PARTIE I

Q1) a) tr est une application de $M_n(K)$ dans K ; montrons qu'elle est linéaire.

Soient $(A,B) \in M_n(K)^2$ et $\lambda \in K$. $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$.

$Tr(\lambda A+B) = Tr\left((\lambda a_{ij}+b_{ij})\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}+b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda\, tr(A) + tr(B)$.

tr est bien une application linéaire de $M_n(K)$ dans K ; tr est une forme linéaire sur $M_n(K)$.

b) Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de $M_n(K)$.

$Tr(AB) = Tr\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}\right) = Tr(BA)$, non ?

$\forall (A,B)\in M_n(K)^2,\ tr(AB)=tr(BA)$.

Soient U et V deux matrices semblables de $M_n(K)$. $\exists P \in GL_n(K),\ U = P^{-1}VP$.

$tr\, U = tr(P^{-1}VP) = tr((P^{-1}V)P) \underset{\text{d'après ce qui précède}}{=} tr(P(P^{-1}V)) = tr(PP^{-1}V) = tr(V)$.

deux matrices semblables de $M_n(K)$ ont même trace.

c) Supposons que g soit un automorphisme de E tel que : $f+\alpha Id_E = g^{-1}\circ f\circ g$.

Soit $\mathcal{B}=(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Posons $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = M_{\mathcal{B}}(g)$.

$A+\alpha I_n = B^{-1}AB$. Alors $tr(A+\alpha I_n) = tr(B^{-1}AB) = tr(A)$ car $B^{-1}AB$ et A sont semblables.

Ainsi $tr(A)+\alpha\, tr(I_n) = tr(A)$.

Par conséquent : $\alpha\, tr(I_n)=0$; c'est à dire $\alpha n = 0$ donc $\alpha = 0$!!

Ainsi il n'existe pas d'automorphisme g de E tel que : $f+\alpha Id_E = g^{-1}\circ f\circ g$.

Q2) a) et b) Soit $x \in Ker\, u^k$. $u^k(x)=0_E$, $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$; $x \in Ker\, u^{k+1}$.

$Ker\, u^k \subset Ker\, u^{k+1}$ (ceci vaut encore pour $k=0$).

Soit $y \in Im\, u^{k+1}$. $\exists t \in E$, $y = u^{k+1}(t)$. $y = u^k(u(t))$ donc $y \in Im\, u^k$.

$Im\, u^{k+1} \subset Im\, u^k$ (ceci vaut aussi pour $k=0$).

Supposons $Ker\, u^k = Ker\, u^{k+1}$. Montrons que $Ker\, u^{k+1} = Ker\, u^{k+2}$. Comme $Ker\, u^{k+1} \subset Ker\, u^{k+2}$ il ne reste plus qu'à prouver que : $Ker\, u^{k+2} \subset Ker\, u^{k+1}$.

Soit $x \in Ker\, u^{k+2}$. $u^{k+2}(x) = 0_E$, $u^{k+1}(u(x)) = 0_E$; $u(x) \in Ker\, u^{k+1} = Ker\, u^k$; ainsi $u^k(u(x)) = 0_E$ et : $u^{k+1}(x) = 0_E$. $x \in Ker\, u^{k+1}$. Ceci achève de prouver que :

si $Ker\, u^k = Ker\, u^{k+1}$ alors $Ker\, u^{k+1} = Ker\, u^{k+2}$.

Supposons $\operatorname{Im} u^{\ell} = \operatorname{Im} u^{\ell+1}$ et montrons que $\operatorname{Im} u^{\ell+1} = \operatorname{Im} u^{\ell+2}$.
Nous pourrions montrer ce résultat en utilisant ce qui précède et le théorème du rang mais donnons une démonstration directe. Nous savons déjà que $\operatorname{Im} u^{\ell+2} \subset \operatorname{Im} u^{\ell+1}$.
Soit $y \in \operatorname{Im} u^{\ell+1}$. $\exists x \in E$, $y = u^{\ell+1}(x) = u(u^{\ell}(x))$.
$u^{\ell}(x) \in \operatorname{Im} u^{\ell} = \operatorname{Im} u^{\ell+1}$ donc $\exists t \in E$, $u^{\ell}(x) = u^{\ell+1}(t)$. Alors $y = u^{\ell+1}(x) = u(u^{\ell}(x)) = u(u^{\ell+1}(t))$
Donc $y = u^{\ell+2}(t) \in \operatorname{Im} u^{\ell+2}$. Ceci achève de prouver que $\operatorname{Im} u^{\ell+1} = \operatorname{Im} u^{\ell+2}$.
Si $\operatorname{Im} u^{\ell} = \operatorname{Im} u^{\ell+1}$ alors $\operatorname{Im} u^{\ell+1} = \operatorname{Im} u^{\ell+2}$.

c) Supposons que $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$. Alors u est injectif ; u^k est alors également injectif comme composé de k endomorphisme(s) injectif(s) ; on a alors $\operatorname{Ker} u^k = \{0_E\}$.
Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ entraîne $\operatorname{Ker} u^k = \{0_E\}$.

