Notations et rappels.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n ($n \geqslant 1$) sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et Id désigne l'application identique de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Selon le contexte, le chiffre 0 désigne le nombre 0 ou l'endomorphisme nul de E ou la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si u est un endomorphisme de E, on pose $u^0 = Id$ et, pour tout entier k strictement positif, on note u^k l'endomorphisme $u \circ u^{k-1}$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire si : $\forall x \in E \quad (x \in F \Rightarrow u(x) \in F)$.

Enfin, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, on appelle « endomorphisme induit par u sur F » l'endomorphisme de F qui, à tout élément x de F, associe $u(x)$.

Partie I

Dans les questions **1)** *et* **5)**, *on établit des résultats utilisés dans les parties suivantes.*

1) On rappelle que la trace d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale principale.

a) Vérifier que l'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associe sa trace est une forme linéaire.

b) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les matrices AB et BA ont la même trace.

c) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

On peut donc définir la trace d'un endomorphisme comme étant la trace de la matrice de cet endomorphisme relativement à n'importe quelle base de E.

d) Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ et soit α un élément non nul de $\mathbb{K}$. Montrer qu'il n'existe pas d'automorphisme g de E tel que :

$$f + \alpha Id = g^{-1} \circ f \circ g$$

2) Soit d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \quad d(P) = P'$.
(d est l'endomorphisme de dérivation.)

a) Déterminer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ puis pour tout $k > n$, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} d^k$. Préciser les inclusions et les égalités éventuelles entre ces ensembles.

b) Déterminer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ puis pour tout $k > n$, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} d^k$. Préciser les inclusions et les égalités éventuelles entre ces ensembles.

3) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$ est

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer H^2, H^3 et H^4.

b) Déterminer, en en donnant une base, les noyaux et les images de h, h^2, h^3 et h^4.

c) Vérifier que $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} h^2 \subset \operatorname{Ker} h^3 \subset \operatorname{Ker} h^4$ en précisant lesquelles de ces inclusions sont des égalités.

d) Vérifier que $\operatorname{Im} h^4 \subset \operatorname{Im} h^3 \subset \operatorname{Im} h^2 \subset \operatorname{Im} h$ en précisant lesquelles de ces inclusions sont des égalités.

4) Dans cette question, δ désigne un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{K}^n$, ($n \geqslant 2$), non nul et non bijectif.

a) Pourquoi peut-on affirmer que 0 est une valeur propre de δ ?
Justifier le fait que δ admet au moins une valeur propre non nulle.
On notera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) de δ, avec $\lambda_1 = 0$. On note E_i le sous-espace propre de δ relatif à la valeur propre λ_i.

b) Montrer que $\operatorname{Im} \delta = \bigoplus_{i=2}^{p} E_i$.

c) Montrer que $\operatorname{Im} \delta$ et $\operatorname{Ker} \delta$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

d) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\operatorname{Im} \delta^k = \operatorname{Im} \delta$ et $\operatorname{Ker} \delta^k = \operatorname{Ker} \delta$.

5) Soit u un élément de $\mathcal{L}(E)$ et soit k un entier positif ou nul.

a) Montrer que : $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$.

b) Montrer que : $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$.

c) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{p+1}$ et justifier que l'on a aussi $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{p+1}$.

d) Montrer que l'endomorphisme $\widetilde{u}$ induit par u dans $\operatorname{Im} u^p$ est bijectif.

e) En raisonnant par récurrence sur k, en déduire que, pour tout entier k tel que $k \geqslant p$, on a : $\operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^p$. Montrer alors que $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^p$.

f) Montrer que l'on a : $E = \operatorname{Ker} u^n \oplus \operatorname{Im} u^n$.

Partie II

Dans toute la suite du problème, on étudie les couples (u, v) d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient la propriété (P) suivante :

(P) $$u \circ v - v \circ u = u$$

Soit (u, v) un couple d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant la propriété (P).

1)a) Montrer que u n'est pas bijectif. (On pourra utiliser le résultat de la question **I.1.d**)

b) Montrer que la trace de u est nulle.

2) Déterminer tous les couples qui vérifient la propriété (P) dans le cas où $n = 1$.

3) On suppose que $n = 2$.

a) En tenant compte des deux résultats de **II.1**, donner la forme de la matrice A de u relativement à une base de E.
En déduire que $u^2 = 0$.

b) On suppose que u n'est pas l'endomorphisme nul. Quelle est alors la dimension de $\operatorname{Ker} u$?
Montrer que $\operatorname{Ker} u$ est stable par v et en déduire, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que v admet au moins une valeur propre réelle.

4) On suppose toujours que $n = 2$ et que u n'est pas l'endomorphisme nul.

a) Quel est l'ensemble des éléments a de E tels que $\big(a, u(a)\big)$ soit une base de E ? Soit $\mathcal{B}$ une base ainsi constituée.
Écrire la matrice U de u relativement à $\mathcal{B}$.

b) Déterminer par leur matrice W relativement à $\mathcal{B}$ les éléments w de $\mathcal{L}(E)$ tels que (u, w) ait la propriété (P) ; soit D l'ensemble qu'ils constituent.
Montrer que les éléments de D sont tous diagonalisables. Donner l'ensemble des valeurs propres d'un élément w de D en fonction de celle de ses valeurs propres qui a la plus petite partie réelle, et que l'on notera λ.

c) Soit w un élément donné de D. Montrer que l'ensemble des éléments φ de $\mathcal{L}(E)$ tels que $w + \varphi$ appartienne à D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ dont on donnera la dimension et une base.

d) Soit w un élément donné de D. Déterminer par l'image qu'ils donnent d'une base de vecteurs propres de w les éléments t de $\mathcal{L}(E)$ tels que (t, w) ait la propriété (P). Montrer que l'ensemble G qu'ils constituent est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser la dimension de G.

Partie III

On ne suppose plus que $n = 2$ et l'on désigne par (u, v) un couple d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie la propriété (P).

1) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, on a :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$$

2) On se propose de montrer que u^n est l'endomorphisme nul. Pour cela, on va raisonner par l'absurde et supposer que la dimension de $\operatorname{Im} u^n$ n'est pas nulle.

a) Montrer que $\operatorname{Im} u^n$ est stable par u^n et v.

b) En désignant par f et g les endomorphismes induits respectivement par u^n et v sur $\operatorname{Im} u^n$, montrer que f est bijectif, exprimer $f \circ g - g \circ f$ en fonction de f et en déduire une contradiction. Conclure.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\operatorname{Ker} u$ *est de dimension* 1.

3) On se propose de montrer, par récurrence sur k, que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$$

a) Soit k un élément de $[\![1, n-1]\!]$ tel que $\dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$.
Montrer que $\operatorname{Im} u^k$ est stable par u et que, si f désigne l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u^k$, on a :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u^{k+1} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Ker} u$$

b) En déduire que : $\quad \dim(\operatorname{Im} u^{k+1}) = \dim(\operatorname{Im} u^k) - 1$

c) Achever la démonstration par récurrence.

4) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, $\operatorname{Ker} u^k$ est stable par v. Montrer que les vecteurs non nuls de $\operatorname{Ker} u$ sont vecteurs propres de v et en déduire, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que v possède au moins une valeur propre réelle.

