PARTIE I

* écrire $\sum_{k=1}^{n}$

Q1 $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$ et $t\in\mathbb{R}$.

$$\phi \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} \cos(k(t-x)) - \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{ik(t-x)}\right) - \frac{1}{2} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(t-x)}\right)^k\right) - \frac{1}{2}$$

1er cas : $t-x \not\equiv 0\ [2\pi]$

Par conséquent $e^{i(t-x)}\neq 1$. $\phi = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1-\left(e^{i(t-x)}\right)^{n+1}}{1-e^{i(t-x)}}\right) - \dfrac{1}{2} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1-e^{i(n+1)(t-x)}}{1-e^{i(t-x)}}\right) - \dfrac{1}{2}$.

$$\phi = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}(t-x)}}{e^{i\frac{t-x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}(t-x)} - e^{i\frac{n+1}{2}(t-x)}}{e^{-i\frac{t-x}{2}} - e^{i\frac{t-x}{2}}}\right) - \frac{1}{2} = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n}{2}(t-x)} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}(t-x)\right)}{-2i\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\phi = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}(t-x)\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}(t-x)\right)}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \frac{2\cos\left(\frac{n}{2}(t-x)\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}(t-x)\right) - \sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}$$

$2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, donc :

$$\phi = \frac{1}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\left[\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)(t-x)\right) \underbrace{- \sin\left(-\tfrac{1}{2}(t-x)\right) - \sin\left(\tfrac{t-x}{2}\right)}_{=0}\right] = \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} \qquad \text{cqfd.}$$

2ième cas : $t-x \equiv 0\ [2\pi]$

On a alors $e^{i(t-x)}=1$. $\phi = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(t-x)}\right)^k\right) - \frac{1}{2} = (n+1) - \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2}$

Finalement :
$$\phi = \begin{cases} \dfrac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} & \text{si } t-x \not\equiv 0\ [2\pi] \\[2ex] n+\dfrac{1}{2} & \text{si } t-x \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

Q2 Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

$$\int_a^b \underset{u}{f(t)}\,\underset{v'}{\sin(\lambda t)}\,dt = \left[f(t)\left(-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\left(-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right)dt$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| = \left|f(a)\frac{\cos(\lambda a)}{\lambda} - f(b)\frac{\cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right|$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left[|f(a)||\cos(\lambda a)| + |f(b)||\cos(\lambda b)| + \left|\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right|\right]$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left[|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)||\cos(\lambda t)|\,dt\right]$$

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left[|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right] = \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{avec } M = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq \dfrac{\pi}{|\lambda|}$; or $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\pi}{|\lambda|} = 0$ donc $\underline{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0}$

Q3 a) Posons $D = \mathbb{R} - \{x + k\times 2\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - (x + 2\pi\mathbb{Z}) = \mathbb{R} \setminus (x + 2\pi\mathbb{Z})$!

Rappelons que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π

Notons encore que $\overset{\circ}{D} = D$

$\forall t \in D$, $h(t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}$; h est donc continue et dérivable en tout point de D

comme quotient de deux fonctions continues et dérivables (...)

$$\forall t \in D,\ h'(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2 \frac{t-x}{2}} \left[f'(t)\sin\left(\frac{t-x}{2}\right) - (f(t) - f(x)) \times \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t-x}{2}\right) \right]$$

h' est donc continue en tout point de D (produit de deux fonctions continues...)

<u>Finalement h est de classe C^1 sur D.</u>

<u>b)</u> Soit $a \in \bar{D}$. $\exists k \in \mathbb{Z}$, $a = x + k\times 2\pi$. Montrons que h est continue en a.

$$\forall t \in D,\ h(t) = \frac{f(t)-f(x)}{2\sin\frac{t-x}{2}} \underset{x = a - k\times 2\pi}{=} \frac{f(t) - f(a - k\times 2\pi)}{2\sin\left(\frac{t-a+k\times 2\pi}{2}\right)} \underset{f \text{ est périodique de période } 2\pi}{=} \frac{f(t)-f(a)}{2\sin\left(\frac{t-a}{2} + k\pi\right)} = \frac{f(t)-f(a)}{2(-1)^k \sin\left(\frac{t-a}{2}\right)}$$

