► Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à deux, $\mathbb{K}$ est $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, J_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1, U_n est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

► k_0 est un élément de $\mathbb{N}$ et $(z_k)_{k\geqslant k_0}$ est une suite de nombres complexes.

La suite $(z_k)_{k\geqslant k_0}$ converge s'il existe un élément z de $\mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty}|z_k - z| = 0$.

Si la suite $(z_k)_{k\geqslant k_0}$ converge il existe un unique élément z de $\mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty}|z_k - z| = 0$ que l'on appelle la limite de la suite $(z_k)_{k\geqslant k_0}$ et que l'on note $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k$; on dit alors que la suite $(z_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers z.

► p, q, r, s sont des éléments de $\mathbb{N}^*$. k_0 est un élément de $\mathbb{N}$.

Pour tout k dans $[\![k_0,+\infty[\![$, $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $B = (b_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

• Nous dirons que la suite $(A_k)_{k\geqslant k_0}$ est convergente si pour tout élément (i,j) de $[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$, la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k\geqslant k_0}$ converge.

• Nous dirons que la suite $(A_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers B si pour tout élément (i,j) de $[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$, la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k\geqslant k_0}$ converge vers $b_{i,j}$.

Nous admettrons que si la suite $(A_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers B alors, pour toute matrice C (resp. D) de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{K})$), la suite $(CA_k)_{k\geqslant k_0}$ (resp. $(A_kD)_{k\geqslant k_0}$) converge vers CB (resp. BD).

Nous admettrons aussi que si la suite $(A_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers B alors la suite $({}^tA_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers ${}^tB$.

► n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est **stochastique** si tout ses coefficients sont des réels positifs ou nul et si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

Nous noterons $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est stochastique si et seulement si $\begin{cases} \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}\in\mathbb{R}^+ \\ \text{et} \\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \end{cases}$

► On rappelle que si z et z' sont deux éléments de $\mathbb{C}$: $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$.

PARTIE I Chaînes de Markov

On considère un sytème qui évolue dans le temps de manière aléatoire. L'ensemble des dates est $\mathbb{N}$. A chaque date le système est dans l'un et l'un seulement des n états E_1, E_2, ..., E_n.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, X_k est la variable aléatoire égale au numéro de l'état du système à l'instant k.

On suppose que l'état du système à l'instant $k+1$ ne dépend que de son état à l'instant k et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Ainsi si k est dans $\mathbb{N}$, si i_0, i_1, ..., i_k, i_{k+1} sont des éléments de $[\![1,n]\!]$ et si $P(\{X_0 = i_0\}\cap\{X_1 = i_1\}\cap\cdots\cap\{X_k = i_k\})$ n'est pas nul alors $P_{\{X_0=i_0\}\cap\{X_1=i_1\}\cap\cdots\cap\{X_k=i_k\}}(X_{k+1} = i_{k+1}) = P_{\{X_k=i_k\}}(X_{k+1} = i_{k+1})$.

On dira que la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ est une **chaîne de Markov**.

Soient i et j sont deux éléments de $[\![1,n]\!]$. On suppose que la probabilité pour que que le système soit dans l'état E_j à l'instant $k+1$ sachant qu'il était dans l'état E_i à l'instant k ne dépend pas de k. Nous noterons $t_{i,j}$ cette probabilité.

On dira que la chaîne de Markov $(X_k)_{k\geqslant 0}$ est **homogène**.

La matrice de transition du système est la matrice $T = (t_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose encore, pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $V_k = \begin{pmatrix} P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \\ \vdots \\ P(X_k=n) \end{pmatrix}$ et $W_k = {}^tV_k$.

Q1 **a)** Illustrer ce qui précède par un exemple qui conduit à la matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Donner un second exemple.

On revient au cas général

Q2 Montrer que T est une matrice stochastique.

Q3 k est un élément de $\mathbb{N}$. Exprimer W_{k+1} en fonction de W_k et de T. Exprimer W_k en fonction de W_0 et de T.