Supposons $\operatorname{Im} u = E$. u est surjectif ; u^k l'est aussi comme composé de k endomorphisme(s) surjectif(s) ; on a alors $\operatorname{Im} u^k = E$.
Donc $\operatorname{Im} u = E$ entraîne $\operatorname{Im} u^k = E$.

Envisageons deux cas
1er cas.. $\exists i \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Ker} u^i = \operatorname{Ker} u^{i+1}$.
Une récurrence simple, utilisant le résultat du b) montre que :
$\forall k \in [\![i, +\infty[\![$, $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^i$. La suite $(\operatorname{Ker} u^k)_{k \geqslant i}$ est constante
Comme i appartient à $[\![1, n]\!]$ on a en particulier $\operatorname{Ker} u^n = \operatorname{Ker} u^{n+1}$.
2ème cas.. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Ker} u^i \neq \operatorname{Ker} u^{i+1}$.
Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Ker} u^i \subsetneq \operatorname{Ker} u^{i+1}$
Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^i < \dim \operatorname{Ker} u^{i+1}$
Alors $0 \leqslant \dim \operatorname{Ker} u < \dim \operatorname{Ker} u^2 < \cdots < \dim \operatorname{Ker} u^n < \dim \operatorname{Ker} u^{n+1} \leqslant n$.
Mieux $\dim \operatorname{Ker} u \geqslant 1$ car $\dim \operatorname{Ker} u = 0$ donne d'après le début de c) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 = \{0_E\}$!!
Donc $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker} u < \dim \operatorname{Ker} u^2 < \cdots < \dim \operatorname{Ker} u^n < \dim \operatorname{Ker} u^{n+1} \leqslant n$
$\dim \operatorname{Ker} u, \dim \operatorname{Ker} u^2, \dots, \dim \operatorname{Ker} u^n, \dim \operatorname{Ker} u^{n+1}$ sont $n+1$ éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ qui possède n éléments !! Ceci est impossible.
Finalement $\operatorname{Ker} u^n = \operatorname{Ker} u^{n+1}$. On montre par des considérations analogues que $\operatorname{Im} u^n = \operatorname{Im} u^{n+1}$!

d) Le théorème du rang montre que $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u^n + \dim \mathrm{Im}\, u^n$.

Montrons que : $\mathrm{Ker}\, u^n \cap \mathrm{Im}\, u^n = \{0_E\}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u^n \cap \mathrm{Im}\, u^n$. $u^n(x) = 0_E$ et $\exists t \in E$, $x = u^n(t)$.

Alors $u^{2n}(t) = u^n(u^n(t)) = u^n(x) = 0_E$. $t \in \mathrm{Ker}\, u^{2n}$.

Or $\mathrm{Ker}\, u^n = \mathrm{Ker}\, u^{n+1}$ donc $\forall k \in [\![n, +\infty[\![$, $\mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^n$. En particulier $\mathrm{Ker}\, u^{2n} = \mathrm{Ker}\, u^n$.

Ainsi $t \in \mathrm{Ker}\, u^n$, $x = u^n(t) = 0_E$. $x = 0_E$. Alors $\mathrm{Ker}\, u^n \cap \mathrm{Im}\, u^n = \{0_E\}$.

Ceci achève de prouver que : $\underline{\underline{E = \mathrm{Ker}\, u^n \oplus \mathrm{Im}\, u^n}}$.

PARTIE II

Q1) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Posons $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = M_{\mathcal{B}}(v)$. $AB - BA = A$.

$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$.

<u>La matrice de u relativement à une base quelconque de E a une trace nulle.</u>

Si u est bijectif, u est un automorphisme de E et : $u^{-1} \circ v \circ u = u^{-1} \circ (u \circ v - u) = v - \mathrm{Id}_E$ ce que réprouve la morale de I Q 3 c) ; <u>u n'est pas bijectif.</u>

Q2) $n = 1$. Soit A la matrice de u dans une base de E. $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A \in M_1(K)$ donc $A = 0$; $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Si $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et si $u \circ v - v \circ u = u$ alors $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Réciproquement si $v \in \mathcal{L}(E)$ et si $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$: $u \circ v - v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} = u$.

Ainsi $\underline{\underline{\{(u,v) \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = u\} = \{(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2 \mid u = 0_{\mathcal{L}(E)}\}}}$ pour $n = 1$.

Q3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de u dans cette base. Il existe $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \in K^3$ tel que : $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{c} \\ \hat{b} & -\hat{a} \end{pmatrix}$ car $\mathrm{tr}(A) = 0$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{c} \\ \hat{b} & -\hat{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{c} \\ \hat{b} & -\hat{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}^2 + \hat{c}\hat{b} & 0 \\ 0 & \hat{a}^2 + \hat{c}\hat{b} \end{pmatrix} = (\hat{a}^2 + \hat{c}\hat{b}) I_2.$$ $u^2 = \alpha \mathrm{Id}_E$ avec $\alpha = \hat{a}^2 + \hat{c}\hat{b}$.

