SUJET 2

• La partie I établit quatre résultats préparatoires ; les quatre questions sont indépendantes.

• La partie II fait calculer les coefficients de Fourier d'une fonction.

• La partie III donne une version faible du théorème de Dirichlet.

• La partie IV fournit l'égalité de Parceval et en donne une application.

Rappel : $2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$, $2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$ et $2\sin a\sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b)$.

Partie I

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}$. x et t sont deux réels. Montrer que :

$$\frac{1}{2}+\cos(t-x)+\cos(2(t-x))+\cdots+\cos(n(t-x)) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left[(2n+1)\left(\dfrac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\dfrac{t-x}{2}\right)} & \text{si } t-x\not\equiv 0\ [2\pi] \\ n+\dfrac{1}{2} & \text{si } t-x\equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

(on pourra poser $u=t-x$ pour simplifier les écritures).

Q2 $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ $(a<b)$ et f est une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$. On admettra que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Q3 f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Soit x un réel (x est fixé dans toute la question).

h est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(x)}{2\sin\left(\dfrac{t-x}{2}\right)} & \text{si } t-x\not\equiv 0\ [2\pi] \\ (-1)^k f'(x) & \text{si } t=x+k\times 2\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

On pose $\Delta=\{x+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}-\Delta$.

b) Soit k un élément de $\mathbb{Z}$. On pose $a=x+k\times 2\pi$.

Montrer que, si t appartient à $\mathbb{R}-\Delta$, $h(t)=(-1)^k\,\dfrac{f(t)-f(a)}{2\sin\left(\dfrac{t-a}{2}\right)}\cdot$ Montrer que $h(a)=(-1)^k f'(a)$.

Prouver que h est continue en a.

c) Soit k un élément de $\mathbb{Z}$. On pose encore $a=x+k\times 2\pi$.

i) Montrer que :

$$h'(t) \underset{a}{\sim} \frac{(-1)^k}{(t-a)^2}\left[2\Big(f'(t)-f'(a)\Big)\,\sin\left(\frac{t-a}{2}\right)\right] + \frac{(-1)^k}{(t-a)^2}\left[2f'(a)\,\sin\left(\frac{t-a}{2}\right) - \Big(f(t)-f(a)\Big)\,\cos\left(\frac{t-a}{2}\right)\right].$$

ii) Trouver $\displaystyle\lim_{t\to a}\left(\frac{(-1)^k}{(t-a)^2}\left[2\Big(f'(t)-f'(a)\Big)\,\sin\left(\frac{t-a}{2}\right)\right]\right)$.

iii) Donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de a des quatre fonctions $t \to f(t)$, $t \to \cos\left(\dfrac{t-a}{2}\right)$, $t \to \sin\left(\dfrac{t-a}{2}\right)$ et $t \to 2f'(a)\,\sin\left(\dfrac{t-a}{2}\right) - \Big(f(t)-f(a)\Big)\,\cos\left(\dfrac{t-a}{2}\right)$.

iv) Montrer proprement que : $\displaystyle\lim_{t\to a} h'(t) = \frac{(-1)^k}{2}\,f''(a)$.

v) Déduire de ce qui précède que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

Q4 a et b sont deux réels tels que $a<b$. $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de **fonctions** numériques continues sur $I=[a,b]$.

$(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs telle que :

- la série de terme général α_n converge.
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in I,\ |v_n(x)|\leqslant \alpha_n$.

a) Montrer que $S:\ x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ est définie sur I.

c est un élément de I. On se propose de montrer que S est continue en c. Soit ε un réel positif.

Montrer que l'on peut trouver r dans $\mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=r+1}^{+\infty}\alpha_k \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$.

En déduire que : $\forall x\in I,\ |S(x)-S(c)|\leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{r}|v_k(x)-v_k(c)|+\frac{\varepsilon}{2}$. Achever la démonstration.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t)\right)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n}\int_a^b v_k(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k$$

(on est prié de ne pas sauter d'étape).

c) En déduire que :

$$\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b v_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie II

Dans cette partie, on pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |\sin^3 x|$.

Q1 a) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à $[0, \frac{\pi}{2}]$. Etudier f sur ce dernier intervalle.

b) Donner l'allure de la représentation graphique de la restriction de f à $[-\pi, \pi]$.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q2 Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^3 x = \dfrac{3}{4} \sin x - \dfrac{1}{4} \sin(3x)$

Q3 On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t$ et $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer très simplement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 0$.

b) Utiliser de la parité puis le changement de variable $v = \pi - t$ pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = \dfrac{24}{\pi(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}$ (utiliser la parité et Q2).

Partie III

On revient au cas général. f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

On pose, pour tout élement n de $\mathbb{N}$, $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t$.

On pose encore : $\forall x \in \mathbb{R},\ u_0(x) = \dfrac{a_0(f)}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$.

On pose enfin : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

Q1 Montrer en utilisant I Q1 (ou 1Q I ! !) que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\, \mathrm{d}t.$$

Q2 Montrer en utilisant I Q1 que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\, \mathrm{d}t.$$

(oui il y a deux fois $f(x)$!).

Q3 Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\ \sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right] \mathrm{d}t$$

(où h est la fonction définie dans la partie I)

Montrer alors que : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

Partie IV

f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

Q1 a) n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $a_n(f) = -\dfrac{1}{n}\, b_n(f')$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{n}\, a_n(f')$.

En déduire, sans nouveau calcul, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $a_n(f'')$ et $b_n(f'')$.

b) En déduire qu'il existe un réel positif K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n(f)| \leqslant \frac{K}{n^2} \text{ et } |b_n(f)| \leqslant \frac{K}{n^2}.$$

c) Soit g une fonction numérique définie et continue sur $[-\pi, \pi]$ (... au moins).

Montrer en utilisant I Q4 et III Q3 que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

(on pourra poser $v_n = u_n\, g$; vérifier proprement les hypothèses d'application...).

Q2 g est ici une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Utiliser ce qui précède pour montrer que :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \frac{a_0(f)\, a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f)\, a_n(g) + b_n(f)\, b_n(g) \Big).$$

Q3 Dans cette question : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) = |\sin^3 x|$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 t\, \mathrm{d}t = \frac{5\pi}{8}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi^2 = \dfrac{8}{5} \left[\dfrac{32}{9} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{576}{[(4n^2-9)(4n^2-1)]^2} \right]$.