5)a) Justifier l'existence d'un élément a de E n'appartenant pas à $\operatorname{Ker}(u^{n-1})$. a désignant un tel élément, montrer que $\left(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\right)$ est une base de E. Soit $\mathcal{B}$ une base ainsi constituée.

b) Écrire la matrice U de u, puis celle de u^k $(1 < k < n)$ relativement à $\mathcal{B}$.
Donner une base de $\operatorname{Ker} u^k$ formée d'éléments de $\mathcal{B}$.

c) Soit D l'ensemble des éléments w de $\mathcal{L}(E)$ tels que (u, w) vérifie la propriété (P).
Déterminer par leur matrice W relativement à $\mathcal{B}$ tous les éléments w de D dont $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres ; on écrira une telle matrice en fonction de la valeur propre λ relative au dernier vecteur de $\mathcal{B}$.

6) Soit w_0 l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale :

$$W_0 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Justifier que $w_0 \in D$ et montrer que l'ensemble des éléments φ de $\mathcal{L}(E)$ tels que $w_0 + \varphi$ appartienne à D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ dont $\left(Id, u, \ldots, u^{n-1}\right)$ est une base. (on procédera par calcul matriciel)

b) Ecrire la forme générale des matrices relativement à $\mathcal{B}$ des éléments de D.

c) Montrer que les éléments de D sont tous diagonalisables et écrire l'ensemble des valeurs propres d'un élément de D en fonction de celle de ses valeurs propres qui a la plus petite partie réelle.

PARTIE I

Q1 Pour $\forall A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$, $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) • Tr est une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

• Soit $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$.

$Tr(\lambda A+B)=Tr\left((\lambda a_{ij}+b_{ij})\right)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}+b_{ii})=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\lambda Tr(A)+Tr(B)$.

ceci achève de montrer que <u>Tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.</u>

b) Soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$. Posons $C=AB=(c_{ij})$ et $D=BA=(d_{ij})$.

$Tr(AB)=Tr(C)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}d_{kk}=Tr(D)$
$=Tr(BA)$.

<u>$\forall(A,B)\in M_n(\mathbb{K})^2$, $Tr(AB)=Tr(BA)$.</u>

c) Soient A et B deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{K})$.
$\exists P\in GL_n(\mathbb{K})$, $B=P^{-1}AP$. $Tr(B)=Tr\left(P^{-1}(AP)\right)=Tr\left((AP)P^{-1}\right)=Tr(A)$.

<u>Deux matrices semblables ont même trace.</u>

d) Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et $\alpha\in\mathbb{K}^*$. Supposons que $g\in GL_n(\mathbb{K})$ et que $f+\alpha Id_E=g^{-1}\circ f\circ g$. Soit M la matrice de f dans une base de E et N la matrice de g dans cette même base. N est inversible et $M+\alpha I_n=N^{-1}MN$.
Alors $Tr(M+\alpha I_n)=Tr(N^{-1}MN)=Tr(M)$ ($N^{-1}MN$ et M sont semblables).
$Tr(M)+\alpha Tr(I_n)=Tr(M)$; $\alpha Tr(I_n)=0$; $n\alpha=0$; $n=0$ ou $\alpha=0$ ce qui est impossible.

<u>Si $f\in\mathcal{L}(E)$ et si $\alpha\in\mathbb{K}^*$ il n'existe pas d'automorphisme g de E tel que $f+\alpha Id_E=g^{-1}\circ f\circ g$.</u>

⚠ Notons que l'hypothèse dim $E=n\neq 0$ a été fort utile ...

Q2 a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

$P \in \operatorname{Ker} d^k \Leftrightarrow d^k(P) = 0_{\mathbb{K}_n[X]} \Leftrightarrow P^{(k)} = 0_{\mathbb{K}_n[X]} \Leftrightarrow \deg P \leq k-1$.

$P \in \operatorname{Ker} d^k \Leftrightarrow \deg P \leq k-1 \Leftrightarrow P \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \operatorname{Ker} d^k = \mathbb{K}_{k-1}[X]$. $\operatorname{Ker} d^0 = \operatorname{Ker} \operatorname{Id}_{\mathbb{K}_n[X]} = \{0_{\mathbb{K}_n[X]}\}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$.

$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ d^k(P) = P^{(k)} = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$

Ainsi $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \operatorname{Ker} d^k = \mathbb{K}_n[X]$.

La suite $(\operatorname{Ker} d^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est strictement croissante au sens de l'inclusion.

La suite $(\operatorname{Ker} d^k)_{k \in [\![n+1,+\infty[\![}$ est constante. Même chose pour la suite $(\operatorname{Ker} d^k)_{k \in [\![0,n+1]\!]}$

Notons au cas que $\operatorname{Ker} d^n \subsetneq \operatorname{Ker} d^{n+1}$.

b) $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \operatorname{Ker} d^k = \mathbb{K}_n[X]$ donc $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \operatorname{Im} d^k = \{0_{\mathbb{K}_n[X]}\}$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$\operatorname{Im} d^k = d^k(\operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^n)) = \operatorname{Vect}(d^k(1), d^k(X), \dots, d^k(X^n))$

$\operatorname{Im} d^k = \operatorname{Vect}\left(0, 0, \dots, 0, k!, \frac{(k+1)!}{1!} X, \frac{(k+2)!}{2!} X^2, \dots, \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}\right)$

$\operatorname{Im} d^k = \operatorname{Vect}\left(k!, \frac{(k+1)!}{1!} X, \dots, \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}\right) = \operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^{n-k}) = \mathbb{K}_{n-k}[X]$.

$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \operatorname{Im} d^k = \mathbb{K}_{n-k}[X]$ et $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \operatorname{Im} d^k = \{0_{\mathbb{K}_n[X]}\}$.

Ainsi la suite $(\operatorname{Im} d^k)_{k \in [\![0,n+1]\!]}$ est strictement décroissante au sens de l'inclusion.

$(\operatorname{Im} d^k)_{k \in [\![n+1,+\infty[\![}$ est constante.

Q3) Notons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

a) $H^2=\begin{pmatrix}2&-4&2&0\\2&-2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $H^3=\begin{pmatrix}0&-4&4&0\\2&-4&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ et $H^4=\begin{pmatrix}-4&0&4&0\\0&-4&4&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

b) $\operatorname{Im} h=\operatorname{Vect}(h(e_1),h(e_2),h(e_3),h(e_4))=\operatorname{Vect}(2e_1+e_2,-2e_2,e_1+e_3+e_4,-e_1-e_2-e_3-e_4)$

c) $\operatorname{Im} h=\operatorname{Vect}(2e_1+e_2,e_2,e_1+e_3+e_4,e_2)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_1+e_3+e_4)$.

d) $\operatorname{Im} h=\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3+e_4)$. La famille (e_1,e_2,e_3+e_4) est clairement libre donc $\dim \operatorname{Im} h=3$. Alors $\dim \operatorname{Ker} h=1$. Or $h(e_1)+h(e_2)+h(e_3)+h(e_4)=0$.

donc $h(e_1+e_2+e_3+e_4)=0$; $e_1+e_2+e_3+e_4\in \operatorname{Ker} h$, $e_1+e_2+e_3+e_4\neq 0_E$ et $\dim \operatorname{Ker} h=1$. Ainsi $\operatorname{Ker} h=\operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4)$.

$\operatorname{Im} h^2=\operatorname{Vect}(h^2(e_1),h^2(e_2),h^2(e_3),h^2(e_4))=\operatorname{Vect}(2e_1+2e_2,-4e_1-2e_2,2e_1)$

$\operatorname{Im} h^2=\operatorname{Vect}(e_1+e_2,2e_1+e_2,e_1)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$. $\operatorname{Im} h^2=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$.

(e_1,e_2) est une famille libre donc $\dim \operatorname{Im} h^2=2$.