Supposons α non nul. Alors A^2 est inversible ; u^2 aussi. $\mathrm{Ker}\, u^2 = \{0_E\}$.

Alors $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2 = \{0_E\}$. u est un endomorphisme injectif de E qui est de dimension 2. u est bijectif !

Ainsi $\alpha = 0$. $A^2 = 0$. $\underline{\underline{u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}}}$.

(Q4) Ici u n'est pas l'endomorphisme nul ; $\operatorname{Ker} u \neq E$. $\underline{\underline{E \setminus \operatorname{Ker} u \neq \emptyset}}$.

a) Soit $a \in E$. Si $u(a) = 0_E$: $(a, u(a))$ est liée. Supposons $u(a) \neq 0_E$ et montrons que $(a, u(a))$ est une base de E. Il suffit de prouver que $(a, u(a))$ est libre car $\dim E = 2$.

Soit $(\alpha, \beta) \in K^2$ tel que : $\alpha a + \beta u(a) = 0_E$; $\alpha u(a) + \beta u^2(a) = u(0_E) = 0_E$.

Or $u^2(a) = 0_E$ ($u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$) ; ainsi $\alpha u(a) = 0_E$. Comme $u(a) \neq 0_E$: $\alpha = 0$.

Alors $\beta u(a) = 0_E$ et $u(a) \neq 0_E$ donne $\beta = 0$. $\alpha = \beta = 0$.

Si $u(a) \neq 0_E$ $(a, u(a))$ est libre donc est une base de E.

Finalement $(a, u(a))$ est une base de E si et seulement si $u(a) \neq 0_E$ donc si $a \notin \operatorname{Ker} u$.

L'ensemble des éléments a de E tels que $(a, u(a))$ soit une base de E est $E \setminus \operatorname{Ker} u$.

Soit $a \in E \setminus \operatorname{Ker} u$. $\mathcal{B} = (a, u(a))$ est une base de E.

$u(a) = 0.a + 1.u(a)$ et $u^2(a) = 0_E$. $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $w \in \mathcal{L}(E)$. Posons $H = M_{\mathcal{B}}(w)$. $H = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{c} \\ \hat{b} & \hat{d} \end{pmatrix}$ avec $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}) \in K^4$.

(u,w) vérifie (P) $\iff M_{\mathcal{B}}(u) H - H M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(u)$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{c} \\ \hat{b} & \hat{d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{c} \\ \hat{b} & \hat{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -\hat{c} & 0 \\ \hat{a} - \hat{d} & \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \hat{c} = 0 \text{ et } \hat{a} - \hat{d} = 1$$

(u,w) vérifie (P) $\iff \exists (\hat{a}, \hat{b}) \in K^2$, $M_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \hat{a} & 0 \\ \hat{b} & \hat{a} - 1 \end{pmatrix}$.

Soit $w \in W$. $\exists (\hat{a}, \hat{b}) \in K^2$, $M_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \hat{a} & 0 \\ \hat{b} & \hat{a} - 1 \end{pmatrix}$.

$M_{\mathcal{B}}(w)$ est triangulaire inférieure ; $\operatorname{Sp}(w) = \operatorname{Sp}(M_{\mathcal{B}}(w)) = \{\hat{a}, \hat{a} - 1\}$.

Or $\hat{a} \neq \hat{a} - 1$ donc $M_{\mathcal{B}}(w)$ possède deux valeurs propres distinctes et est une matrice d'ordre 2, $M_{\mathcal{B}}(w)$ est donc diagonalisable ; w aussi.

Les éléments de W sont diagonalisables.

c) $M_{\mathcal{B}}(w_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($w_0 \in W$! $\hat{a} = 1$ et $\hat{b} = 0$). Posons $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{pmatrix}\hat{a} & 0\\ \hat{b} & \hat{a}-1\end{pmatrix};(\hat{a},\hat{b})\in K^2\right\}=\left\{\begin{pmatrix}(\hat{a}-1)+1 & 0\\ \hat{b} & \hat{a}-1\end{pmatrix};(\hat{a},\hat{b})\in K^2\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a'+1 & 0\\ b' & a'\end{pmatrix};(a',b')\in K^2\right\}=\left\{H_0+a'\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b'\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};(a',b')\in K^2\right\}$$

$$\underline{\left\{\begin{pmatrix}\hat{a} & 0\\ \hat{b} & \hat{a}-1\end{pmatrix};(\hat{a},\hat{b})\in K^2\right\}=\left\{H_0+H\ ;\ H\in \mathrm{Vect}\left(I_2,\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\right\}}=\text{“} H_0+\mathrm{Vect}\left(I_2,\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\text{”}.$$

Rappelons que : $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\Pi_{\mathcal{B}}(u)$ et que $\Pi_{\mathcal{B}}(Id_E)=I_2$.