Si k est dans $\mathbb{N}$ et si (i,j) appartient à $[\![1,n]\!]^2$, on note $t_{i,j}^{(k)}$ le coefficient de T^k situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Q4 **a)** Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ (et même $\mathbb{N}$) et pour tout élément (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}^{(k)}$ est la probabilité pour que le système soit dans l'état E_j à l'instant k sachant qu'il était dans l'état E_i à l'instant 0.

b) **Facultatif** Montrer que pour tout élément r de $\mathbb{N}$, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$ (et même $\mathbb{N}$) et pour tout élément (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j}^{(k)}$ est la probabilité pour que le système soit dans l'état E_j à l'instant $r+k$ sachant qu'il était dans l'état E_i à l'instant r.

Au choix Q5 ou Q5'. Q5 est hors correction.

Q5 Dans cette question on suppose que $n=3$ et que $T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser T. En déduire T^k pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite $(T^k)_{k\geqslant 0}$ converge et trouver sa limite S.

Montrer que que la suite $(V_k)_{k\geqslant 0}$ converge et trouver sa limite V.

Qu'en déduire pour l'évolution du système au cours du temps et pour la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$?

Q5' Dans cette question on suppose que $n=3$ et que $T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que T est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1/4, 1/4)$.

On ne cherchera pas à calculer explicitement T^k dans cette question.

En déduire que la suite $(T^k)_{k\geqslant 0}$ converge. Nous noterons S sa limite. Montrer que que la suite $(V_k)_{k\geqslant 0}$ converge. Nous noterons V sa limite.

Qu'en déduire pour l'évolution du système au cours du temps et pour la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$?

b) Montrer que S est stochastique et que toutes ses lignes (ou ses colonnes !) sont égales.

c) On pose $W = {}^tV$. Montrer que $W = W\,T$.

Montrer que W est l'unique élément de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de réels positifs ou nuls de somme 1 et qui vérifie $W = W\,T$.

d) Trouver $S = \lim_{k\to+\infty} T^k$ et $V = \lim_{k\to+\infty} V^k$ si ce n'est déjà fait... Qu'en déduire pour le système.

PARTIE II Suite des puissances d'une matrice stochastique

Q1 $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.

Montrer que A est stochastique si et seulement si $AU_n = U_n$.

Q2 Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{H}_n$ est un élément de $\mathcal{H}_n$.

Q3 **a)** $(A_k)_{k\geqslant k_0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{H}_n$ et B est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A_k)_{k\geqslant k_0}$ converge vers B.

Montrer que B appartient à $\mathcal{H}_n$

b) A est un élément de $\mathcal{H}_n$ et B est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ des puissances de A converge vers B.

Montrer que B appartient à $\mathcal{H}_n$ et que $B^2 = B$.

Q4 $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{H}_n$. On suppose de plus que $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} > 0}$.

On se propose de montrer que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ est convergente.

On pose pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$.

Si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ nous noterons $M(Z)$ (resp. $m(Z)$) le maximum (resp. minimum) de l'ensemble $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.

Dans les questions suivantes $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que : $m(Y) \leqslant m(AY) \leqslant M(AY) \leqslant M(Y)$.

En déduire que les suites $\big(m(A^kY)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(M(A^kY)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

b) On note d le minimum de l'ensemble des coefficients de A. Vérifier que d appartient à $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ M(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, y_j \geqslant d\Big(M(Y) - m(Y)\Big)$ et en déduire que $M(AY) \leqslant d\, m(Y) + (1-d)\, M(Y)$.

Comparer $m(AY)$ et $d\, M(Y) + (1-d)\, m(Y)$.

c) Montrer que $0 \leqslant M(AY) - m(AY) \leqslant (1-2d)\,\big(M(Y) - m(Y)\big)$, puis que les suites $\big(m(A^kY)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(M(A^kY)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

En déduire qu'il existe un réel ℓ_Y tel que la suite $(A^kY)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_Y\, U_n$.

d) Utiliser ce qui précède pour montrer l'existence d'une suite $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ de réels positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^{n} \ell_k = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!],\ \lim_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = \ell_j$.

On considère l'élément $L = (\ell_1\, \ell_2\, \dots\, \ell_n)$ de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Vérifier que $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge ver U_nL. Dans la suite on note A_∞ la limite de la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A_∞ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Montrer que p est une projection et préciser ses éléments.

e) Montrer que $L = (\ell_1\, \ell_2\, \ldots\, \ell_n)$ est l'unique élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls dont la somme est 1 et qui vérifie $L = LA$.

f) **Facultatif** Montrer rapidement que les conclusions de **d)** et **e)** valent encore si l'on remplace l'hypothèse $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} > 0$ par : $\exists r \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}^{(r)} > 0$:

Q5 On reprend les notations et les hypothèses de la question précédente.