Alors $\dim \operatorname{Ker} h^2=2$. Or $h^2(e_4)=0_E$ et $h^2(e_1+e_2+e_3)=0_E$.

Clairement $(e_1+e_2+e_3,e_4)$ est une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Ker} h^2$ et $\dim \operatorname{Ker} h^2=2$. $(e_1+e_2+e_3,e_4)$ est une base de $\operatorname{Ker} h^2$.

$\operatorname{Ker} h^2=\operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3,e_4)$.

Pareillement $\operatorname{Im} h^3=\operatorname{Vect}(2e_2,-4e_1-4e_2,4e_1+2e_2)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$ et

$\operatorname{Im} h^4=\operatorname{Vect}(-4e_1,-4e_2,4e_1+4e_2)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$.

Ainsi $\operatorname{Im} h^4=\operatorname{Im} h^3=\operatorname{Im} h^2=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)\subsetneq\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3+e_4)=\operatorname{Im} h$.

Notons qu'alors $\dim \operatorname{Ker} h^3=\dim \operatorname{Ker} h^4=2$.

Observons que $h^3(e_1+e_2+e_3)=h^4(e_1+e_2+e_3)=h^3(e_4)=h^4(e_4)=0_E$.

$(e_1+e_2+e_3, e_4)$ est une famille libre de deux éléments de $\mathrm{Ker}\, \ell^3$ (resp. $\mathrm{Ker}\, \ell^4$) et $\dim \mathrm{Ker}\, \ell^3 = 2$ (resp. $\dim \mathrm{Ker}\, \ell^4 = 2$).

Alors $(e_1+e_2+e_3, e_4)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, \ell^3$ (resp. $\mathrm{Ker}\, \ell^4$).

Finalement $\underline{\underline{\mathrm{Ker}\, \ell = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4) \subsetneq \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3, e_4) = \mathrm{Ker}\, \ell^2 = \mathrm{Ker}\, \ell^3 = \mathrm{Ker}\, \ell^4}}$.

Q4) a) s n'est pas bijectif, s est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et $\dim \mathbb{K}^n = n < +\infty$, ainsi s n'est pas injectif ; $\mathrm{Ker}\, s \neq \{0_E\}$. $\underline{\underline{0 \text{ est valeur propre de } s.}}$

s est diagonalisable. Supposons que s possède pour seule valeur propre 0. Alors $\mathbb{K}^n = SEP(s,0) = \mathrm{Ker}\, s$. Ainsi $s = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi $\underline{\text{s admet au moins une valeur propre non nulle}}$.

b) Soit $i \in [\![2,p]\!]$. Soit $x \in E_i$. $s(x) = \lambda_i x$ et $\lambda_i \neq 0$, $x = \frac{1}{\lambda_i} s(x) = s\left(\frac{1}{\lambda_i} x\right)$, donc $x \in \mathrm{Im}\, s$.

Alors $\forall i \in [\![2,p]\!]$, $E_i \subset \mathrm{Im}\, s$ et $\mathrm{Im}\, s$ est un sous-espace vectoriel.

Par conséquent $\sum_{i=2}^{p} E_i \subset \mathrm{Im}\, s$; mieux $\bigoplus_{i=2}^{p} E_i \subset \mathrm{Im}\, s$ car $E_2, \dots, E_p$ sont en somme directe comme sous-espaces propres de s.

Réciproquement soit $x \in \mathrm{Im}\, s$. $\exists t \in \mathbb{K}^n$, $x = s(t)$.

$\exists (t_1, t_2, \dots, t_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, $t = t_1 + t_2 + \dots + t_p$.

$$x = s(t) = s(t_1) + s(t_2) + \dots + s(t_p) \underset{\uparrow}{=} \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_p t_p \in \bigoplus_{i=2}^{p} E_i.$$

$s(t_1) = 0_{\mathbb{K}^n}$ car $E_1 = SEP(s,0)$

donc $\mathrm{Im}\, s \subset \bigoplus_{i=2}^{p} E_i$

Finalement $\underline{\underline{\mathrm{Im}\, s = \bigoplus_{i=2}^{p} E_i}}$

c) $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont en somme directe.

$E_2, E_3, \dots, E_p, E_1$ également. Alors $E_2 + \dots + E_p \cap E_1 = \{0_{K^n}\}$.

Donc $\operatorname{Im} \delta \cap \operatorname{Ker} \delta = \{0_{K^n}\}$.

De plus $\dim \operatorname{Im} \delta + \dim \operatorname{Ker} \delta = \dim K^n < +\infty$.

Ainsi $\operatorname{Im} \delta$ et $\operatorname{Ker} \delta$ sont supplémentaires.

Variante :
$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E_1 \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{p} E_i \right)$
Alors $E = \operatorname{Ker} \delta \oplus \operatorname{Im} \delta$

d) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in K^n$.

Si $x \in \operatorname{Ker} \delta$, $\delta(x) = 0_{K^n}$ donc $\delta^\ell(x) = \delta^{\ell-1}(0_{K^n}) = 0_{K^n}$ et $x \in \operatorname{Ker} \delta^\ell$.

Réciproquement soit $x \in \operatorname{Ker} \delta^\ell$. $\exists (t_1, \dots, t_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, $x = t_1 + \dots + t_p$

$0_{K^n} = \delta^\ell(x) = \delta^\ell\left(\sum_{i=1}^{p} t_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \delta^\ell(t_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^\ell t_i = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i^\ell t_i$.

Notons que $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $\lambda_i^\ell t_i \in E_i$ et $\lambda_i^\ell \neq 0$.

Notons aussi que la somme $E_2 + \dots + E_p$ est directe.

Alors $\sum_{i=2}^{p} \lambda_i^\ell t_i = 0_{K^n}$ donne $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $\lambda_i^\ell t_i = 0_{K^n}$ ou $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $t_i = 0_{K^n}$. Alors $x = t_1 \in E_1 = \operatorname{Ker} \delta$.

Finalement $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker} \delta^\ell = \operatorname{Ker} \delta$.

Alors $\dim \operatorname{Im} \delta^\ell = \dim K^n - \dim \operatorname{Ker} \delta^\ell = \dim K^n - \dim \operatorname{Ker} \delta = \dim \operatorname{Im} \delta$.

De plus $\delta^{\ell-1}(K^n) \subset K^n$ donc $\operatorname{Im} \delta^\ell = \delta(\delta^{\ell-1}(K^n)) \subset \delta(K^n) = \operatorname{Im} \delta$.

Ainsi $\operatorname{Im} \delta^\ell \subset \operatorname{Im} \delta$ et $\dim \operatorname{Im} \delta^\ell = \dim \operatorname{Im} \delta < +\infty$.

Alors $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im} \delta^\ell = \operatorname{Im} \delta$.

Q5 a) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Soit $x \in E$. Si $u^\ell(x) = 0_E$: $u^{\ell+1}(x) = u(u^\ell(x)) = u(0_E) = 0_E$.

Donc si $x \in \operatorname{Ker} u^\ell$ alors $x \in \operatorname{Ker} u^{\ell+1}$

$\operatorname{Ker} u^\ell \subset \operatorname{Ker} u^{\ell+1}$.

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. $u(E) \subset E$ donc $u^\ell(u(E)) \subset u^\ell(E)$; $u^{\ell+1}(E) \subset u^\ell(E)$.

Ainsi $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} u^{\ell+1} \subset \operatorname{Im} u^\ell$.

c) Supposons que $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\operatorname{Ker} u^p \neq \operatorname{Ker} u^{p+1}$.