$W=\left\{\omega\in\mathcal{L}(E)\mid \exists(\hat{a},\hat{b})\in K^2,\ \Pi_{\mathcal{B}}(\omega)=\begin{pmatrix}\hat{a}&0\\ \hat{b}&\hat{a}-1\end{pmatrix}\right\}$ donc d'après ce qui précède :

$W=\{\omega\in\mathcal{L}(E)\mid \exists\,\varphi\in \mathrm{Vect}(Id_E,u),\ \omega=\omega_0+\varphi\}=\{\omega_0+\varphi\mid\varphi\in\mathrm{Vect}(Id_E,u)\}$.

ceci prouve alors que l'ensemble des endomorphismes φ de E tels que $\omega_0+\varphi$ appartienne à W est $S=\mathrm{Vect}(Id_E,u)$

notons que dim $S=2$. Il suffit de prouver que (Id_E,u) est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in K^2$ tel que : $\alpha Id_E+\beta u=0_{\mathcal{L}(E)}$. $\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$.

donc (Id_E,u) est libre et ainsi $S=\mathrm{Vect}(Id_E,u)$ est un plan vectoriel.

Pour conclure : $\underline{\underline{W=\omega_0+S \text{ où } S \text{ est le plan vectoriel de } \mathcal{L}(E) \text{ admettant pour base } (Id_E,u)}}$ ... pour une seconde version voir la partie III

d) Soit $\omega\in W$. ω est diagonalisable. Soit $\underline{\hat{\mathcal{B}}=(v,y)}$ une base de E constituée de vecteurs propres de ω respectivement associés aux valeurs propres $\hat{a}$ et $\hat{a}-1$ (... voir plus haut). $\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(\omega)=\begin{pmatrix}\hat{a}&0\\0&\hat{a}-1\end{pmatrix}$.

Soit $t\in\mathcal{L}(E)$. Posons $\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(t)=\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&\delta\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}\alpha\hat{a} & \gamma(\hat{a}-1)\\ \beta\hat{a} & \delta(\hat{a}-1)\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}\alpha\hat{a} & \gamma\hat{a}\\ \beta(\hat{a}-1) & \delta(\hat{a}-1)\end{pmatrix}$$

(t,ω) a la propriété (P) $\Leftrightarrow t\circ\omega-\omega\circ t=t\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a}&0\\0&\hat{a}-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\hat{a}&0\\0&\hat{a}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&\delta\end{pmatrix}$

(t,ω) a la propriété (P) $\Leftrightarrow\begin{cases}0=\alpha\\ \beta=\beta\ !\\ -\gamma=\gamma\\ 0=\delta\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\gamma=\delta=0$

Finalement (t,ω) a la propriété (P) $\Leftrightarrow \exists\beta\in K,\ \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(\omega)=\begin{pmatrix}0&0\\ \beta&0\end{pmatrix}$

ou : $\underline{\underline{(t,\omega)\text{ a la propriété (P)}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists\beta\in K,\ t(v)=\beta y\\ t(y)=0\end{cases}}}$

$T=\left\{t\in\mathcal{L}(E)\mid\exists b\in K,\ \Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(t)=\begin{pmatrix}0&0\\b&0\end{pmatrix}\right\}=\left\{t\in\mathcal{L}(E)\mid\Pi_{\hat{\mathcal{B}}}(t)\in\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\right\}$

Soit t_0 l'endomorphisme de E de matrice $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ dans $\hat{\mathcal{B}}$: $\underline{T\text{ est la droite vectorielle engendrée par } t_0}$.

PARTIE III

(Q1) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k o v - v o u^k = k u^k$.

→ Par hypothèse la propriété est vraie pour $k=1$... et même pour $k=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $k+1$.

$u^{k+1} o v - v o u^{k+1} = u^{k+1} o v - (v o u^k) o u \underset{HR}{=} u^{k+1} o v - (u^k o v - k u^k) o u = u^{k+1} o v - u^k o v o u + k u^{k+1}$

Or $v o u = u o v - u$

Ainsi $u^{k+1} o v - v o u^{k+1} = u^{k+1} o v - u^k o (u o v - u) + k u^{k+1} = u^{k+1} o v - u^{k+1} o v + u^{k+1} + k u^{k+1} = (k+1) u^{k+1}$ ce qui achève la récurrence.

<u>$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k o v - v o u^k = k u^k$.</u>

<u>Remarque</u> : ceci vaut pour $k=0$ et on peut encore montrer que : $\forall P \in K[X]$, $P(u) o v - v o P(u) = u o P'(u) = P'(u) o u$.

(Q2) Montrons que u^n est nul. Raisonnons par l'absurde et supposons que u^n n'est pas nul c'est à dire que $\dim \operatorname{Im} u^n \neq 0$. Montrons que $\operatorname{Im} u^n$ est stable par u^n et v.

$\operatorname{Im} u^{2n} \subset \operatorname{Im} u^n$ (!!) donc $\operatorname{Im} u^n$ est stable par u^n non ?

Soit $x \in \operatorname{Im} u^n$. $\exists y \in E$, $x = u^n(y)$.