Soit $Z = (z_1\, z_2\, \ldots\, z_n)$ un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la suite $(ZA^k)_{k \geqslant 0}$ converge.

b) Montrer que si z_1, z_2, ..., z_n sont des réels positifs ou nuls de somme 1 alors la suite $(ZA^k)_{k \geqslant 0}$ converge vers L.

Q6 On reprend les notations de la partie I et on suppose que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ t_{i,j} > 0$.

Qu'en déduire pour l'évolution du système au cours du temps et pour la suite $(X_k)_{k \geqslant 0}$?

PARTIE III Valeurs propres d'une matrice stochastiques

On trouvera dans les variantes 1 et 2 des méthodes plus usuelles pour montrer une bonne partie des résultats de Q3 et Q4.

Q1 $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante c'est à dire telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Soit i_0 dans $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|$.

Montrer que $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ (on pourra considérer la ${i_0}^{\text{ème}}$ ligne de AX). Qu'en déduire pour A ?

Q2 $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, on pose : $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant r_i\}$.

Montrer que $\mathrm{Sp}\, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ (on pourra utiliser Q1 avec $A - \lambda\, I_n$).

Q3 Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{H}_n$.

On note m le plus petit élément de l'ensemble des coefficients diagonaux de A. $m = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Min}}\, a_{i,i}$.

a) Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de A.

Montrer qu'il existe un élément p de $[\![1,n]\!]$ tel que : $|\lambda - a_{p,p}| \leqslant 1 - a_{p,p}$. En déduire que $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A.

c) Montrer que si $m > \dfrac{1}{2}$, A est inversible.

d) On suppose que $m > 0$. Soit λ une valeur propre de A de module 1. Il existe θ dans $[0, 2\pi[$ tel que $\lambda = e^{i\theta}$.

Montrer que $\lambda = 1$ (on pourra utiliser **a)**).

$\boxed{\textbf{Q4}}$ $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{H}_n$. On suppose de plus que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} > 0$.

Soit $C = (c_{i,j})$ la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de $A - I_n$.

Montrer que si $n \geqslant 3$, C est à diagonale strictement dominante donc inversible. Examiner le cas $n = 2$.

Prouver alors que le rang de $A - I_n$ est de $n - 1$. En déduire le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.

PARTIE IV Lien entre L et le pseudo-inverse de $I_n - A$

On trouvera dans la variante 3 une méthode plus usuelle pour montrer les résultats importants de Q2 .

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle pseudo-inverse de M tout élément M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$MM'M = M,\ M'MM' = M' \text{ et } M'M = MM'.$$

a) Ici $n = 2$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^2. M admet-elle un pseudo-inverse ?

b) Même chose avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) On suppose M inversible. Déterminer l'ensemble des pseudo-inverses de M.

d) M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M' et M'' sont deux pseudo-inverses de M.

En partant de $MM'MM''$, montrer que $MM'' = M'M$, puis que $M' = M''$. Conclusion ?

$\boxed{\textbf{Q2}}$ M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

a) On suppose que M' est un pseudo-inverse de M. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice M' dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

Montrer que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ et que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Montrer que $f \circ g$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} - f \circ g$ sont deux projections dont on précisera les éléments.

b) Réciproquement on suppose ques $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. On se propose de montrer que M admet un pseudo-inverse. On note r le rang de f.

Traiter les cas $r = 0$ et $r = n$. On suppose dans la suite de cette question que r ne vaut ni 0 ni n.

Montrer que l'on peut trouver une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible H de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ telle que : $M = P \begin{pmatrix} H & 0_{\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})} \\ 0_{\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})} & 0_{\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})} \end{pmatrix} P^{-1}$

En remarquant que H possède un pseudo-inverse montrer que M possède un pseudo-inverse (on ne se privera pas de faire des produits par blocs).

c) Montrer que M possède un pseudo-inverse si et seulement si $\operatorname{rg} M^2 = rgM$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ $\boxed{\text{Dans la suite } A = (a_{i,j}) \text{ est un élément de } \mathcal{H}_n. \text{ On suppose de plus que } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ a_{i,j} > 0.}$

On rappelle que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle engendrée par U_n ; en particulier $\operatorname{rg}(I_n - A) = \operatorname{rg}(A - I_n) = n - 1$.