$$\forall t \in D,\ h(t) = \frac{f(t)-f(a)}{2(-1)^k\sin\left(\frac{t-a}{2}\right)} = (-1)^k \frac{f(t)-f(a)}{2\sin\left(\frac{t-a}{2}\right)}$$

$$(-1)^k \frac{f(t)-f(a)}{2\sin\frac{t-a}{2}} \underset{a}{\sim} (-1)^k \frac{f(t)-f(a)}{2\times\frac{t-a}{2}} = (-1)^k \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

donc $\lim\limits_{t\to a} (-1)^k \dfrac{f(t)-f(a)}{2\sin\frac{t-a}{2}} = \lim\limits_{t \to a} (-1)^k \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} = (-1)^k f'(a)$.

Notons que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $f(u+2\pi) = f(u)$; par dérivation : $\forall u \in \mathbb{R}$, $f'(u+2\pi) = f'(u)$.

f' est donc périodique de période 2π.

Par conséquent : $f'(a) = f'(x + k\times 2\pi) = f'(x)$.

Finalement $\lim\limits_{t \to a} (-1)^k \dfrac{f(t)-f(a)}{2\sin\frac{t-a}{2}} = (-1)^k f'(a) = (-1)^k f'(x) = h(a)$.

donc $\lim\limits_{t\to a} h(t) = h(a)$; h est continue en a.

Ceci achève de prouver la <u>continuité de h sur $\mathbb{R}$</u>.

montrons que h est dérivable en a et que h' est continue en a.

h étant continue en a et dérivable sur D il suffit de montrer que h' admet une limite finie en a.

$\forall t \in D$, $h(t) = (-1)^k \dfrac{f(t)-f(a)}{2\sin\left(\frac{t-a}{2}\right)}$; $\forall t \in D$, $h'(t) = (-1)^k \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{t-a}{2}\right)} \left[f'(t)\sin\left(\frac{t-a}{2}\right) - (f(t)-f(a))\frac{1}{2}\cos\frac{t-a}{2} \right]$

$\forall t \in D$, $h'(t) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{(-1)^k}{\sin^2 \frac{t-a}{2}} \left[2f'(t)\sin\left(\frac{t-a}{2}\right) - (f(t)-f(a))\cos\left(\frac{t-a}{2}\right) \right]$

Donc $\underline{\underline{h'(t) \underset{a}{\sim} \dfrac{(-1)^k}{(t-a)^2} \left[2f'(t)\sin\left(\frac{t-a}{2}\right) - (f(t)-f(a))\cos\left(\frac{t-a}{2}\right) \right]}}$ car $4\sin^2\left(\frac{t-a}{2}\right) \underset{a}{\sim} 4\left(\frac{t-a}{2}\right)^2 = (t-a)^2$

Effectuons un dl_2 " du [ ] ". f admet un dl_1 au voisinage de a car f est de classe C^2.

$f'(t) = f'(a) + (t-a)f''(a) + (t-a)\,\varepsilon(t)$ et $2\sin\frac{t-a}{2} = t-a + 2\left(\frac{t-a}{2}\right)^2 \hat{\varepsilon}(t)$ $(\sin x = x + o(x^2))$

avec $\lim\limits_{t\to a} \varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to a} \hat{\varepsilon}(t) = 0$.

Donc $2f'(t)\sin\frac{t-a}{2} = (t-a)f'(a) + (t-a)^2 f''(a) + (t-a)^2 \underbrace{\left[\varepsilon(t) + \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}(t)\left(f'(a) + (t-a)f''(a) + (t-a)\varepsilon(t)\right) \right]}_{\check{\varepsilon}(t)}$

$$2f'(t)\sin\frac{t-a}{2} = (t-a)f'(a) + (t-a)^2 f''(a) + (t-a)^2\, \check{\varepsilon}(t)$$

Or $\lim\limits_{t\to a} \check{\varepsilon}(t) = 0$ donc $\underline{\underline{2f'(t)\sin\frac{t-a}{2} = (t-a)f'(a) + (t-a)^2 f''(a) + o((t-a)^2)}}$.