Or $v o u^n = u^n o v - n u^n$. Donc $v(x) = v(u^n(y)) = (u^n o v)(y) - n u^n(y)$

$v(x) = u^n(v(y) - ny)$; $v(x) \in \operatorname{Im} u^n$.

Ainsi <u>$\operatorname{Im} u^n$ est stable par u^n et v.</u>

. <u>$f \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} u^n)$ et $\forall x \in \operatorname{Im} u^n$, $f(x) = u^n(x)$.</u> <u>$g \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} u^n)$ et $\forall x \in \operatorname{Im} u^n$, $g(x) = v(x)$.</u>

Rappelons que $E = \operatorname{Ker} u^n \oplus \operatorname{Im} u^n$. Montrons que f est bijectif.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. $x \in \operatorname{Im} u^n$ et $f(x) = 0_E$; $x \in \operatorname{Im} u^n$ et $u^n(x) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker} u^n \cap \operatorname{Im} u^n = \{0_E\}$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. f est injectif donc bijectif car $f \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} u^n)$ et $\dim \operatorname{Im} u^n < +\infty$.

<u>f est bijectif.</u> Exprimons $f o g - g o f$ en fonction de f.

Soit $x \in \operatorname{Im} u^n$. $(f o g - g o f)(x) = u^n(v(x)) - v(u^n(x)) = n u^n(x) = n f(x)$; $f o g - g o f = n f$

Donc $f^{-1} o f o g - f^{-1} o g o f = n \, Id_{\operatorname{Im} u^n}$; $g - n \, Id_{\operatorname{Im} u^n} = f^{-1} o g o f$ ce qui est impossible d'après I Q1 <u>c)</u>. <u>Ainsi $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.</u>

Q3) Dans la suite Ker u est de dimension 1.

Montrons par récurrence que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$. Le tout en un !

→ c'est vrai pour $k=1$ par hypothèse.

→ Supposons la propriété vraie pour k et montrons la pour $k+1$ ($k \in [\![1,n-1]\!]$).

$\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$; $u^{k+1}(E) \subset u^k(E)$; $u(u^k(E)) \subset u^k(E)$; $u^k(E)$ est stable par u.

$h \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} u^k)$ et $\forall x \in \operatorname{Im} u^k$, $h(x) = u(x)$.

Clairement $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} u^{k+1}$ et $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} u$.

$\dim \operatorname{Ker} h \leq \dim \operatorname{Ker} u = 1$ donc $\dim \operatorname{Ker} h \in \{0,1\}$. $\dim \operatorname{Ker} h = 0$ ou $\dim \operatorname{Ker} h = 1$.

Supposons que $\dim \operatorname{Ker} h = 0$. $\operatorname{Ker} h = \{0_E\}$. Alors h est un endomorphisme injectif de $\operatorname{Im} u^k$ et $\dim(\operatorname{Im} u^k) < +\infty$; h est un automorphisme de $\operatorname{Im} u^k$.

Alors $\operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} h = \operatorname{Im} u^k$.

D'après J on a alors $\forall i \in [\![k,+\infty[\![$, $\operatorname{Im} u^i = \operatorname{Im} u^k$. Alors $\operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^n = \{0_E\}$.

Donc $\operatorname{Ker} u^k = E$; Alors $\dim \operatorname{Ker} u^k = n$ et ainsi $k = n$!! ($k \in [\![1,n-1]\!]$).

Ainsi $\operatorname{Ker} h$ n'est pas de dimension 0 et alors $\dim \operatorname{Ker} h = 1$.

Appliquons le théorème du rang à h. $\dim(\operatorname{Im} u^k) = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h$.

Donc $\dim(\operatorname{Im} u^k) = 1 + \dim(\operatorname{Im} u^{k+1})$; on a encore :

$n - \dim \operatorname{Ker} u^k = 1 + n - \dim \operatorname{Ker} u^{k+1}$; $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} = 1 + \dim \operatorname{Ker} u^k = k+1$.

Ainsi s'achève la récurrence.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$ (et $\dim \operatorname{Im} u^k = n-k$).

Q4) a) Soit $a \in E$. Si $u^{n-1}(a) = 0_E$ la famille $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est liée.

Supposons alors $u^{n-1}(a) \neq 0_E$ et montrons que $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^n$ tel que : $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(a) = 0_E$. Montrons à l'aide d'une récurrence faible que $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $\alpha_i = 0$.

→ $\alpha_0 a + \alpha_1 u(a) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(a) = 0_E$. Rappelons-nous que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et "composons" alors par u^{n-1}.

On obtient $\alpha_0 u^{n-1}(a) + \alpha_1 u^n(a) + \dots + \alpha_{n-1} u^{2n-2}(a) = u^{n-1}(0_E) = 0_E$.

C'est à dire $\alpha_0 u^{n-1}(a) = 0_E$ et donc $\alpha_0 = 0$ car $u^{n-1}(a) \neq 0_E$.

