} Z_j$ $\underline{\text{suit une loi normale}}$.

De plus $E(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, E(Z_j) = 0$; $\underline{E(Y_i) = 0}$.

Par indépendance $V(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} V(q_{i,j} Z_j) = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}^2\, V(Z_j) = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}^2 = 1$. $\underline{V(Y_i) = 1}$.

Alors, $\underline{\underline{\text{pour tout } i \text{ dans } [\![1,n]\!],\ Y_i = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} Z_j \text{ suit la loi normale centrée}}}$

$\underline{\underline{\text{réduite}}}$.

b) $Y_n = \sum_{j=1}^{n} q_{n,j} Z_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j - m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j - nm\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(n\overline{X}_n - nm)$

$Y_n = \frac{n}{\sigma\sqrt{n}}(\overline{X}_n - m)$; $\underline{\underline{Y_n = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}}}$.

Soit $\omega \in \Omega$. Posons $U = \begin{pmatrix} Z_1(\omega) \\ Z_2(\omega) \\ \vdots \\ Z_n(\omega) \end{pmatrix}$ et $V = {}^tPU$. Alors $V = \begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{pmatrix}$ car

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ $Y_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} Z_j$.

Q1 donne alors $\sum_{i=1}^{n-1} (Y_i(\omega))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i(\omega) - \frac{Z_1(\omega) + Z_2(\omega) + \cdots + Z_n(\omega)}{n}\right)^2$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Z_i - \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n} = \frac{X_i - m}{\sigma} - \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j - m}{\sigma}\right]$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Z_i - \frac{Z_1+Z_2+\cdots+Z_n}{n} = \frac{1}{\sigma}\left[X_i - m - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m}_{m}\right] = \frac{1}{\sigma}(X_i - \overline{X}) = \frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}$.

Alors $\sum_{i=1}^{n-1} (Y_i(\omega))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i(\omega) - \overline{X}(\omega)}{\sigma}\right)^2$ et ceci pour tout ω dans Ω.

Alors $\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$; $\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$; $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = T_n}}$.

$\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \times \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$.

$\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2}}$.

c) D'après ce qui est admis $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ sont indépendantes et pour tout i dans $[\![1,n-1]\!]$, Y_i suit la loi normale centrée réduite.

Alors $T_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$ suit la loi du chi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

$Y_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ sont indépendants et suivent toutes la loi normale centrée réduite alors IV montre que $\dfrac{Y_n}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2}}$ suit la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Or $\dfrac{Y_n}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2}} = \dfrac{\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S_n^2}{\sigma^2}}} = \dfrac{1}{\sigma/\sqrt{n}}(\overline{X}_n - m)\dfrac{\sigma}{\sqrt{S_n^2}} = \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{S_n^2/n}}$.

donc $\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{S_n^2/n}}$ suit la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

(Q3) a) φ_n est paire sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_n(-t) = \int_{-\infty}^{-t} \varphi_n(x)\,dx = \int_{t}^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx = 1 - \int_{-\infty}^{t} \varphi_n(x)\,dx = 1 - F_n(t)$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $F_n(-t) = 1 - F_n(t)$.

φ_n est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_n'(t) = \varphi_n(t) > 0$

Alors F_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{t \to -\infty} F_n(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_n(t) = 1$. F_n définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

$\alpha \in]0,1[$ donc $1 - \frac{\alpha}{2} \in]\frac{1}{2}, 1[\subset]0,1[$.

Ainsi $\exists !\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \in \mathbb{R}$, $F_n(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Montrons que $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ est strictement positif.

$F_n(0) = 1 - F_n(-0)$ donc $F_n(0) = \frac{1}{2}$. $F_n(0) = \frac{1}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} = F_n(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n))$.

F_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $0 < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$.

Ainsi il existe un réel strictement positif et un seul $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ tel que $F_n(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

b) Ici $n \in [\![2, +\infty[\![$. Rappelons que $\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{S_n^2/n}}$ suit la loi de Student à $n-1$ degré de liberté donc a pour fonction de répartition F_{n-1}.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $P\left(\left| \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{S_n^2/n}} \right| \leq \varepsilon \right) = F_{n-1}(\varepsilon) - F_{n-1}(-\varepsilon) = 2F_{n-1}(\varepsilon) - 1$

Posons $z = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$. $F_{n-1}(z) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ ou $2F_{n-1}(z) - 1 = 1 - \alpha$.

Alors $P\left(\left| \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{S_n^2/n}} \right| \leq z \right) = 1 - \alpha$.

$1 - \alpha = P\left(-z \leq \dfrac{\overline{X}_n - m}{S_n/\sqrt{n}} \leq z \right) = P\left(-z \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n - m \leq z \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right)$.

$1 - \alpha = P\left(\overline{X}_n - z \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X}_n + z \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right) = P\left(m \in \left[\overline{X}_n - z \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right] \right)$.

Rappelons que $z = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

Alors $P\left(m \in \left[\overline{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right] \right) = 1 - \alpha$.

$\left[\overline{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance de m à la confiance $1-\alpha$ ou au risque α.

Q4 a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t/2}\, t^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n/2}\, \Gamma(n/2)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\hat{f}_n$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi du chi-deux à n degrés de liberté. $\hat{f}_n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc G_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $G_n'(x) = \hat{f}_n(x)$. Notons que G_n est nulle sur $]-\infty, 0]$.

G_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $G_n'(x) = \hat{f}_n(x) > 0$.

G_n est continue sur $]0,+\infty[$ de plus strictement croissante.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} G_n(x) = G_n(0) = 0$ (G_n est continue sur $\mathbb{R}$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} G_n(x) = 1$.

Ainsi la restriction de G_n à $]0,+\infty[$ définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.

Comme $\varepsilon\in]0,1[$, il existe un réel strictement positif et un seul $\chi^2_\varepsilon(n)$ tel que

$G_n(\chi^2_\varepsilon(n)) = \varepsilon$.

b) $n\in[\![2,+\infty[\![$, $1-\frac{\alpha}{2}\in]0,1[$ (et même à $]\frac{1}{2},1[$) et $\frac{\alpha}{2}\in]0,1[$ (et même à $]0,\frac{1}{2}[$).

Ainsi $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (resp. $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$) est l'unique réel strictement positif tel que :

$G_{n-1}(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1-\frac{\alpha}{2}$ (resp. $G_{n-1}(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = \frac{\alpha}{2}$).

posons pour simplifier $u = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ et $v = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

Rappelons que $T_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ suit la loi du chi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

$$P\left(\sigma^2\in\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]\right) = P\left(\sigma^2\in\left[\frac{T_n\sigma^2}{u}, \frac{T_n\sigma^2}{v}\right]\right)$$

$$= P\left(\frac{T_n\sigma^2}{u}\leq\sigma^2\leq\frac{T_n\sigma^2}{v}\right)$$

$$= P(v\leq T_n\leq u) = G_n(u)-G_n(v) = 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} = 1-\alpha.$$

Donc $P\left(\sigma^2\in\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]\right) = 1-\alpha$

$\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 à la confiance $1-\alpha$

ou au risque α.