<u>Remarque</u>.– La manipulation précédente a consisté à construire un dl_2 de $t \mapsto 2f'(t)\sin\frac{t-a}{2}$ au voisinage de a en n'utilisant qu'<u>un dl_1</u> de f' au voisinage de a.

un dl_1 suffisait... voir plus haut

$f(t) - f(a) = (t-a)f'(a) + \dfrac{(t-a)^2}{2} f''(a) + o((t-a)^2)$ et $\cos\dfrac{t-a}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t-a}{2}\right)^2 + o((t-a)^2)$.

Par conséquent : $(f(t)-f(a))\cos\frac{t-a}{2} = (t-a)f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2} f''(a) + o((t-a)^2)$.

Finalement : $2f'(t)\sin\left(\frac{t-a}{2}\right) - (f(t)-f(a))\cos\left(\frac{t-a}{2}\right) = (t-a)^2 f''(a)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + o((t-a)^2)$.

Donc : $2f'(t)\sin\left(\frac{t-a}{2}\right) - (f(t)-f(a))\cos\left(\frac{t-a}{2}\right) = \frac{1}{2} f''(a)\,(t-a)^2 + o((t-a)^2)$.

Ce qui indique que : $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{1}{(t-a)^2}\left[2f'(t)\sin\left(\frac{t-a}{2}\right) - (f(t)-f(a))\cos\left(\frac{t-a}{2}\right) - \frac{1}{2}f''(a)(t-a)^2 \right] = 0$

ou que : $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{1}{(t-a)^2}\left[2f'(t)\sin\frac{t-a}{2} - (f(t)-f(a))\cos\frac{t-a}{2} \right] = \dfrac{1}{2} f''(a)$.

Rappelons que : $h'(t) \underset{a}{\sim} \dfrac{(-1)^k}{(t-a)^2}\left[2f'(t)\sin\frac{t-a}{2} - (f(t)-f(a))\cos\frac{t-a}{2} \right]$

donc $\lim\limits_{t\to a} h'(t) = \dfrac{(-1)^k}{2} f''(a)$. h est donc <u>dérivable en a</u>, $\underline{h'(a) = \frac{(-1)^k}{2} f''(a)}$ et <u>h' est continue en a</u>. Ceci achève de prouver que <u>h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$</u>.

Remarque.. Cette limite s'obtient sans difficulté avec la règle de l'Hôpital

$u : t \mapsto 2f'(t)\sin\frac{t-a}{2} - (f(t)-f(a))\cos\frac{t-a}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(a)=0$

$v : t \mapsto (t-a)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $v(a)=0$ et $v' : t \mapsto 2(t-a)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}-\{a\}$

$$\frac{u'(t)}{v'(t)} = \frac{1}{2}\left[2f''(t)\frac{\sin\left(\frac{t-a}{2}\right)}{t-a} + \underbrace{2f'(t)\times\frac{1}{2}\times\cos\frac{t-a}{2}\times\frac{1}{t-a} - f'(t)\cos\frac{t-a}{2}\times\frac{1}{t-a}}_{=0} + \frac{f(t)-f(a)}{t-a}\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{t-a}{2}\right]$$

Donc $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{u'(t)}{v'(t)} = \lim_{t\to a}\left[\frac{1}{2}f''(t)\times\frac{\sin\left(\frac{t-a}{2}\right)}{\frac{t-a}{2}} + \frac{1}{4}\,\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\times\sin\left(\frac{t-a}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}f''(a)\times 1 + \frac{1}{4}f'(a)\times 0 = \frac{1}{2}f''(a)$

Donc $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{1}{2}f''(a)$. ce qui redonne la limite cherchée.

Q4 a) Soit $x\in I$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leq |v_n(x)| \leq \alpha_n$; la série de terme général α_n étant convergente il en est de même de la série de terme général $|v_n(x)|$ (règle de comparaison des séries à termes positifs)

La série de terme général $v_n(x)$ est donc absolument convergente donc convergente.

S est donc définie sur I.

Remarque.. Pour les initiés la série de fonctions de terme général v_n est normalement convergente sur I... ce qui suffit très largement pour obtenir la continuité de S à partir de la continuité des v_n.

