PROBLÈME 2

Dans tout l'exercice, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.

Un mobile se déplace sur les points d'abscisse $0, 1, \dots, N$ d'un axe gradué selon les règles suivantes :

- à l'instant 0, il se trouve en un des points d'abscisse $0, 1, \dots, N$;
- pour tout entier i compris au sens large entre 1 et $(N-1)$, si le mobile est au point d'abscisse i à un instant n $(n \in \mathbb{N})$, alors il se trouve à l'instant $(n+1)$ au point d'abscisse $(i+1)$ avec la probabilité $\dfrac{i}{N}$, et au point d'abscisse $(i-1)$ avec la probabilité $\dfrac{N-i}{N}$;
- si le mobile se trouve à l'origine à un instant n $(n \in \mathbb{N})$, il reste à l'origine à l'instant suivant ;
- si le mobile se trouve au point d'abscisse N à un instant n $(n \in \mathbb{N})$, il reste en ce point à l'instant suivant.

I. Étude d'une suite de variables aléatoires

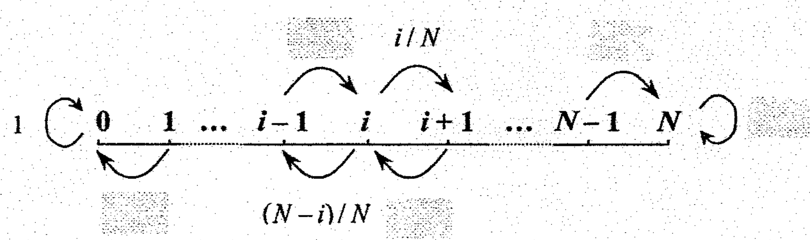
Dans cette première partie, le mobile se trouve au point d'abscisse 1 à l'instant initial 0.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire qui donne l'abscisse du mobile à l'instant n ; de plus, on définit la matrice-colonne U_n par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix},$$

où $P(X_n = k)$ désigne la probabilité de l'événement $(X_n = k)$.

1. Reproduire et compléter le schéma ci-dessous par les probabilités conditionnelles manquantes indiquées par une zone grisée.



2. Déterminer la loi de probabilité de X_1, X_2 et X_3 (on pourra utiliser un arbre et remarquer que, pour X_3, il convient de distinguer les cas $N = 3$ et $N \geq 4$).

3. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout entier k compris au sens large entre 0 et N, exprimer chacune des probabilités $P(X_{n+1} = k)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, ..., $P(X_n = N)$. Lorsque $N \geq 4$, on sera amené à distinguer les cas $k = 0$, $k = 1$, $2 \leq k \leq N-2$, $k = N-1$ et $k = N$.

b) En déduire une matrice M telle que, pour tout entier naturel n, on ait : $U_{n+1} = M\,U_n$.
On précisera clairement la valeur et la position des termes non nuls de la matrice M.

4. Dans cette question **4**, et elle seule, on pose : $N = 3$.

a) Démontrer que 1, $1/3$ et $-1/3$ sont valeurs propres de la matrice M et déterminer les sous-espaces propres associés. En déduire que M est diagonalisable et expliciter une matrice P, dont les trois premiers termes de la première ligne sont égaux à 1, telle que :

$$P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Calculer P^{-1} (le détail des calculs devra figurer sur la copie).

c) Expliciter la deuxième colonne de la matrice M^n ($n \in \mathbb{N}$).

d) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déduire de la question précédente la loi de X_n.
Vérifier que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = 3/4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 3) = 1/4$.

II. Étude de l'arrêt du mobile

Pour tout entier i compris au sens large entre 0 et N, on note :

- p_i la probabilité que le mobile finisse par s'arrêter au point d'abscisse N en partant initialement du point d'abscisse i ;
- q_i la probabilité que le mobile finisse par s'arrêter au point d'abscisse 0 en partant initialement du point d'abscisse i.

D'autre part, on dira qu'une $(N+1)$-liste $(u_0, u_1, \ldots, u_N)$ de nombres réels possède la propriété $(\mathscr{P})$ si :

pour tout entier i compris au sens large entre 1 et $(N-1)$, $\quad u_i = \dfrac{i}{N}u_{i+1} + \dfrac{N-i}{N}u_{i-1}$.

1. a) Préciser les valeurs de p_0, p_N, q_0 et q_N.

b) Justifier d'une phrase que la $(N+1)$-liste $(p_0, p_1, \ldots, p_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.

2. Soit $(u_0, u_1, \ldots, u_N)$ une $(N+1)$-liste de nombres réels possédant la propriété $(\mathscr{P})$.

a) Exprimer $u_{i+1} - u_i$ en fonction de $u_i - u_{i-1}$ $(1 \le i \le N-1)$.
En déduire que la suite $(u_i)_{0 \le i \le N}$ est monotone.

b) Que peut-on dire des nombres $u_0, u_1, \ldots, u_N$ si $u_0 = u_N$?

3. En quoi peut-on parler de linéarité de la propriété $(\mathscr{P})$?

4. On pose : $a_0 = 0$ et, pour tout entier i compris au sens large entre 1 et N : $\quad a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \binom{N-1}{k}$.

a) Calculer a_N ; vérifier que $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.

b) En considérant les nombres $p_i - \dfrac{a_i}{2^{N-1}}$ $(0 \le i \le N)$, déterminer une expression de p_i $(1 \le i \le N)$.

5. En se référant à la description de l'expérience aléatoire étudiée, justifier que, pour tout entier i compris au sens large entre 0 et N, on a l'égalité : $q_i = p_{N-i}$. En déduire qu'il est quasi-certain que le mobile finisse par s'arrêter en l'un des deux points d'abscisse 0 ou N.

6. On reprend dans cette question les notations de la partie **I**.

a) Justifier que p_1 est la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X_n = N)$. En déduire : $p_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = N)$.

b) Vérifier la cohérence entre les valeurs de p_1 et q_1 d'une part, et le résultat de **I. 4. d)** d'autre part (question dans laquelle N est égal à 3).