Alors $\forall p \in [\![0,n]\!]$ $\operatorname{Ker} u^p \subsetneq \operatorname{Ker} u^{p+1}$.

Donc $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^p < \dim \operatorname{Ker} u^{p+1}$.

Alors $0 \leq \dim \operatorname{Ker} u^0 < \dim \operatorname{Ker} u < \dim \operatorname{Ker} u^2 < \dots < \dim \operatorname{Ker} u^n < \dim \operatorname{Ker} u^{n+1} \leq n$.

Ainsi $\dim \operatorname{Ker} u^0, \dim \operatorname{Ker} u, \dots, \dim \operatorname{Ker} u^{n+1}$ sont $n+2$ éléments distincts de $[\![0,n]\!]$ qui est de cardinal $n+1$.

Ainsi $\exists p \in [\![0,n]\!]$, $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{p+1}$.

$\dim \operatorname{Ker} u^p = \dim \operatorname{Ker} u^{p+1}$. Le théorème du rang donne alors $\dim \operatorname{Im} u^p = \dim \operatorname{Im} u^{p+1}$. Or $\operatorname{Im} u^{p+1} \subset \operatorname{Im} u^p$ et $\dim \operatorname{Im} u^p < +\infty$.

Ainsi $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^{p+1}$.

d) $\operatorname{Im} \tilde{u} = \tilde{u}(\operatorname{Im} u^p) = \tilde{u}(u^p(E)) = u(u^p(E)) = u^{p+1}(E) = \operatorname{Im} u^{p+1} = \operatorname{Im} u^p$.

Ainsi $\tilde{u}$ est un endomorphisme surjectif de $\operatorname{Im} u^p$ et $\dim \operatorname{Im} u^p < +\infty$.

$\tilde{u}$ est donc bijectif. $\tilde{u}$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} u^p$.

e) Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![p,+\infty[\![$, $\operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^p$.

→ c'est clair pour $k=p$.

→ supposons la propriété vraie pour $k \in [\![p,+\infty[\![$ et montrons la pour $k+1$. $\operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^p$.

Alors $\tilde{u}(\operatorname{Im} u^k) = \tilde{u}(\operatorname{Im} u^p) = \operatorname{Im} u^p$

Donc $\operatorname{Im} u^p = \tilde{u}(\operatorname{Im} u^k) = \tilde{u}(u^k(E)) = u(u^k(E)) = u^{k+1}(E) = \operatorname{Im} u^{k+1}$

Donc $\mathrm{Im}\, u^{k+1} = \mathrm{Im}\, u^p$ ce qui achève la récurrence.

$\forall k \in [\![p, +\infty [\![, \ \mathrm{Im}\, u^k = \mathrm{Im}\, u^p$.

Soit $k \in [\![p, +\infty [\![$. $\dim \mathrm{Im}\, u^k = \dim \mathrm{Im}\, u^p$.
Le théorème du rang donne alors $\dim \mathrm{Ker}\, u^k = \dim \mathrm{Ker}\, u^p$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u^p$. $u^k(x) = u^{k-p}(u^p(x)) = u^{k-p}(0_E) = 0_E$; $x \in \mathrm{Ker}\, u^k$.
Alors $\mathrm{Ker}\, u^p \subset \mathrm{Ker}\, u^k$ et $\dim \mathrm{Ker}\, u^p = \dim \mathrm{Ker}\, u^k < +\infty$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, u^p = \mathrm{Ker}\, u^k$.

$\forall k \in [\![p, +\infty [\![, \ \mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^p$.

c) $\dim \mathrm{Ker}\, u^n + \dim \mathrm{Im}\, u^n = \dim E$ grâce au théorème du rang.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u^n \cap \mathrm{Im}\, u^n$. $u^n(x) = 0_E$ et $\exists t \in E$, $x = u^n(t)$.
Alors $u^{2n}(t) = u^n(x) = 0$. $t \in \mathrm{Ker}\, u^{2n}$.
Or $n \geq p$ et $2n \geq p$ donc $\mathrm{Ker}\, u^n = \mathrm{Ker}\, u^p = \mathrm{Ker}\, u^{2n}$.
Comme $t \in \mathrm{Ker}\, u^{2n}$: $t \in \mathrm{Ker}\, u^n$. Ainsi $x = u^n(t) = 0_E$; $x = 0_E$.
Par conséquent $\mathrm{Ker}\, u^n \cap \mathrm{Im}\, u^n = \{0_E\}$. Finalement

$E = \mathrm{Ker}\, u^n \oplus \mathrm{Im}\, u^n$.

Q1 a) Supposons que u est bijectif.

Alors $u \circ v - v \circ u = u$ donne : $u^{-1} \circ u \circ v - u^{-1} \circ v \circ u = u^{-1} \circ u = Id_E$

Ainsi $v - Id_E = u^{-1} \circ v \circ u$; $v + (-1) Id_E = u^{-1} \circ v \circ u$. Comme $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E \geq 1$ et que $(-1) \neq 0$ d'après I Q1 d) $v - Id_E = u^{-1} \circ v \circ u$ est impossible. Ainsi <u>u n'est pas bijectif.</u>

b) $u \circ v - v \circ u = u$. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.

Posons $A = \Pi_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \Pi_{\mathcal{B}}(v)$. $AB - BA = A$.

Alors $Tr(u) = Tr(A) = Tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$

Ainsi <u>$Tr\, u = 0$.</u>

Q2 $\boxed{\text{Ici } n=1}$ Soit $\mathcal{B} = (a)$ une base de E ($\dim E = n = 1$!). Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$.

$\Pi_{\mathcal{B}}(u) = (\alpha)$ et $\Pi_{\mathcal{B}}(v) = (\beta)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

Notons que $(\alpha) = \Pi_{\mathcal{B}}(u)$ et $(\alpha) = \Pi_{\mathcal{B}}(\alpha Id_E)$ ainsi $u = \alpha Id_E$.

De même $v = \beta Id_E$.

Alors $u \circ v - v \circ u = u \Leftrightarrow (\alpha Id_E) \circ (\beta Id_E) - (\beta Id_E) \circ (\alpha Id_E) = \alpha Id_E$.

$u \circ v - v \circ u = u \Leftrightarrow (\alpha\beta - \beta\alpha) Id_E = \alpha Id_E \underset{Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ !! } (\dim E \geq 1 !)}{\Leftrightarrow} \alpha\beta - \beta\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$

$u \circ v - v \circ u = u \Leftrightarrow u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors <u>$\{(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\} = \{(0_{\mathcal{L}(E)}, v) ; v \in \mathcal{L}(E)\}$</u>

<u>lorsque $\dim E = 1$.</u>

Q3 $\boxed{\text{Ici } n=2}$ a) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Posons $A = \Pi_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. $Tr\, A = Tr\, u = 0$ donc $a + d = 0$; $d = -a$.

A n'est pas inversible car u n'est pas inversible. Ainsi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$

donc <u>$d = -a$ et $ad - bc = 0$.</u> <u>$\Pi_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $d = -a$ et $ad - bc = 0$.</u>

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb+d^2 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que $a+d=0$ et $ad-bc=0$.

Alors $d=-a$, $a^2+bc=-ad+bc=-(ad-bc)=0$ et $d^2+bc=-ad+bc=0$.

Finalement $A^2=0$. Ainsi $\underline{\underline{u^2=0_{\mathcal{L}(E)}}}$.

b) Supposons que $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $\operatorname{Ker} u \subsetneq E$.

Ainsi $\dim \operatorname{Ker} u < \dim E$; $\dim \operatorname{Ker} u \leq 2$. Or u n'est pas bijectif

donc $\operatorname{Ker} u \neq \{0_E\}$. Finalement $1 \leq \dim \operatorname{Ker} u \leq 1$.