Exercice de contrôle.. Montrer que S est continue sur I (utiliser la continuité de $S_n : x \mapsto \sum_{p=0}^{n} v_p(x)$ ... et la définition de la continuité)

b) Fixons n dans $\mathbb{N}$.

$$\forall x\in I,\ \forall m\in[\![n+1,+\infty[\![,\ \left|\sum_{p=n+1}^{m} v_p(x)\right| \leq \sum_{p=n+1}^{m}|v_p(x)| \leq \sum_{p=n+1}^{m}\alpha_p$$

La série de terme général $v_p(x)$ (resp. α_p) converge donc $\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p(x)$ (resp. $\sum_{p=n+1}^{+\infty}\alpha_p$) existe et n'est autre que : $\lim_{m\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{m} v_p(x)$ (resp. $\lim_{m\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{m}\alpha_p$).

Par conséquent il résulte des inégalités précédentes que :

$$\forall x\in I,\ \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p(x)\right| \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty}\alpha_p .$$

linéarité de l'intégrale... $\sum_{p=0}^{n}\int\cdots = \int\sum_{p=0}^{n}\cdots$

$$\left|\int_a^b\left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\right)dx - \sum_{p=0}^{n}\int_a^b v_p(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b\left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x) - \sum_{p=0}^{n} v_p(x)\right)dx\right| = \left|\int_a^b\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p(x)\right)dx\right|$$

$$\left|\int_a^b\left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\right)dx - \sum_{p=0}^{n}\int_a^b v_p(x)\,dx\right| \leq \int_a^b\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p(x)\right|dx \leq \int_a^b\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty}\alpha_p\right)dx = (b-a)\sum_{p=n+1}^{+\infty}\alpha_p .$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_a^b \left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\right)dx - \sum_{p=0}^{n} \int_a^b v_p(x)\,dx \right| \leq (b-a) \sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p$.

c.. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b \left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\right)dx - \sum_{p=0}^{n} \int_a^b v_p(x)\,dx \right] = 0$

ceci donne encore : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \int_a^b v_p(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\right)dx$

La série de terme général $\int_a^b v_p(x)\,dx$ converge et :

$\sum_{p=0}^{+\infty} \int_a^b v_p(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\right)dx$ ou : $\underline{\underline{\int_a^b \left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\right)dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_a^b v_p(x)\,dx}}$

<u>Rappel</u>.- $\sum_{p=0}^{m} \int \ldots = \int \sum_{p=0}^{m} \ldots$ est une évidence (l'intégrale est linéaire), ce n'est pas le cas de $\sum_{p=0}^{+\infty} \int \ldots = \int \sum_{p=0}^{+\infty} \ldots$ qui doit être démontré avant d'être écrit.

PARTIE 2

Q1 $f : x \mapsto |\sin^3 x|$. f est périodique de période $\underline{\pi}$ et paire sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc nous contenter d'étudier la restriction ℓ de f à $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$D_\ell = [0,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\ell(x) = \sin^3 x$. ℓ est continue et dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\ell'(x) = 3\cos x \sin^2 x \geq 0$. ℓ est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

x	0		$\pi/2$
$\ell'(x)$		$+$	
$\ell(x)$	0	$\nearrow$	1

f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

Soit $a \in \pi\mathbb{Z}$. $\exists k \in \mathbb{Z}$, $a = k\pi$. Etudions la dérivabilité de f en a.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{|\sin^3 x|}{x-a} = \frac{|\sin^3(x-k\pi)|}{x-a} = \frac{|\sin^3(x-a)|}{x-a}$

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a}{\sim} \frac{|(x-a)^3|}{x-a} = |x-a|(x-a)$; $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$; f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Finalement f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x+\pi) = f'(x)$; f' est périodique de période π.

$\forall x \in [0,\pi[$, $f(x) = \sin^3 x$ et $f'(x) = 3\cos x \sin^2 x$.

A MEDITER → Donc f' dérivable sur $]0,\pi[$ mais ne permet pas d'écrire $\forall x \in \underline{[}0,\pi[$, $f''(x) = -3\sin^3 x + 6\cos^2 x \sin x$

$\forall x \in [0,\pi[$, $f'(x) = 3\cos x \sin^2 x$.

<u>Donc</u> - f' est dérivable en tout point de $]0,\pi[$ et $\forall x \in]0,\pi[$, $f''(x) = -3\sin^3 x + 6\cos^2 x \sin x$

- f' est dérivable à droite en 0 et $(f')'_d(0) = 0$

Montrons que f' est dérivable en 0 ; il suffit de prouver que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 0$ (c'est à dire que f' est dérivable à gauche en 0 et que : $(f')'_g(0) = (f')'_d(0)$).