On rappelle encore que $L = (\ell_1\, \ell_2\, \dots\, \ell_n)$ est l'unique élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls dont la somme est 1 et qui vérifie $L = LA$.

On a encore : $A_\infty = \lim\limits_{k\to+\infty} A^k = U_n\, L$

On pose $M = I_n - A$ et note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f$ est l'hyperplan d'équation $\ell_1\, x_1 + \ell_2\, x_2 + \cdots + \ell_n\, x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que M possède un pseudo-inverse que nous noterons M'. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M' dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

c) Montrer que $I_n - MM' = A_\infty$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ On reprend les éléments de la question précédente.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} A^j = (I_n - A^k)\, M' + k\,(I_n - MM')$ (on pourra procéder par récurrence).

b) Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} A^j$ converge et préciser sa limite.

c) Montrer que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de réels positifs ou nuls de somme 1 : $L = \displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} {}^tX A^j\right)$.

LA PARTIE V EST FACULTATIVE !

PARTIE V Variantes et compléments

Dans la suite si σ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ (donc une permutation de $[\![1,n]\!]$, on note P_σ la matrice $(p_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On parle de matrice de permutation.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ *Complément 1* **Caractérisation des matrices stochastiques orthogonales**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On suppose que A est une matrice stochastique et orthogonale.

Montrer que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de A a tous ses coefficients nuls sauf un qui vaut 1.

Ainsi pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, il existe un unique élément $\sigma(i)$ de $[\![1,n]\!]$, tel que : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que σ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$. Ainsi $A = P_\sigma$.

b) Envisagez une réciproque. En déduire le nombre de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui sont orthogonales et stochastiques.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ *Complément 2* **Matrices stochastiques inversibles dont l'inverse est stochastiques**

Déterminer l'ensembles des matrices stochastiques inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont l'inverse est une matrice stochastique.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ *Variante 1* **Retour sur la localisation des valeurs propres d'une matrice stochastique**

$A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{H}_n$ tel que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} > 0$. Soit λ une valeur propre de A de module 1. On se propose de montrer que $\lambda = 1$ et que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)$.

a) Montrer que $|x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell\right|$. en déduire qu'il existe un réel θ tel que : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\,\left(\frac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}-1\right)=0$.

b) Montrer que : $\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ x_\ell = e^{i\theta}\,x_k$ (prendre la partie réelle au niveau de l'égalité précédente et remarquer que $\frac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}$ a une partie réelle inférieure ou égale à 1).

c) Conclure.

$\boxed{\textbf{Q3'}}$ *Variante 2* **Retour sur la localisation des valeurs propres d'une matrice stochastique again**

$A=(a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{H}_n$ tel que : $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}>0$. Soit λ une valeur propre de A de module 1. On se propose de montrer que $\lambda=1$ et que et que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

Soit $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)$.

a) Soient z_1, z_2, ..., z_n des complexes. Montrer que : $|z_1+z_2+\cdots+z_n| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$ si et seulement si il existe un réel θ et des réels positifs ou nul ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n tels que $\forall k\in[\![1,n]\!],\ z_k=\rho_k\,e^{i\theta}$.

b) Montrer que $|x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\,x_\ell\right| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}|a_{k\ell}\,x_\ell| = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\,|x_\ell| \leqslant |x_k|$. Conséquence ?

c) Utiliser la dernière égalité pour montrer que $|x_1|=|x_2|=\cdots=|x_n|$.

d) Utiliser **b)** et le rappel pour prouver que $x_1=x_2=\cdots=x_n$. Conclure.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ *Complément 3* **Les valeurs propres de module 1 d'une matrice stochastique sont des racines de l'unité**

$A=(a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{H}_n$. λ est une valeur propres de A dans $\mathbb{C}$ dont le module est 1.

On se propose de montrer qu'il existe un élément s de $\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^s=1$. C'est clair si λ vaut 1 ; nous supposerons donc dans la suite λ différent de 1.