$\underline{\underline{\dim \operatorname{Ker} u = 1.}}$

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. $u(v(x)) - v(u(x)) = u(x)$; $u(v(x)) - 0_E = 0_E$; $u(v(x)) = 0_E$

Ainsi $\forall x \in \operatorname{Ker} u$, $v(x) \in \operatorname{Ker} u$. $\underline{\underline{\operatorname{Ker} u \text{ est stable par } v.}}$

$\operatorname{Ker} u$ est une droite vectorielle. Soit (x_0) une base de $\operatorname{Ker} u$. $x_0 \neq 0_E$ et

$v(x_0) \in \operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(x_0)$; $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $v(x_0) = \lambda x_0$ et $x_0 \neq 0_E$.

Ainsi $\underline{\underline{v \text{ admet au moins une valeur propre.}}}$

$\underline{\underline{\text{Si } \mathbb{K}=\mathbb{R}, \ v \text{ admet au moins une valeur propre réelle !!}}}$

(Q4) Ici encore $n=2$

a) Soit $a \in E$. Notons que si $(a, u(a))$ est une base de E, $u(a)$ n'est pas nul et $a \notin \operatorname{Ker} u$.

Réciproquement supposons que $a \notin \operatorname{Ker} u$.

Montrons que $(a, u(a))$ est une base de E. Il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha a + \beta u(a) = 0_E$.

$\alpha u(a) + \beta u^2(a) = 0_E$; $\alpha u(a) = 0_E$; $\alpha = 0$ car $u(a) \neq 0_E$.

Alors $\beta u(a) = 0_E$ avec $u(a) \neq 0_E$ donc $\beta = 0$. Ceci achève de montrer que $(a, u(a))$ est une base de E.

Finalement, si $a \in E$: $(a, u(a))$ est une base de E si et seulement si $a \notin \operatorname{Ker} u$.

On $\{a \in E \mid (a, u(a)) \text{ base de } E\} = E \setminus \operatorname{Ker} u$.

Soit $a \in E \setminus \operatorname{Ker} u$. $\mathcal{B} = (a, u(a))$ est une base de E. Posons $U = \Pi_{\mathcal{B}}(u)$

$u(a) = 1 \cdot u(a)$ et $u^2(a) = 0_E$ donc $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $a \in E \setminus \operatorname{Ker} u$ et si $\mathcal{B} = (a, u(a))$: $U = \Pi_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $a \in E \setminus \operatorname{Ker} u$. $\mathcal{B}$ est de nouveau la base $(a, u(a))$.

Soit $w \in \mathcal{L}(E)$ et W sa matrice dans $\mathcal{B}$.

$\exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{K}^4$ tel que $W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

$UW - WU - U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$UW - WU - U = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ \alpha - \delta - 1 & \beta \end{pmatrix}$.

On (u, w) $w \in D$

$\Updownarrow$ (u, w) vérifie (P)

$\Updownarrow$ $u \circ w - w \circ u = u$

$\Updownarrow$ $UW - WU = U$

$\Updownarrow$ $UW - WU - U = 0$

$\Updownarrow$ $\begin{cases} -\beta = 0 \\ \alpha - \delta - 1 = 0 \text{ et } \beta = 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$ $\beta = 0$ et $\alpha = \delta + 1$.

Alors $D = \left\{ w \in \mathcal{L}(E) \mid \exists (\gamma, \delta) \in \mathbb{K}^2,\ \Pi_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \delta+1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\}$.

$D = \left\{ w \in \mathcal{L}(E) \mid \exists (\gamma, \delta) \in \mathbb{K}^2,\ \Pi_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta I_2 + \gamma U \right\}$

Soit $w \in D$. $\exists (\gamma, \delta) \in \mathbb{K}^2$. $\Pi_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \delta+1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Sp} w = \operatorname{Sp} \begin{pmatrix} \delta+1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \{\delta + 1, \delta\}$.

ω admet deux valeurs propres distinctes et $\dim E = 2$ donc ω est diagonalisable.

$Re(\delta+1) = Re(\delta) + 1 > Re(\delta)$.

Alors δ est la valeur propre de ω qui a la plus petite partie réelle et l'autre valeur propre de ω est $\delta+1$. Concluons.

<u>Soit $\omega \in D$</u> ‖ 1) ω est diagonalisable
2) ω admet deux valeurs propres distinctes.
3) Si λ est la valeur propre de ω qui a la plus petite partie réelle, l'autre est $\lambda+1$.

<u>c)</u> Soit $\omega \in D$. Reprenons la base $\mathcal{B} = (a, u(a))$ avec $a \in E - \mathrm{Ker}\, u$.

$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \exists \delta \in \mathbb{K}, \quad W = M_{\mathcal{B}}(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ \delta & \lambda \end{pmatrix}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Notons M la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

$\omega + \varphi \in D$

$\Updownarrow$ $\exists (\delta', \lambda') \in \mathbb{K}^2, \quad M_{\mathcal{B}}(\omega+\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda'+1 & 0 \\ \delta' & \lambda' \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$ $\exists (\delta', \lambda') \in \mathbb{K}^2, \quad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda'+1 & 0 \\ \delta' & \lambda' \end{pmatrix} - M_{\mathcal{B}}(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda'+1 & 0 \\ \delta' & \lambda' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ \delta & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda'-\lambda & 0 \\ \delta'-\delta & \lambda'-\lambda \end{pmatrix}$

on? $\Updownarrow$ $\exists (\delta'', \lambda'') \in \mathbb{K}^2, \quad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda'' & 0 \\ \delta'' & \lambda'' \end{pmatrix} = \lambda'' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta'' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$ $\exists (\delta'', \lambda'') \in \mathbb{K}^2, \quad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \lambda'' I_2 + \delta'' U = \lambda'' M_{\mathcal{B}}(Id_E) + \delta'' M_{\mathcal{B}}(u)$

$\Updownarrow$ $\exists (\delta'', \lambda'') \in \mathbb{K}^2, \quad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\lambda'' Id_E + \delta'' u)$.

$\Updownarrow$ $\exists (\delta'', \lambda'') \in \mathbb{K}^2, \quad \varphi = \lambda'' Id_E + \delta'' u$

$\Updownarrow$ $\varphi \in \mathrm{Vect}(Id_E, u)$.

<u>Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\quad \omega + \varphi \in D \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{Vect}(Id_E, u)$.</u>

Ainsi <u>l'ensemble des éléments φ de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\omega+\varphi$ appartient à D</u>

<u>est le sous-espace vectoriel engendré par (Id_E, u).</u>

Notons que (Id_E, u) est libre. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ tel que $\alpha\, Id_E+\beta u=0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\alpha a+\beta u(a)=0_E$. Or $(a, u(a))$ est libre donc $\alpha=\beta=0$.

<u>(Id_E, u) est une base du sous-espace vectoriel $\{\varphi\in\mathcal{L}(E) \mid \omega+\varphi\in D\}$ qui est de dimension 2.</u>

<u>Remarque.</u> – D est le plan affine qui passe par φ et qui a pour direction $\mathrm{Vect}(Id_E, u)$... disent les initiés.

<u>d)</u> Soit $\omega\in D$. Soit λ la valeur propre de ω de plus petite partie réelle ; l'autre valeur propre de ω est $\lambda+1$.

Reprenons alors une base $\mathcal{B}'=(e_1, e_2)$ de E telle que $\omega(e_1)=(\lambda+1)e_1$ et $\omega(e_2)=\lambda e_2$

Soit $t\in\mathcal{L}(E)$.