$\forall x \in]-\pi, 0[,\ f(x) = -\sin^3 x$ et $f'(x) = -3\cos x \sin^2 x$.

$\forall x \in]-\pi, 0[,\ \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = -3\cos x \sin x \times \dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 0$ ... cqfd.

f' est donc dérivable en tout point de $[0, \pi[$

$f''(0) = 0$ et $\forall x \in]0, \pi[,\ f''(x) = -3\sin^3 x + 6\cos^2 x \sin x$

Par conséquent f' est dérivable en tout point de $[0,\pi[$ et $\forall x \in [0,\pi[,\ f''(x) = -3\sin^3 x + 6\cos^2 x \sin x$.

Ceci suffit à prouver que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f' est périodique de période π)

En effet soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $k = E\left(\frac{a}{\pi}\right)$ et $b = a - k\pi$

$k \leq \frac{a}{\pi} < k+1$; $k\pi \leq a < k\pi + \pi$; $0 \leq b < \pi$. Notons que f' est dérivable en b.

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x \mapsto a} \frac{f'(x-k\pi)-f'(a-k\pi)}{(x-k\pi)-(a-k\pi)} = \lim_{y \mapsto b} \frac{f'(y)-f'(b)}{y-b} = f''(b).$$

f' est périodique de période π

$x \mapsto \dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a ; f' est dérivable en a.

Finalement f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Notons que f'' est périodique de période π (f' est périodique de période π)

$\forall x \in [0,\pi[,\ f''(x) = -3\sin^3 x + 6\cos^2 x \sin x = |\sin x|\,[-3\sin^2 x + 6\cos^2 x]$

$\forall x \in [0,\pi[,\ f''(x) = |\sin x|\,[6 - 9\sin^2 x]$.

f'' et $x \mapsto |\sin x|\,[6-9\sin^2 x]$ sont deux fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$, de période π, qui coïncident sur $[0,\pi[$. Par conséquent ces deux fonctions sont égales.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = |\sin x|\,[6 - 9\sin^2 x]$.

Ceci montre que f'' est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \mapsto 0^+}\left(\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}\right) = \lim_{x \mapsto 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}[6 - 9\sin^2 x]\right) = 6 \ ;\ \lim_{x \mapsto 0^-}\left(\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}\right) = \lim_{x \mapsto 0^-}\left(-\frac{\sin x}{x}[6-9\sin^2 x]\right) = -6$$

f'' n'est donc pas dérivable en 0.

f n'est pas de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

Remarque.. On pouvait encore pour cette question utiliser le théorème "de prolongement de la dérivée" comme dans P1-Q3

Q2 .. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin^3 x = (\mathrm{Im}(e^{ix}))^3 = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\dfrac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x})$

$\sin^3 x = -\dfrac{1}{8i}(2i\sin 3x - 3 \times 2i \sin x) = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$.

Q3 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $t\mapsto|\sin^3 t|\sin(nt)$ est impaire sur $[-\pi,\pi]$ donc

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin^3 t|\sin(nt)\,dt=0.\qquad \underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=0}}.$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $t\mapsto|\sin^3 t|\cos((2n+1)t)$ est paire sur $[-\pi,\pi]$.

$$a_{2n+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin^3 t|(\cos(2n+1)t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin^3 t|\cos((2n+1)t)\,dt\underset{v=\pi-t}{=}\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{0}|\sin^3(\pi-v)|\cos((2n+1)(\pi-v))(-dv)$$

$$a_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin^3 v|\cos(\pi-(2n+1)v)\,dv$$

$$a_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin^3 v|(-\cos((2n+1)v))\,dv=-a_{2n+1}\quad!\qquad \underline{\underline{a_{2n+1}=0}}$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. $t\mapsto|\sin^3 t|\cos(2nt)$ est paire sur $[-\pi,\pi]$.

$$a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin^3 t|\cos(2nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin^3 t|\cos(2nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin^3 t)(\cos(2nt))\,dt$$

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t\right)\cos(2nt)\,dt=\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}2\sin t\cos(2nt)\,dt-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}2\sin 3t\cos(2nt)\,dt.$$

$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$.