→ Supposons que pour i dans $⟦0, n-2⟧$ on ait $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_i = 0$ et montrons que $\alpha_{i+1} = 0$.

On a $\alpha_{i+1} u^{i+1}(a) + \alpha_{i+2} u^{i+2}(a) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(a) = 0_E$.

Composons par u^{n-2-i} $(n-2-i \geq 0 \,!)$

On obtient $\alpha_{i+1} u^{n-1}(a) + \alpha_{i+2} u^{n}(a) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{2n-3-i}(a) = 0_E$ $\quad = 0_E$.

Ainsi $\alpha_{i+1} = 0$ car $u^{n-1}(a) \neq 0_E$.

Ceci achève la récurrence ; $(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est libre.

Finalement $(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ libre $\Leftrightarrow u^{n-1}(a) \neq 0_E \Leftrightarrow a \notin \operatorname{Ker} u^{n-1}$.

$(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ étant une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n on peut alors dire que :

$(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ base de $E \Leftrightarrow (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ famille libre $\Leftrightarrow a \notin \operatorname{Ker} u^{n-1}$.

Ainsi $\underline{(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)) \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } a \notin \operatorname{Ker} u^{n-1}.}$

Notons que $\dim \operatorname{Ker} u^{n-1} = n-1$; $\operatorname{Ker} u^{n-1} \subsetneq E$. Ainsi il existe un vecteur a de E tel que $\mathcal{B} = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ soit une base de E.

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Soit $k \in ⟦1, n-1⟧$.

$$\forall i \in ⟦0, n-1⟧, \quad u^k(u^i(a)) = \begin{cases} u^{k+i}(a) & \text{si } i \leq n-1-k \\ 0_E & \text{si } i > n-1-k. \end{cases}$$

colonne $n-k$

$$\text{Ainsi } M_{\mathcal{B}}(u^k) = \begin{array}{l} \\ \\ \text{ligne } k+1 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{k, n-k} & O_k \\ I_{n-k} & O_{n-k, k} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{n-k}\underbrace{\qquad}_{k}$; hauteurs : k et $n-k$.

matrice par blocs

$u^k(u^{n-k}(a)) = 0_E$, $u^k(u^{n-k+1}(a)) = 0_E$, $\ldots$, $u^k(u^{n-1}(a)) = 0_E$.

$(u^{n-k}(a), u^{n-k+1}(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est une famille de k éléments de $\operatorname{Ker} u^k$.

Cette famille étant une sous-famille de la base $\mathcal{B}$ elle est libre.

$\operatorname{Ker} u^k$ est de plus de dimension k. Par conséquent :

$$\underline{(u^{n-k}(a), u^{n-k+1}(a), \ldots, u^{n-1}(a)) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} u^k}$$

b] En clair il s'agit de trouver les endomorphismes w de E tels que

1°.- (u,w) vérifie (P)

2°.- $M_{\mathcal{B}}(w)$ est diagonale.

Soit donc w un endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & (0) \\ & \lambda_1 & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$

Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $w(u^k(a)) = \lambda_k u^k(a)$.

Rappelons que deux endomorphismes de E sont égaux s'ils coïncident sur une base de E.

Ainsi (u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow u\circ w - w\circ u = u \Leftrightarrow \forall k\in[\![0,n-1]\!], (u\circ w)(u^k(a)) - (w\circ u)(u^k(a)) = u(u^k(a))$

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow \forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $u(\lambda_k u^k(a)) - w(u^{k+1}(a)) = u^{k+1}(a)$

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow \forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\lambda_k u^{k+1}(a) - w(u^{k+1}(a)) = u^{k+1}(a)$

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![0,n-2]\!], \ \lambda_k u^{k+1}(a) - \lambda_{k+1} u^{k+1}(a) = u^{k+1}(a) \\ \lambda_{n-1} \underbrace{u^n(a)}_{=0_E} - w(\underbrace{u^n(a)}_{=0_E}) = \underbrace{u^n(a)}_{=0_E} \end{cases}$

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow (\lambda_k - \lambda_{k+1} - 1) u^{(k+1)}(a) = 0_E$ pour tout $k \in [\![0,n-2]\!]$

(u,w) vérifie (P) $\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}$ $\lambda_k - \lambda_{k+1} - 1 = 0$ pour tout $k\in[\![0,n-2]\!]$.

$\forall k \in [\![0,n-2]\!]$, $u^{(k+1)}(a) \neq 0_E$

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow \forall k\in[\![0,n-2]\!]$, $\lambda_{k+1} = \lambda_k - 1$

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow (\lambda_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est arithmétique de raison -1.

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow \forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\lambda_k = \lambda_{n-1} + n - 1 - k$.

Ainsi si $w \in \mathcal{L}(E)$:

w est un élément de W dont $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres ssi : $\exists \lambda \in K$, $M_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \lambda+n-1 & & (0) \\ & \lambda+n-2 & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \lambda+1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$.