$t\in G \Leftrightarrow (t,\omega)$ vérifie $(P) \Leftrightarrow t\circ\omega-\omega\circ t=t$

$$t\in G \Leftrightarrow \begin{cases}(t\circ\omega)(e_1)-(\omega\circ t)(e_1)=t(e_1)\\(t\circ\omega)(e_2)-(\omega\circ t)(e_2)=t(e_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\lambda+1)t(e_1)-\omega(t(e_1))=t(e_1)\\\lambda\, t(e_2)-\omega(t(e_2))=t(e_2)\end{cases}$$

$$t\in G \Leftrightarrow \begin{cases}\omega(t(e_1))=\lambda\, t(e_1)\\\omega(t(e_2))=(\lambda-1)\,t(e_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t(e_1)\in \mathrm{Ker}(\omega-\lambda Id_E)\\t(e_2)\in\mathrm{Ker}(\omega-(\lambda-1)Id_E)\end{cases}.$$

Observons que $\mathrm{Ker}(\omega-\lambda Id_E)=\mathrm{Vect}(e_2)$ et $\mathrm{Ker}(\omega-(\lambda-1)Id_E)=\{0_E\}$

car $\lambda-1\notin \mathrm{Sp}\,\omega$.

Alors $t\in G \Leftrightarrow \begin{cases}t(e_1)\in\mathrm{Vect}(e_2)\\t(e_2)=0_E\end{cases} \Leftrightarrow \exists\mu\in\mathbb{R},\ t(e_1)=\mu e_2$ et $t(e_2)=0_E$

$t\in G \Leftrightarrow \exists\mu\in\mathbb{K},\ \Pi_{\mathcal{B}'}(t)=\begin{pmatrix}0&0\\\mu&0\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

Notons t_0 l'endomorphisme de E de matrice $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$

$t\in G \Leftrightarrow \exists\mu\in\mathbb{K},\ \Pi_{\mathcal{B}'}(t)=\mu\Pi_{\mathcal{B}'}(t_0)=\Pi_{\mathcal{B}'}(\mu t_0) \Leftrightarrow \exists\mu\in\mathbb{K},\ t=\mu t_0$.

Alors $G = \mathrm{Vect}(t_0)$. Or $t_0 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi G est une droite vectorielle de $\mathcal{L}(E)$; dim $G = 1$.

Observons encore que $w \in D$ donc (u,w) vérifie (P) ; alors $u \in G$.

De plus $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi G est la droite vectorielle engendrée par u.

Conclusion. Soit $w \in D$. Soit $B' \overset{=(e_1,e_2)}{}$ une base de vecteurs propres de w associés aux valeurs propres $\lambda+1$ et λ de w. Soit $t \in \mathcal{L}(E)$

$t \in G \Leftrightarrow (t,w)$ vérifie $(P) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \beta \in \mathbb{K},\ t(e_1) = \beta e_2 \\ t(e_2) = 0_E \end{cases} \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{K},\ M_{B'}(t) = \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

G est la droite vectorielle de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par u.

PARTIE III

(Q1) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.

→ $u^0 \circ v - v \circ u^0 = v - v = 0_{\mathcal{L}(E)} = 0 \cdot Id_E = 0 \cdot u^0$; la propriété est vraie pour $k=0$

→ supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$$u^{k+1} \circ v = u \circ u^k \circ v \underset{H.R.}{=} u \circ [v \circ u^k + k u^k] = u \circ v \circ u^k + k u^{k+1}.$$

Or $u \circ v = v \circ u + u$ donc $u^{k+1} \circ v = (v \circ u + u) \circ u^k + k u^{k+1} = v \circ u^{k+1} + (k+1) u^{k+1}$.

Ainsi $u^{k+1} \circ v - v \circ u^{k+1} = (k+1) u^{k+1}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.

(Q2) a) Soit $x \in \operatorname{Im} u^n$, alors $u^n(x) \in \operatorname{Im} u^n$. $\operatorname{Im} u^n$ est stable par u^n.

Soit $x \in \operatorname{Im} u^n$. $\exists t \in E$, $x = u^n(t)$.

Or $u^n \circ v - v \circ u^n = n u^n$, $u^n(v(t)) - v(u^n(t)) = n u^n(t)$

Alors $v(u^n(t)) = u^n(v(t)) - n u^n(t) = u^n(v(t) - nt) \in \operatorname{Im} u^n$.

Ainsi $v(x) \in \operatorname{Im} u^n$. Ceci achève de prouver que $\operatorname{Im} u^n$ est stable par v.

b) • $f \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} u^n)$.

• Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. $x \in \operatorname{Im} u^n$ et $f(x) = 0_E$.

Alors $x \in \operatorname{Im} u^n$ et $u^n(x) = 0_E$; $x \in \operatorname{Im} u^n \cap \operatorname{Ker} u^n = \{0_E\}$, $x = 0_E$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. f est injective, $f \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} u^n)$ et $\dim \operatorname{Im} u^n < +\infty$.

Ainsi f est bijectif.

$\forall x \in \operatorname{Im} u^n$, $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = (u^n \circ v)(x) - (v \circ u^n)(x) = n u^n(x) = n f(x)$.

Ainsi $f \circ g - g \circ f = n f$ donc $f^{-1} \circ f \circ g - f^{-1} \circ g \circ f = n\, Id_{\operatorname{Im} u^n}$

Donc $g - n\, Id_{\operatorname{Im} u^n} = f^{-1} \circ g \circ f$.

$g - n\, Id_{\mathrm{Im}\, u^n} = f^{-1} \circ g \circ f$, $n \neq 0$ et $\dim \mathrm{Im}\, u^n \geq 1$!

I Q 1 d) indique que ceci est impossible.

Alors $\dim \mathrm{Im}\, u^n = 0$.

Par conséquent $\mathrm{Im}\, u^n = \{0_E\}$. Ainsi $\underline{\underline{u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}}}$.

$\boxed{\text{Dans la suite on suppose que } \dim \mathrm{Ker}\, u = 1.}$

(Q3) a) $k \in [\![1, n-1]\!]$. <u>On suppose que $\dim \mathrm{Ker}\, u^\ell = k$.</u>

Soit $x \in \mathrm{Im}\, u^\ell$. $\exists t \in E$, $x = u^\ell(t)$. $u(x) = u^{\ell+1}(t) = u^\ell(u(t)) \in \mathrm{Im}\, u^\ell$.

<u>$\mathrm{Im}\, u^\ell$ est stable par u.</u>

$\mathrm{Im}\, f = f(\mathrm{Im}\, u^\ell) = f(u^\ell(E)) = u(u^\ell(E)) = u^{\ell+1}(E) = \mathrm{Im}\, u^{\ell+1}$; <u>$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, u^{\ell+1}$</u>

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$. $0_E = f(x) = u(x)$; $x \in \mathrm{Ker}\, u$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, u^{\ell+1} \text{ et } \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, u.}}$

b) $\dim \mathrm{Ker}\, f \leq \dim \mathrm{Ker}\, u = 1$

Alors $\dim \mathrm{Im}\, u^\ell = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f \leq \dim \mathrm{Im}\, u^{\ell+1} + 1$

Or $\mathrm{Im}\, u^{\ell+1} \subset \mathrm{Im}\, u^\ell$.

Alors $\dim \mathrm{Im}\, u^{\ell+1} \leq \dim \mathrm{Im}\, u^\ell \leq \dim \mathrm{Im}\, u^{\ell+1} + 1$.