$$a_{2n}=\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}[\sin((2n+1)t)+\sin((1-2n)t)]\,dt-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}[\sin((2n+3)t)+\sin((3-2n)t)]\,dt$$

$$a_{2n}=\left[\frac{3}{4\pi}\left(-\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}-\frac{\cos((1-2n)t)}{1-2n}\right)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\cos((2n+3)t)}{2n+3}+\frac{\cos((3-2n)t)}{3-2n}\right)\right]_0^{\pi}$$

$\cos((2n+1)\pi)=\cos((1-2n)\pi)=\cos((2n+3)\pi)=\cos((3-2n)\pi)=-1$ et $\cos 0=1$! Donc :

$$a_{2n}=\frac{3}{4\pi}\left[\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{1-2n}\right]-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{2n+3}+\frac{2}{3-2n}\right]=-\frac{3}{\pi}\times\frac{1}{4n^2-1}+\frac{1}{\pi}\times\frac{3}{4n^2-9}$$

$$a_{2n}=\frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{4n^2-9}-\frac{1}{4n^2-1}\right]=\frac{24}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)}$$

$$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=0,\quad a_{2n+1}=0\ \text{et}\ a_{2n}=\frac{24}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)}}}.$$

▼▲▼ Le préliminaire auquel vous avez échappé (exercice de contrôle)

Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période T strictement positive. $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

Q1.. Montrer que si φ est continue (resp. dérivable) en a, φ est continue (resp. dérivable) en $a+T$.

Q2.. On suppose φ continue sur $[b,b+T]$. φ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Q3.. On suppose φ dérivable sur $[b,b+T]$. Donner une CNS pour que φ soit dérivable sur $\mathbb{R}$

Q4.. On suppose φ dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que φ' est périodique de période T sur $\mathbb{R}$.

PARTIE III (Q1).. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(x) = a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)\cos(kt)\cos(kx) + f(t)\sin(kt)\sin(kx)\right]dt$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(t-x))\,dt$

$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right)dt$

$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$ d'après P1 Q1 + le passage de $x-t$ à $t-x$! [... à un abus près]

<u>Remarque</u>.. cette dernière intégrale peut être une intégrale généralisée mais est toujours convergente car la fonction $t \mapsto \frac{\sin[(2n+1)(\frac{t-x}{2})]}{2\sin\frac{t-x}{2}}$ est prolongeable par continuité là où elle n'est pas définie.

(Q2).. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin[(2n+1)(\frac{t-x}{2})]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$ existe pour les raisons précitées.

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin[(2n+1)(\frac{t-x}{2})]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt = f(x)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right]dt$ (à un abus près).

$= f(x)\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\times 2\pi + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(k(t-x))}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}\right]$

$= f(x)\frac{1}{\pi}\left[\pi + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(k\pi - kx) - \sin(-k\pi - kx)}{k}\right]\right]$

$= f(x)\frac{1}{\pi}\left[\pi + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{(-1)^k\sin(-kx) + (-1)^k\sin(kx)}{k}}_{=0}\right] = f(x)\frac{1}{\pi}\times\pi = f(x)$

Finalement : $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin[(2n+1)(\frac{t-x}{2})]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt = f(x)$.

(Q3).. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin[(2n+1)(\frac{t-x}{2})]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin[(2n+1)(\frac{t-x}{2})]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)-f(x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\sin[(2n+1)(\frac{t-x}{2})]\,d$

Par conséquent : $S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right] dt$

$$S_n(x) - f(x) = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin \frac{2n+1}{2} t \, dt\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2} x\right) - \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos \frac{2n+1}{2} t \, dt\right) \sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right)$$

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) dt\right| \left|\cos\left(\frac{2n+1}{2} x\right)\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) dt\right| \left|\sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right)\right|$$

$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) dt\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) t \, dt\right|$. h est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$ donc d'après P1-Q2 :

$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) dt = 0$. Par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} |S_n(x) - f(x)| = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$

En conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, → la série de terme général $u_n(x)$ converge

→ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$

<u>Remarque</u>.- Le résultat qui vient d'être démontré est une forme assez faible du théorème de <u>Dirichlet</u>

Les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les <u>coefficients de Fourier</u> de f.