Soit $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

k est un élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \mathrm{Max}(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)$.

a) Montrer que $|x_k| = \left|\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, x_\ell\right|$. en déduire qu'il existe un réel θ tel que : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\,\left(\frac{x_\ell}{x_k}\,e^{-i\theta}-1\right)=0$.

b) Montrer que $\forall \ell\in[\![1,n]\!],\ \Re e\left(\dfrac{x_\ell\,e^{-i\theta}}{x_k}\right)\leqslant 1$.

En déduire qu'il existe un élément k' de $[\![1,n]\!]$ tel que $\Re e\left(\dfrac{x_{k'}\,e^{-i\theta}}{x_k}\right)=1$.

Prouver que $x_{k'}=e^{i\theta}\,x_k$ puis que $x_{k'}=\lambda\,x_k$.

Notons que k' est différent de k car λ est différent de 1 et que $|x_{k'}|=|x_k|$.

c) Montrer proprement qu'en itérant le processus "on retombe sur le même indice" et conclure.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ *Variante 3* **Retour sur la caractérisation des matrices ayant un pseudo inverse**

M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\operatorname{rg} M^2 = \operatorname{rg} M$. On se propose de montrer que M admet un pseudo-inverse.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

a) Montrer que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

b) On considère l'endomorphisme f_1 de $\operatorname{Im} f$ défini par : $\forall x \in \operatorname{Im} f, f_1(x) = f(x)$. Montrer que f_1 est un automorphisme de $\operatorname{Im} f$.

c) On note p la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. On pose $\forall x \in E,\ g(x) = f_1^{-1}(p(x))$.

Montrer que g est un endomorphisme de E et que sa matrice M' dans la base $\mathcal{B}$ est un pseudo-inverse de M.

Q6 *Complément 4* **Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite des puissances d'une matrice stochastique converge**

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{H}_n$. On rappelle que 1 est une valeur propre de A et que si λ est une valeur propre de A dans $\mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1$.

a) On pose $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \|X\| = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\operatorname{Max}} |x_k|$.

X et X' sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et λ est un élément de $\mathbb{C}$.

Montrer que $\|X\| = 0 \Longleftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, $\|\lambda X\| = |\lambda|\,\|X\|$ et $\|X + X'\| \leqslant \|X\| + \|X'\|$.

b) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \|AX\| \leqslant \|X\|$.

c) λ est un élément de $\mathbb{C}$ de module 1. Soit X un élément de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^2$. On pose $Y = (A - \lambda I_n) X$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k X = \lambda^k X + k \lambda^{k-1} Y$. En déduire que $Y = 0$.

Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^p = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

En déduire que $A - I_n$ possède un pseudo-inverse (ce qui généralise IV Q3 b)).

d) Montrer que si λ est nombre complexe de module 1, la suite $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lambda = 1$.

En déduire que si A possède une valeur propre distincte de 1 et de module 1 la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ ne converge pas.

e) Dans cette sous-question on suppose que 1 est la seule valeur propre de A de module 1. On note λ_1, λ_2, ..., λ_r les valeur propres distinctes de A et on suppose que $\lambda_1 = 1$.

On admet qu'il existe r éléments p_1, p_2, ..., p_r de $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{p_i}$.

On rappelle que $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_n)^{p_1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_n)$!

i est un élément $[\![2, r]\!]$ et X est un élément de $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{p_i}$.

Montrer que $(A^k X)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0 (on pourra remarquer que $A^k = \big((A - \lambda_i I_n) + \lambda_i I_n\big)^k$.

Montrer que pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ la suite $(A^k X)_{k\geqslant 0}$ converge.

En déduire que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge et préciser la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à sa limite.

Q7 *Complément 5* **Suite des moyennes arithmétiques des puissances d'une matrice stochastique**

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{H}_n$. On note λ_1, λ_2, ..., λ_r les valeur propres distinctes de A et on suppose que $\lambda_1 = 1$.

On ne suppose plus ici que 1 est la seule valeur propre de module 1.

On admet qu'il existe r éléments p_1, p_2, ..., p_r de $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{p_i}$.

En s'inspirant de Q6 e) montrer que la suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} A^j$ converge.