Donc $\dim \mathrm{Im}\, u^\ell = \dim \mathrm{Im}\, u^{\ell+1}$ ou $\dim \mathrm{Im}\, u^\ell = \dim \mathrm{Im}\, u^{\ell+1} + 1$.

Supposons que $\dim \mathrm{Im}\, u^\ell = \dim \mathrm{Im}\, u^{\ell+1}$.

Alors $\mathrm{Im}\, u^{\ell+1} = \mathrm{Im}\, u^\ell$ car $\mathrm{Im}\, u^{\ell+1} \subset \mathrm{Im}\, u^\ell$

Comme dans Q5 e) on montre alors que : $\forall i \in [\![\ell, +\infty[\![$, $\mathrm{Im}\, u^i = \mathrm{Im}\, u^\ell$

En particulier $\mathrm{Im}\, u^n = \mathrm{Im}\, u^\ell$. Or $\mathrm{Im}\, u^n = \{0_E\}$.

Donc $\mathrm{Im}\, u^\ell = \{0_E\}$. Alors $\dim \mathrm{Ker}\, u^\ell = n$; ainsi $k = n$!!

Finalement $\dim \operatorname{Im} u^{\ell} = \dim \operatorname{Im} u^{\ell+1} + 1$

$\dim \operatorname{Im} u^{\ell+1} = \dim \operatorname{Im} u^{\ell} - 1$ ... si $\ell \in [\![1, n-1]\!]$ et si $\dim \operatorname{Ker} u^{\ell} = \ell$

Notons surtout que $\dim \operatorname{Ker} u^{\ell+1} = \dim E - \dim \operatorname{Im} u^{\ell+1}$.

$\dim \operatorname{Ker} u^{\ell+1} = \dim E - \dim \operatorname{Im} u^{\ell} + 1$.

$\dim \operatorname{Ker} u^{\ell+1} = \dim \operatorname{Ker} u^{\ell} + 1 = \ell + 1$ ... si $\ell \in [\![1, n-1]\!]$ et si $\dim \operatorname{Ker} u^{\ell} = \ell$.

cl . $\dim \operatorname{Ker} u = 1$

. si $\ell \in [\![1, n-1]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^{\ell} = \ell \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} u^{\ell+1} = \ell + 1$.

Alors le principe de récurrence donne : $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^{\ell} = \ell$.

Q4 Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^{\ell}$; $u^{\ell}(x) = 0_E$

$u^{\ell}(v(x)) - v(u^{\ell}(x)) = \ell u^{\ell}(x)$. Alors $u^{\ell}(v(x)) - v(0_E) = \ell \times 0_E$

donc $u^{\ell}(v(x)) = 0_E$; $v(x) \in \operatorname{Ker} u^{\ell}$.

Finalement $\operatorname{Ker} u^{\ell}$ est stable par v.

$\operatorname{Ker} u$ est une droite vectorielle stable par v. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$ et $x \neq 0_E$.

$v(x) \in \operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(x)$. $\exists \mu \in \mathbb{K}$, $v(x) = \mu x$ et $x \neq 0_E$.

Ainsi x est un vecteur propre de v.

Les vecteurs non nuls de $\operatorname{Ker} u$ sont des vecteurs propres de v.

v possède donc au moins une valeur propre ($\operatorname{Ker} u \neq \{0_E\}$).

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, v possède au moins une valeur propre réelle !!

Q5 $\dim \operatorname{Ker} u^{n-1} = n - 1 < n$. $\operatorname{Ker} u^{n-1} \neq E$.

$\exists a \in E$, $a \notin \operatorname{Ker} u^{n-1}$.

Soit $a \in E \setminus \operatorname{Ker} u^{n-1}$. Montrons que $\mathcal{B} = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E.
Le cardinal de $\mathcal{B}$ étant n, il suffit de montrer que cette famille est libre car $\dim E = n$.
Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(a) = 0_E$

Montrons à l'aide d'une récurrence finie que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_k = 0$.

- $0_E = u^{n-1}(0_E) = u^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(a)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-1+i}(a)$

Alors $0_E = \alpha_0 u^{n-1}(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u^{i-1}(\underbrace{u^n(a)}_{=0_E}) = \alpha_0 u^{n-1}(a)$.

$\alpha_0 u^{n-1}(a) = 0_E$ et $u^{n-1}(a) \neq 0_E$ donc $\underline{\alpha_0 = 0}$.

- Supposons que pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ on ait $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Montrons que $\alpha_{k+1} = 0$. Notons alors que $0_E = \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i u^i(a)$.

Alors $0_E = u^{n-k-2}(0_E) = u^{n-k-2}\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i u^i(a)\right) = \sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i u^{n-k-2+i}(a)$.

$0_E = \alpha_{k+1} u^{n-1}(a) + \sum_{i=k+2}^{n-1} \alpha_i u^{i-k-2}(\underbrace{u^n(a)}_{=0_E}) = \alpha_{k+1} u^{n-1}(a)$.

Donc $\alpha_{k+1} u^{n-1}(a) = 0_E$ et $u^{n-1}(a) \neq 0_E$. $\alpha_{k+1} = 0$.

Ceci achève la récurrence.
Cela achève aussi de montrer que $\mathcal{B} = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E.

$\underline{\underline{\text{Si } a \in E \setminus \operatorname{Ker} u^{n-1}, \ (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a)) \text{ est une base de } E.}}$

Dans la suite $a \in E \setminus \operatorname{Ker} u^{n-1}$ et $\mathcal{B}$ est la base $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$.

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(u^k(a)) = u^{k+1}(a)$ et $u^n(a) = 0_E$

Ainsi $M_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right) = V$.

Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$, $\forall i \in [\![0, n-1-k]\!]$, $u^k(u^i(a)) = u^{k+i}(a)$!

$\forall i \in [\![n-k, n-1]\!]$, $u^k(u^i(a)) = u^{k+i-n}(u^n(a)) = u^{k+i-n}(0_E) = 0_E$.

Ainsi si $k \in [\![2, n-1]\!]$, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $u^k(u^i(a)) = \begin{cases} u^{k+i}(a) \text{ si } i \leq n-1-k \\ 0_E \text{ sinon} \end{cases}$

Donc si $k \in [\![2, n-1]\!]$ (et même $[\![1, n-1]\!]$), $M_B(u^k) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{k,n-k} & 0_{k,k} \\ \hline I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{array}\right)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\quad u^k = u^{k-n} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}}}{u^n} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Si $k \geq n$: $\underset{\substack{\uparrow}}{\mathrm{Ker}\, u^k} = E$ et $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de $\mathrm{Ker}\, u^k$.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dim \mathrm{Ker}\, u^k = k$ et $\forall i \in [\![n-k, n-1]\!]$, $u^k(u^i(a)) = 0_E$.

Alors $(u^{n-k}(a), u^{n-k+1}(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une famille libre (comme sous-famille de la base $\mathcal{B}$) de $\mathrm{Ker}\, u^k$, de cardinal k et $\dim \mathrm{Ker}\, u^k = k$.

Donc si $k \in [\![1, \underset{\substack{\text{ou } n! \\ \downarrow}}{n-1}]\!]$ $(u^{n-k}(a), u^{n-k+1}(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de $\mathrm{Ker}\, u^k$.

c) Soit w un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{B}$ soit une base de vecteurs propres de w donc tel que $M_B(w)$ soit diagonale.

Posons $M_B(w) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $U = (u_{ij})$.