(Q5) a] b] $M_{\mathcal{B}}(w_0) = \begin{pmatrix} n-1 & & (0) \\ & n-2 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $w \in \mathcal{L}(E)$. (u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow u\circ w - w\circ u = u \Leftrightarrow u\circ w - w\circ u = u\circ w_0 - w_0\circ u$

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow u\circ(w - w_0) - (w-w_0)\circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(u,w) vérifie (P) $\Leftrightarrow w - w_0$ commute avec u.

Ainsi $W = \{ w\in\mathcal{L}(E) \mid w - w_0 \text{ commute avec } u\} = \{ w_0 + \varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \varphi\circ u = u\circ\varphi\}$

Posons alors $S=\{\varphi\in\mathcal{L}(E) \mid \varphi\circ u=u\circ\varphi\}$. $W=\{\omega_0+\varphi\ ;\ \varphi\in S\}=\omega_0+S$.

Il ne reste plus qu'à prouver que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que $(Id_E, u, u^2,\dots, u^{n-1})$ en est une base.

→ Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in K^n$. $\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k\right)\circ u=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^{k+1}=u\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k\right)$; $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k\in S$

Ainsi $Vect(Id_E,u,u^2,\dots,u^{n-1})\subset S$.

→ Montrons l'inclusion inverse. Soit $\varphi\in S$. $\varphi\circ u=u\circ\varphi$ ... et par récurrence $\forall k\in\mathbb{N}$, $\varphi\circ u^k=u^k\circ\varphi$.

$\varphi(a)$ est un élément de E donc $\exists(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in K^n$, $\varphi(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k(a)$.

Nous allons montrer que $\varphi=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k$.

φ et $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k$ sont deux endomorphismes de E ; ils seront égaux s'ils coïncident sur la base $\mathcal{B}$.

$\forall i\in[\![0,n-1]\!]$, $\varphi(u^i(a))=(\varphi\circ u^i)(a)=(u^i\circ\varphi)(a)=u^i(\varphi(a))=u^i\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k(a)\right)$

$\forall i\in[\![0,n-1]\!]$, $\varphi(u^i(a))=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^i(u^k(a))=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^{i+k}(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k(u^i(a))=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k\right)(u^i(a))$.

Ceci achève de montrer que $\varphi=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k$; $\varphi\in Vect(Id_E,u,\dots,u^{n-1})$.

Finalement $S=Vect(Id_E,u,u^2,\dots,u^{n-1})$.

Il reste plus alors qu'à montrer que $(Id_E,u,u^2,\dots,u^{n-1})$ est libre.

Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in K^n$ tel que : $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k=0_{\mathcal{L}(E)}$.

En particulier $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k(a)=0_E$; ceci donne alors $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_{n-1}$ car $\mathcal{B}=(a,u(a),\dots,u^{n-1}(a))$ est une base de E.

Ainsi $(Id_E,u,u^2,\dots,u^{n-1})$ est libre. C'est donc une base de S.

→ $\underline{W=\{\omega_0+\varphi\ ;\ \varphi\in S\}\text{ où } S=Vect(Id_E,u,\dots,u^{n-1})}$

→ $\underline{(Id_E,u,\dots,u^{n-1})\text{ est une base de } S}$.

} W est le sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ qui contient ω_0 et qui a pour direction S.

Rappelons que $M_{\mathcal{B}}(\omega_0)=\begin{pmatrix} n-1 & & & (0)\\ & n-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ (0) & & & & 0\end{pmatrix}$.

Notons que : $\forall(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in K^n$, $M_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k M_{\mathcal{B}}(u^k)=\begin{pmatrix}\alpha_0 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0\\ \alpha_{n-1} & \cdots\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0\end{pmatrix}$

· Soit $w \in \mathcal{L}(E)$.

$w \in W \iff \exists (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^n,\ \Pi_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \alpha_0+n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0+n-2 & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \alpha_0+1 & 0 \\ \alpha_{n-1} & \cdots \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}$

c)

Soit $w \in W$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in K^n$ tel que $\Pi_{\mathcal{B}}(w) =$ ↑

$Sp(w) = \{\alpha_0+n-1, \alpha_0+n-2, \dots, \alpha_0\}$ ($\Pi_{\mathcal{B}}(w)$ étant triangulaire inférieure son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux).

Ainsi w est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n qui possède n valeurs propres distinctes ; <u>w est diagonalisable.</u>

<u>$Sp(w) = \{\alpha_0, \alpha_0+1, \alpha_0+2, \dots, \alpha_0+n-1\}$ et α_0 est la valeur propre de w qui a la plus petite partie réelle.</u>

(Q6) Soit $w \in W$. Pour rationaliser les écritures notons λ_1 la valeur propre de w qui a la plus petite partie réelle. Posons $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\lambda_i = \lambda_1 + i - 1$.

$Sp(w) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Les n valeurs propres de w sont deux à deux distinctes. Ainsi si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, a_i est un vecteur propre de w associé à la valeur propre λ_i, $\hat{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de w respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Posons $T = \{t \in \mathcal{L}(E) \mid (t, w)$ vérifie $(P)\} = \{t \in \mathcal{L}(E) \mid t \circ w - w \circ t = t\}$.

