Dans la suite E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension n non nulle.

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si u est un endomorphisme de E, on appelle endomorphisme induit par u sur F, l'endomorphisme de F qui à tout élément x de F associe $u(x)$.

Dans la suite on se propose d'étudier les couples (u, v) d'endomorphismes de E vérifiant :

$$u \circ v - v \circ u = u \qquad (P)$$

PARTIE I

Q1 On appelle trace d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la somme de ses éléments diagonaux ; on la note $\mathrm{tr}(A)$

a) Montrer que la trace définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. En déduire que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace.

c) Soit f un endomorphisme de E et α un élément non nul de $\mathbb{K}$. Montrer qu'il n'existe pas d'automorphisme g de E tel que : $f + \alpha Id_E = g^{-1} \circ f \circ g$.

Q2 Soit u un endomorphisme de E et k un entier strictement positif.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u^k \subset \mathrm{Ker}\, u^{k+1}$ et que si $\mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^{k+1}$ alors $\mathrm{Ker}\, u^{k+1} = \mathrm{Ker}\, u^{k+2}$.

b) Enoncer sans démonstration des résultats analogues pour les images.

c) Montrer que si $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$ alors $\mathrm{Ker}\, u^k = \{0_E\}$.

Prouver que $\mathrm{Ker}\, u^n = \mathrm{Ker}\, u^{n+1}$. Enoncer sans démonstration des résultats analogues pour les images.

d) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u^n \bigoplus \mathrm{Im}\, u^n$.

PARTIE II

Soit (u, v) un couple d'endomorphismes de E vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$.

Q1 Montrer que u n'est pas bijectif et que la matrice de u relativement à une base quelconque de E a une trace nulle.

Q2 Examiner le cas $n = 1$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $n = 2$.

Q3 En utilisant des considérations matricielles, montrer que u^2 est l'endomorphisme nul.

Q4 On suppose ici que u n'est pas l'endomorphisme nul.

a) Quel est l'ensemble des éléments a de E tel que $(a, u(a))$ soit une base de E ?

On suppose que a est un élément de E tel que $\mathcal{B} = (a, u(a))$ soit une base de E. Ecrire la matrice de u dans cette base.

b) Déterminer par leurs matrices relativement à $\mathcal{B}$ les endomorphismes w de E tels que (u, w) vérifie (P). On notera W l'ensemble de ces endomorphismes. Montrer que les éléments de W sont diagonalisables.

c) Soit w_0 l'élément de W dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'ensemble des endomorphismes φ de E tels que $w_0 + \varphi$ appartienne à W est un sous espace vectoriel S de $\mathcal{L}(E)$. En donner la dimension et une base.

d) Soit w un élément donné de W. Déterminer par l'image qu'ils donnent d'une base de vecteurs propres de w les éléments t de $\mathcal{L}(E)$ tels que (t, w) ait la propriété (P). Quelle est la structure de l'ensemble des éléments T qu'ils constituent ? Quelle est la dimension de T ?

PARTIE III

On revient au cas général. (u, v) est un couple d'endomorphismes de E qui vérifie la propriété (P).

Q1 Montrer que, pour tout entier k strictement positif, on a :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$$

Q2 On se propose de montrer que u^n est l'endomorphisme nul. Supposons que la dimension de $\operatorname{Im} u^n$ n'est pas nulle.

Montrer que $\operatorname{Im} u^n$ est stable par u^n et v. On note alors f et g les endomorphismes induits par u^n et v sur $\operatorname{Im} u^n$.

Montrer que f est bijectif et exprimer $f \circ g - g \circ f$ en fonction de f. Conclure.

Dans la suite du problème, on suppose que $\operatorname{Ker} u$ *est de dimension* 1.

Q3 On se propose de montrer par récurrence sur k que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$.

Soit k un élément de $[\![1, n-1]\!]$ tel que $\dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$. Montrer que $\operatorname{Im} u^k$ est stable par u et que si h désigne l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u^k$ on a : $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} u^{k+1}$ et $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} u$.

En déduire que : $\dim(\operatorname{Im} u^{k+1}) = \dim(\operatorname{Im} u^k) - 1$ et achever la démonstration.

Q4 a) Quel est l'ensemble des éléments a de E tels que : $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit une base de E ?

Soit a un élément de E tel que $\mathcal{B} = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit une base de E. Ecrire la matrice de u et de u^k ($k \in [\![2, n-1]\!]$) dans cette base.

Quel sont parmi les éléments de $\mathcal{B}$ ceux qui constituent une base de $\operatorname{Ker} u^k$ ($k \in [\![2, n-1]\!]$).

b) Soit W l'ensemble des éléments w de $\mathcal{L}(E)$ tels que (u, w) vérifie la propriété (P). Déterminer par leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$ tous les éléments de W dont $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres ; on écrira une telle matrice en fonction de la valeur propre λ relative au dernier vecteur de $\mathcal{B}$.

Q5 Soit w_0 celui des endomorphismes ci-dessus relatif à $\lambda = 0$.

a) Montrer que l'ensemble des éléments φ de $\mathcal{L}(E)$ tels que $w_0 + \varphi$ appartienne à W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ dont $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une base.

b) En déduire la structure de W et écrire la forme générale des matrices relativement à $\mathcal{B}$ des éléments de W.

c) Montrer que les éléments de W sont tous diagonalisables et écrire le spectre d'un élément de W en fonction de celle de ses valeurs propres qui a la plus petite partie réelle.

Q6 Etendre à la dimension n les propriétés établies en dimension 2 à la question 4 d) de la partie II.