Notons que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$, $u_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$w \in D$

$\Updownarrow$

$u \circ w - w \circ u = u$

$\Updownarrow$

$U\, \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, U = U$

$\Updownarrow$ $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $u_{ij} \times \lambda_j - \lambda_i u_{ij} = u_{ij}$ $\qquad$ ok ?

Rappelons que $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $u_{ij} = \begin{cases}1 \text{ si } i=j+1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

$w \in D$

$\Updownarrow$ $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\begin{cases} 1\times\lambda_j - \lambda_i\times 1 = 1 & \text{si } i=j+1 \\ 0\times\lambda_j - \lambda_i \times 0 = 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$\Updownarrow$ $\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $\lambda_j - \lambda_{j+1} = 1$

$\Updownarrow$ $\forall j\in[\![1,n-1]\!]$, $\lambda_{j+1} = \lambda_j - 1$

$\Updownarrow$ la suite $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ est arithmétique de raison -1.

$\Updownarrow$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \lambda_n + n - i$ (ok !)

$\Updownarrow$ $\lambda_1 = \lambda_n+n-1$, $\lambda_2=\lambda_n+n-2,\dots,\lambda_{n-1}=\lambda_n+1$.

<u>un élément w de $\mathcal{L}(E)$ dont B est une base de vecteurs propres appartient à D si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que la matrice W de w dans B soit égale à $\mathrm{Diag}(\lambda+n-1, \lambda+n-2, \dots, \lambda)$.</u>

(Q6) a) $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $w_0(u^k(a)) = (n-1-k)\,u^k(a)$ donc B est une base de vecteurs propres de w_0.

De plus $M_B(w_0) = \mathrm{Diag}(0+n-1, 0+n-2,\dots,0)$.

D'après ce qui précède <u>$w_0\in D$.</u>

Soit $\varphi\in\mathcal{L}(E)$. Notons $T=(t_{ij})$ la matrice de φ dans B.

$w_0+\varphi\in D \iff u\circ(w_0+\varphi) - (w_0+\varphi)\circ u = u$

$\iff u\circ w_0 + u\circ\varphi - w_0\circ u - \varphi\circ u = u$

Or $w_0\in D$ donc $u\circ w_0 - w_0\circ u = w_0$. Alors $w_0+\varphi\in D \iff u\circ\varphi - \varphi\circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Finalement $w_0+\varphi\in D \Leftrightarrow u\circ\varphi=\varphi\circ u \Leftrightarrow UT=TU$

$w_0+\varphi\in D \Leftrightarrow \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\,t_{kj}=\sum_{k=1}^{n} t_{ik}\,u_{kj}$

$$w_0+\varphi\in D \Leftrightarrow \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \begin{cases} 0=\sum_{k=1}^{n} t_{ik}u_{kj} & \text{si } i=1.\\ t_{i-1\,j}=\sum_{k=1}^{n} t_{ik}u_{kj} & \text{si } i\geq 2.\end{cases}$$

$$w_0+\varphi\in D \Leftrightarrow \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \begin{cases} 0=0 & \text{si } i=1 \text{ et } j=n\\ 0=t_{i\,j+1} & \text{si } i=1 \text{ et } j<n\\ t_{i-1\,j}=0 & \text{si } i\geq 2\ j=n\\ t_{i-1\,j}=t_{i\,j+1} & \text{si } i\geq 2 \text{ et } j<n.\end{cases}$$

$$w_0+\varphi\in D \Leftrightarrow \begin{cases} t_{12}=t_{13}=\dots=t_{1n}=0\\ t_{1n}=t_{2n}=\dots=t_{n-1\,n}=0\\ t_{i-1\,j}=t_{i\,j+1} \text{ si } i\geq 2 \text{ et } j\leq n-1\end{cases}$$

⚠ signifie que les éléments d'une même diagonale sont égaux...

Posons $\gamma_1=t_{11},\ \gamma_2=t_{21},\dots,\ \gamma_n=t_{n1}$

$$w_0+\varphi\in D \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1=t_{11}=t_{22}=\dots=t_{nn}\\ \gamma_2=t_{21}=t_{32}=\dots=t_{n\,n-1}\\ \gamma_3=t_{31}=t_{42}=\dots=t_{n\,n-2}\\ \dots\\ \gamma_n=t_{n1}\end{cases} \text{ et } \begin{cases} 0=t_{12}=t_{23}=t_{34}=\dots=t_{n-1\,n}\\ 0=t_{13}=t_{24}=t_{35}=\dots=t_{n-2\,n}\\ 0=t_{14}=t_{25}=t_{36}=\dots=t_{n-3\,n}\\ \dots\\ 0=t_{1,n}\end{cases}$$

$$w_0+\varphi\in D \Leftrightarrow T=\begin{pmatrix} \gamma_1 & & & & (0)\\ \gamma_2 & \gamma_1 & & & \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \gamma_n & \dots & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1\end{pmatrix}$$

Soit $\varphi\in\mathcal{L}(E)$. $w_0+\varphi\in D \Leftrightarrow \exists(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\mathbb{K}^n,$

$$=\begin{pmatrix} \gamma_1 & & & & (0)\\ \gamma_2 & \gamma_1 & & & \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \gamma_2 & \gamma_1 \\ \gamma_n & \dots & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1\end{pmatrix}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Notons, après avoir revu les matrices de $u, u^2, \dots, u^{n-1}$ que

$\omega_0 + \varphi \in D \Leftrightarrow \exists (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\Pi_B(\varphi) = \delta_1 I_n + \delta_2 U + \dots + \delta_n U^{n-1}$.

$\omega_0 + \varphi \in D \Leftrightarrow \exists (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \delta_1 Id_E + \delta_2 u + \dots + \delta_n u^{n-1}$.

Ainsi $\{\varphi \in \mathcal{L}(E) \mid \omega_0 + \varphi \in D\} = \mathrm{Vect}(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$.

Notons que $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que $\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell u^\ell = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell u^\ell(a) = 0_E$. Comme $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est libre : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

donc $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre.

Ce qui précède montre alors que

1) $\{\varphi \in \mathcal{L}(E) \mid \omega_0 + \varphi \in D\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2) $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est une base de ce sous-espace vectoriel

b) Notons $\mathcal{S}$ ce sous-espace vectoriel.

Soit $\omega \in \mathcal{L}(E)$. $\omega \in D \Leftrightarrow \omega_0 + (\omega - \omega_0) \in D \Leftrightarrow \omega - \omega_0 \in \mathcal{S}$

$$\omega \in D \Leftrightarrow \exists (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n,\ \Pi_B(\omega - \omega_0) = \begin{pmatrix} \delta_1 & & (0) \\ \delta_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ \delta_n & \dots \ \delta_2 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

$$\omega \in D \Leftrightarrow \exists (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n,\ \Pi_B(\omega) = \Pi_B(\omega_0) + \begin{pmatrix} \delta_1 & & (0) \\ \delta_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ \delta_n & \dots \ \delta_2 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

$$\omega \in D \Leftrightarrow \exists (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n,\ \Pi_B(\omega) = \begin{pmatrix} \delta_1 + n-1 & & & (0) \\ \delta_2 & \delta_1 + n-2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \delta_n & \dots & \delta_2 & \delta_1 \end{pmatrix}.$$

c) D'après ce qui précède si $\omega \in D$ existe $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que la diagonale de $\Pi_B(\omega)$ soit constituée par les n éléments distincts de $\mathbb{K}$: $\delta_1 + n-1, \delta_1 + n-2, \dots, \delta_1$ donc ω admet n valeurs propres distinctes

Rappelons que $\dim E = n$. Alors tout élément de D est diagonalisable.