Soit t un endomorphisme de E. $\hat{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une base de E

$t \in T \iff t \circ w - w \circ t = t \iff \forall i \in [\![1, n]\!], (t \circ w - w \circ t)(a_i) = t(a_i)$

$t \in T \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ t(w(a_i)) - w(t(a_i)) = t(a_i)$.

$t \in T \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ w(t(a_i)) = t(\lambda_i a_i) - t(a_i) = (\lambda_i - 1)\, a_i$

$t \in T \iff \forall i \in [\![1, n]\!]$, $t(a_i) \in \mathrm{Ker}\,(w - (\lambda_i - 1)\,\mathrm{Id}_E)$.

Notons que si $i = 1$: $\lambda_i - 1 = \lambda_1 - 1 \notin Sp(w)$ et : $\mathrm{Ker}\,(w - (\lambda_i - 1)\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$;

si $i \in [\![2, n]\!]$, $\lambda_i - 1 = \lambda_{i-1} \in Sp(w)$ et $\mathrm{Ker}\,(w - (\lambda_i - 1)\mathrm{Id}_E) = SEP(w, \lambda_{i-1}) = \mathrm{Vect}\,(a_{i-1})$.

ceci donne alors :

$t \in T \Leftrightarrow t(a_1)=0_E$ et $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $t(a_i) \in \mathrm{Vect}(a_{i-1})$

$t \in T \Leftrightarrow t(a_1)=0_E$ et $\exists(\sigma_2,\sigma_3,\dots,\sigma_n) \in K^{n-1}$, $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $t(a_i)=\sigma_i a_{i-1}$

$T=\{t \in \mathcal{L}(E) \mid t(a_1)=0_E$ et $\exists(\sigma_2,\sigma_3,\dots,\sigma_n)\in K^{n-1}, \forall i \in [\![2,n]\!], t(a_i)=\sigma_i a_{i-1}\}$.

ceci s'exprime encore matriciellement de la manière suivante.

$$T=\{t \in \mathcal{L}(E) \mid \exists(\sigma_2,\sigma_3,\dots,\sigma_n)\in K^{n-1},\ M_{\hat{\mathcal{B}}}(t)=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \sigma_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}\}.$$

Voir une remarque p.13

Ici, nous avons trois possibilités pour montrer que T est un sous-espace vectoriel !
Choisissons la définition. $T=\{t \in \mathcal{L}(E) \mid t\circ w - w\circ t = t\}$.

→ $T \subset \mathcal{L}(E)$.

→ $0_{\mathcal{L}(E)} \in T$, $u \in T$ ... donc T n'est pas vide.

→ Soient $(t_1,t_2) \in T^2$ et $\lambda \in K$.

$(\lambda t_1 + t_2)\circ w - w\circ(\lambda t_1+t_2) = \lambda(t_1\circ w - w\circ t_1) + t_2\circ w - w\circ t_2 = \lambda t_1 + t_2$;

donc $\lambda t_1 + t_2 \in T$.

T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Notons que T est clairement isomorphe au sev $\mathcal{C}=\{A \in M_n(K) \mid \exists(\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in K^{n-1}, A=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \sigma_n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}\}$

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons E_{ij} l'élément de $M_n(K)$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
$(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $M_n(K)$.

$\mathcal{C}=\{A \in M_n(K) \mid \exists(\sigma_2,\sigma_3,\dots,\sigma_n)\in K^{n-1}, A=\sigma_2 E_{12}+\sigma_3 E_{23}+\dots+\sigma_n E_{n-1\,n}\}$

$\mathcal{C}=\mathrm{Vect}(E_{12},E_{23},\dots,E_{n-1,n})$. $(E_{12},E_{23},\dots,E_{n-1,n})$ est une famille libre (sous-famille d'une famille libre) et génératrice de $\mathcal{C}$ donc une base de $\mathcal{C}$. Ainsi $\dim \mathcal{C}=n-1$.

Finalement : T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n-1$.

Remarque.— Dans §6 j'ai choisi de classer les valeurs propres de ω dans l'ordre croissant $\lambda_1, \lambda_1+1, \dots, \lambda_1+n-1$.

J'aurais pu les classer dans l'ordre décroissant en par comme nous les avions trouvées dans §5.

Nous aurions alors considéré une base $\check{\mathcal{B}}=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ de E constituée de vecteurs propres de ω respectivement associés aux valeurs propres $\lambda'_1, \lambda'_1-1, \dots, \lambda'_1-(n-1)$.

Nous aurions alors montré que si $t \in \mathcal{L}(E)$:

$$(t,\omega) \text{ vérifie } P \Leftrightarrow \exists (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1},\ M_{\check{\mathcal{B}}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \delta'_1 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \delta'_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Cela ne change pas T ! cela ne change donc pas sa structure et sa dimension.