La série trigonométrique " $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)]$ " est <u>la série de Fourier de f</u>. Sous les hypothèses de P3, elle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)] = f(x) \quad \text{(théorème de Dirichlet)}$$

Une forme plus respectable du théorème de Dirichlet dit la chose suivante

Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et localement intégrable sur f. Soit $a \in \mathbb{R}$.

On suppose que f admet une limite finie à droite et à gauche en a notées $f(a+)$ et $f(a-)$

On suppose encore que $h \mapsto \frac{1}{h}[f(a+h) + f(a-h) - f(a+) - f(a-)]$ est bornée sur $V - \{0\}$ où V est un voisinage de 0. Alors la série de Fourier de f converge en a et a pour somme $\frac{1}{2}[f(a+) + f(a-)]$.

PARTIE IV

(Q1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underset{u}{f(t)}\underset{v'}{\cos nt}\, dt = \frac{1}{\pi}\left[f(t)\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{1}{n}\sin(nt)\,dt = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt = \frac{1}{\pi}\left[f(t)\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)dt$$

$$b_n(f) = -\frac{1}{n\pi}\left[f(\pi)\cos(n\pi) - f(-\pi)\cos(-n\pi)\right] + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt$$

$f(\pi) = f(-\pi)$ car f est périodique de période 2π

Par conséquent $a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(f')$ et $b_n(f) = \frac{1}{n} a_n(f')$.

De même $a_n(f') = -\frac{1}{n} b_n(f'')$ et $b_n(f') = \frac{1}{n} a_n(f'')$.

Finalement : $a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(f') = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} a_n(f'')\right) = -\frac{1}{n^2} a_n(f'')$

$b_n(f) = \frac{1}{n} a_n(f') = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n} b_n(f'')\right) = -\frac{1}{n^2} b_n(f'')$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = -\frac{1}{n^2} a_n(f'')$ et $b_n(f) = -\frac{1}{n^2} b_n(f'')$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f'' est continue sur $[-\pi, \pi]$; posons $M_2 = \underset{t \in [-\pi,\pi]}{\overset{\text{ou max.}}{\operatorname{Sup}}} |f''(t)|$

$$|a_n(f)| = \frac{1}{n^2}|a_n(f'')| = \frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\cos nt\,dt\right| \leq \frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)||\cos nt|\,dt \leq \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} M_2\,dt = \frac{2M_2}{n^2}$$

De même : $|b_n(f)| \leq \frac{2M_2}{n^2}$.

Posons $K = 2M_2$.

$K \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}$ et $|b_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}$.

c) Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $v_n(x) = u_n(x)\, g(x)$

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $[-\pi, \pi]$.

→ g est continue sur $[-\pi, \pi]$. Posons $\tilde{M}_0 = \underset{x \in [-\pi,\pi]}{\operatorname{Sup}} |g(x)|$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $|v_n(x)| = |u_n(x)||g(x)| \leq \tilde{M}_0 |a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)|$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $|v_n(x)| \leq \tilde{M}_0\left[|a_n(f)||\cos nx| + |b_n(f)||\sin(nx)|\right] \leq \tilde{M}_0\left(\frac{K}{n^2} + \frac{K}{n^2}\right) = \frac{2K\tilde{M}_0}{n^2}$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$, $|v_0(x)| = |u_0(x)||g(x)| = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right||g(x)| \leq \tilde{M}_0 \frac{|a_0(f)|}{2}$

Posons $\alpha_0 = \tilde{M}_0 \frac{|a_0(f)|}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{2K\tilde{M}_0}{n^2}$.

La suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est à termes positifs et la série de terme général α_n est convergente (car la série de terme général $1/n^2$ est convergente).

Rappelons que : $\forall x \in [-\pi,\pi],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n(x)| \leq \alpha_n$.

I1-Q4 donne alors : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\Big)dx = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} v_p(x)\,dx$

ou $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p(x)\Big)g(x)\,dx = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_p(x)g(x)\,dx$.

ou $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_p(x)\,g(x)\,dx \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)\,g(x)\,dx$.

Donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)g(x)\,dx$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0(f)g(x)\,dx = a_0(f)\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}a_0(f)a_0(g).$$

Supposons $n \geq 1$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\big(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\big)g(x)\,dx = a_n(f)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,g(x)\,dx + b_n(f)\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)g(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)g(x)\,dx = a_n(f)\ \pi\, a_n(g) + b_n(f)\ \pi\, b_n(g) = \pi\big[a_n(f)\,a_n(g) + b_n(f)\ b_n(g)\big]$$

Ca donc : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)g(x)\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x)g(x)\,dx = \pi\Big[\frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(f)a_n(g)+b_n(f)b_n(g)\big)\Big]$

Finalement : $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(f)a_n(g)+b_n(f)b_n(g)\big)$

On retrouve en faisant $f=g$ l'égalité de Parseval

Q3 a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sin^6 x = \Big[\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\Big]^6 = -\frac{1}{2^6}\big[e^{i6x} - 6e^{i5x}e^{-ix} + 15e^{i4x}e^{-i2x} - 20e^{i3x}e^{-i3x} + 15e^{i2x}e^{-i4x} - 6e^{ix}e^{-i5x} + e^{-i6x}\big]$$

$$= -\frac{1}{2^6}\big[2\cos 6x - 6\times 2\cos 4x + 15\times 2\times\cos 2x - 20\big]$$

$$= \frac{1}{2^5}\big[10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x\big]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6 x\,dx = \frac{1}{2^5}\Big[10x - 15\frac{\sin 2x}{2} + \frac{6\sin 4x}{4} - \frac{\sin 6x}{6}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2^5}10\,(\pi-(-\pi)) = \frac{5\pi}{8}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6 x\,dx = \frac{5\pi}{8}$$

b.. f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π. Par conséquent :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0(f)a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)a_n(g)+b_n(f)b_n(g)\right)$$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)=|\sin^3 x|$

Donc $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6 x\,dx = \frac{1}{2}(a_0(f))^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(a_n(f))^2+(b_n(f))^2\right]$$ (Egalité de Perseval)

$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin^3 t|\cos(nt)\,dt = a_n$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin^3 t|\sin(nt)\,dt = b_n$ (P2)

Donc $$\frac{1}{\pi}\times\frac{5\pi}{8} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6 x\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) \underset{b_n=0}{=} \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2 \underset{a_{2n+1}=0}{=} \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}^2$$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{\pi(-1)(-9)}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{24^2}{\pi^2\left[(4n^2-1)(4n^2-9)\right]^2}$$

Donc $$\pi^2 = \frac{8}{5}\left[\frac{1}{2}\times\frac{24^2}{9^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{24^2}{\left[(4n^2-1)(4n^2-9)\right]^2}\right]$$

$$\pi^2 = \frac{8}{5}\left[\frac{32}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{576}{\left[(4n^2-1)(4n^2-9)\right]^2}\right]$$

c.. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_n = \frac{8}{5}\left[\frac{32}{9} + \sum_{k=1}^{n}\frac{576}{\left[(4k^2-9)(4k^2-1)\right]^2}\right]$

$\pi^2 \simeq 9,869\ 604\ 401$

$T_1 \simeq 9,784\ 888\ 889$	$T_{10} \simeq 9,869\ 604\ 366$
$T_2 \simeq 9,868\ 480\ 726$	$T_{11} \simeq 9,869\ 604\ 382$
$T_3 \simeq 9,869\ 532\ 724$	$T_{12} \simeq 9,869\ 604\ 390$
$T_4 \simeq 9,869\ 589\ 484$	$T_{13} \simeq 9,869\ 604\ 395$
$T_5 \simeq 9,869\ 600\ 839$	$T_{14} \simeq 9,869\ 604\ 397$
$T_6 \simeq 9,869\ 603\ 312$	$T_{15} \simeq 9,869\ 604\ 399$
$T_7 \simeq 9,869\ 604\ 005$	$T_{16} \simeq 9,869\ 604\ 400$
$T_8 \simeq 9,869\ 604\ 237$	$T_{17} \simeq 9,869\ 604\ 400$
$T_9 \simeq 9,869\ 604\ 326$	$T_{18} \simeq 9,869\ 604\ 400$
	$T_{19} \simeq 9,869\ 604\ 401$
	$T_{20} \simeq 9,869\ 604\ 401$

```
32÷9→S:20→N:1→K
Lbl 0
S+576÷(4K²-1)²÷(4K²-9)²→S
1.6 S ◢
K+1→K : DSZ N : Goto 0
"FIN"
```