FONCTIONS CONVEXES

Dans tout le problème $< ., . >$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée

Une partie D de $\mathbb{R}^n$ est convexe si A et B étant deux points de D le segment joignant A et B (c'est à dire l'ensemble des $\lambda A + (1-\lambda)B$ lorque λ décrit $[0,1]$) est contenu dans D.
Si D est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de D dans $\mathbb{R}$, on dit que f est convexe sur D si :

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall (A,B) \in D^2,\ f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leqslant \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B).$$

f est concave sur D si $-f$ est convexe sur D.

I FONCTION CONVEXE D'UNE VARIABLE RÉLLE

Q1 I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que I est un convexe de $\mathbb{R}$.
b) On suppose que φ est convexe sur I. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Montrer en utilisant la définition (et deux passages à la limite) que :

$$\varphi'(a) \leqslant \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a} \leqslant \varphi'(b).$$

En déduire que φ' est croissante sur I..

b) On suppose que φ' est croissante sur I. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que φ est convexe sur I (après avoir traiter les cas $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $a = b$, on pourra supposer que $0 < \lambda < 1$ et que $a \neq b$).

c) On suppose φ deux fois dérivable sur I. Montrer que φ est convexe sur I si et seulement si φ'' est positive sur I.

Q2 Montrer que φ est convexe sur I si et seulement si :

$$\forall a \in I,\ \forall x \in I,\ \varphi(x) \geqslant \varphi'(a)(x-a) + \varphi(a)$$

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Q3 On suppose que φ est convexe sur I. Montrer que si φ' s'annule en un point x_0 de I, φ admet un minimum global en x_0.

II FONCTION CONVEXE DE PLUSIEURS VARIABLES

Dans cette partie Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Q1 Montrer que f est convexe sur Ω si et seulement si pour tout couple (A,B) d'éléments de Ω, $\varphi_{A,B} : t \to f(B + t(A-B))$ est définie et convexe sur $[0,1]$.

Q2 A et B sont deux points de Ω.
Montrer que $\varphi_{A,B}$ est dérivable sur $[0,1]$ et que pour tout élément t de $[0,1]$,

$$\varphi'_{A,B}(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(B + t(A-B)) = df_{B+t(A-B)}(A-B) =< \nabla f\big(B + t(A-B)\big), A - B > .$$

Q3 Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est convexe sur Ω.

ii) $\forall (A,X)\in\Omega^2,\ f(X)\geqslant f(A)+df_A(X-A)$ ou $f(X)\geqslant f(A)+<\nabla f(A),X-A>$

iii) $\forall (A,X)\in\Omega^2,\ df_X(X-A)\geqslant df_A(X-A)$ ou $\Big(<\nabla f(X),X-A>\Big)\geqslant\Big(<\nabla f(A),X-A>\Big)$

Q4 On suppose f convexe sur Ω. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des points A de Ω tels que :

$$\forall X\in\Omega,\ f(A)\leqslant f(X).$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est convexe.

b) Montrer qu'un élément A de Ω appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si A est un point critique de f.
Donner un résultat analogue pour une fonction concave.

Q5 On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

a) Soit (X,Y) un élément de Ω^2. Montrer que $\varphi_{X,Y}$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et calculer $\varphi''_{X,Y}$.

b) Montrer que f est convexe sur Ω si et seulement si :

$$\forall A\in\Omega,\ \forall H\in\mathbb{R}^n,\ {}^tHH(f,A)H\geqslant 0.$$

Q6 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^4+2x^2+2y^2-4xy+4x-4y+3$. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ et que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
Même chose avec $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^2+2xy+4y^2+x-2y$.

III FONCTION FORTEMENT CONVEXE.

Si D est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de D dans $\mathbb{R}$ on dit que f est fortement convexe sur D si :

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}^{+*},\ \forall\lambda\in[0,1],\ \forall (A,B)\in D^2,\ f(\lambda A+(1-\lambda)B)\leqslant\lambda f(A)+(1-\lambda)f(B)-\alpha\lambda(1-\lambda)\|A-B\|^2.$$

α est alors appelé un paramètre de convexité forte de f.

Q1 Montrer qu'une fonction fortement convexe est convexe.

Dans la suite Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Q2 On suppose ici que f est fortement convexe et que α est un paramètre de convexité forte de f.

a) Montrer que si A et B sont deux points de Ω :

$$\alpha\|A-B\|^2\leqslant df_A(A-B)-df_B(A-B)$$

(on pourra considérer le milieu C de $[A,B]$ et II Q3).

b) Montrer que si A et B sont deux points de Ω :

$$df_A(B-A)+\alpha\|A-B\|^2\leqslant f(B)-f(A).$$

c) On suppose Ω non borné. Montrer que $\displaystyle\lim_{\|X\|\to+\infty}f(X)=+\infty$, c'est à dire que :

$$\forall M\in\mathbb{R}^{+*},\ \exists L\in\mathbb{R}^{+*},\forall X\in\Omega,\ \|X\|\geqslant L\Rightarrow f(X)\geqslant M.$$

d) Montrer que si $\Omega=\mathbb{R}^n$, il existe un unique point A de Ω tel que $\forall X\in\Omega,\ f(A)\leqslant f(X)$.

Q3 Construire et démontrer une réciproque de Q2 b).

Q4 Ici f est fortement convexe sur $\mathbb{R}^n$, α est un paramètre de convexité forte de f et :

$$\exists K \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|\nabla f(X) - \nabla f(Y)\| \leqslant K\|X-Y\|.$$

On se propose d'approximer l'unique point A de $\mathbb{R}^n$ rendant f minimum.

Soit $(\lambda_p)_{p\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On considère la suite $(X_p)_{p\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ définies par :

$$X_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad X_{p+1} = X_p - \lambda_p \nabla f(X_p).$$

a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \|X_{p+1} - A\|^2 \leqslant (K^2\lambda_p^2 - 2\alpha\lambda_p + 1)\|X_p - A\|^2$.

b) On considère la fonction numérique de la variable réelle, $\psi : t \to K^2t^2 - 2\alpha t + 1$. Montrer qu'il existe un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall t \in [a,b], 0 \leqslant \psi(t) < 1$.

c) On suppose alors que $\forall p \in \mathbb{N}, \lambda_p \in [a,b]$.
Montrer qu'il existe un élément β de $[0,1[$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \|X_{p+1} - A\| \leqslant \beta\,\|X_p - A\|.$$

En déduire que la suite $(X_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers A.

d) Montrer que pour tout élément p de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant f(X_p) - f(A) \leqslant (K-\alpha)\|X_p - A\|^2$.