PARTIE I

Q1 a) $M(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$f_1(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$

$f_1(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_1 + x_2^2 + x_3x_1 + x_3^2$.

$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ f_1(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car f_1 est une fonction polynôme.

Soit $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 = 0 \\ 2x_3 + 2x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = -x_1 \\ 4x_1 - 2x_1 - 2x_1 = 0 \end{cases}$

Ainsi l'ensemble des points critiques de f_1 est : $\{(\alpha, \alpha, -\alpha)\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Soit $a = (a_1,a_2,a_3)$ un point critique de f_1. $a_2 = a_1$ et $a_3 = -a_1$.

Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$f_1(a) = 2a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2 + 2a_1a_3 = 2a_1^2 + a_1^2 + (-a_1)^2 - 2a_1^2 - 2a_1^2 = 0$. $f_1(a) = 0$.

$f_1(x) - f_1(a) = f_1(x) = (x_3 + x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

Ainsi si A est un point critique de f_1, f_1 admet en A un minimum absolu.

b) $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$f_0(x) = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_1 + x_3x_1 + x_3^2$

$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ f_0(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

f_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car f_0 est une fonction polynômiale.

Soit $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f_0}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)=\frac{\partial f_0}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3)=\frac{\partial f_0}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1-2x_2+2x_3=0\\-2x_1=0\\2x_3+2x_1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$.

f_0 admet un point critique et un seul : $b=(0,0,0)$.

Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

$f_0(x)-f_0(b)=f_0(x)-0=x_1^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3=(x_3+x_1)^2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2$

Notons alors que f n'admet pas d'extremum local en .

Soit $r\in\mathbb{R}^*_+$.

Posons $x'=(0,0,\frac{r}{2})$ et $x''=(\frac{r}{2},\frac{r}{2},-\frac{r}{2})$

$x'\in B_\infty(b,r)$, $x''\in B_\infty(b,r)$, $f(x')-f(b)=(\frac{r}{2})^2>0$ et $f_0(x'')-f_0(b)=-\frac{1}{2}(r)^2<0$

$\forall r\in\mathbb{R}^*_+$, $\exists x'\in B_\infty(b,r)$, $\exists x''\in B_\infty(b,r)$, $f_0(x')-f(\ )>0$ et $f_0(x'')-f(b)<0$.

f_0 n'admet pas d'extremum local en b. $\underline{\underline{f_0 \text{ n'admet pas d'extremum local.}}}$

Exercice .. traiter le cas général (λ quelconque).

(Q2) Soit $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Posons $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

$$\underline{\underline{f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\langle u(x_1,x_2,\dots,x_n),(x_1,x_2,\dots,x_n)\rangle={}^tXMX}}.$$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)M\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n\left(x_i\times\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}x_ix_j$$

$$\underline{\underline{f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}\,x_ix_j}}.$$

$\underline{\underline{f \text{ est polynômiale donc } f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n.}}$

(Q3) a) $\forall t\in\mathbb{R},\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}(tx_i)(tx_j)=t^2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}x_ix_j$.

$\underline{\underline{\forall t\in\mathbb{R},\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, f(tx_1,tx_2,\dots,tx_n)=t^2f(x_1,x_2,\dots,x_n).}}$

Notons que f est 2-homogène.

b) $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Ainsi h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall t\in\mathbb{R},\ h'(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i'(t)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1(t),\dots,y_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(ta_1,\dots,ta_n)$.

Notons que : $\forall t\in\mathbb{R},\ h(t) = f(ta_1,\dots,ta_n) = t^2 f(a_1,\dots,a_n)$.

On a alors $\forall t\in\mathbb{R},\ h'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(ta_1,\dots,ta_n) = 2t f(a_1,\dots,a_n)$.

Ceci donne pour $t=1$: $\sum_{i=1}^{n} a_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_n) = 2f(a_1,\dots,a_n)$.

$\forall (a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} a_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_n) = 2f(a_1,\dots,a_n)$.

Q4 a) Soit $(x,h)\in\mathbb{R}^n$.

$f(x+h) = \langle u(x+h), x+h\rangle = \langle u(x)+u(h), x+h\rangle = \langle u(x),x\rangle + \langle u(x),h\rangle + \langle u(h),x\rangle + \langle u(h),h\rangle$

$f(x+h) = f(x) + \langle u(x),h\rangle + \langle u(h),x\rangle + f(h) \underset{\uparrow}{=} f(x) + 2\langle u(x),h\rangle + f(h)$.

u est symétrique

$\forall (x,h)\in\mathbb{R}^{n2},\ f(x+h) = f(x) + 2\langle u(x),h\rangle + f(h)$.

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Posons $\forall h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n,\ P(h) = f(x) + 2\langle u(x),h\rangle + f(h)$.

$\forall h\in\mathbb{R}^n,\ f(x+h) = P(h)$ et $\forall h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n,\ P(h) = f(x) + 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j\Big)h_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}h_ih_j$

P est alors un polynôme de degré au plus 2 $f(x+h) = P(h)$ donc $f(x+h) = P(h) + o(\|h\|^2)$!!

Ainsi $f(x+h) = f(x) + 2\langle u(x),h\rangle + f(h) = f(x) + 2\langle u(x),h\rangle + f(h) + o(\|h\|^2)$ est LE développement limité de f à l'ordre 2 en x.

L'existence et l'unicité de ce développement limité indique que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existe (ce n'est pas un scoop car f est C^1 ... et même C^2) et vaut $2\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j$

Alors $\nabla f(x) = \text{grad} f(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big) = 2\Big(\sum_{j=1}^{n} m_{1j}x_j,\dots,\sum_{j=1}^{n} m_{nj}x_j\Big) = 2u(x)$

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \nabla f(x) = 2u(x)$.

Remarque. f est clairement C_2. L'unicité du DL 2 donne encore :

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 2 m_{ij}$; $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $H(f,x) = 2M = \nabla^2 f(x)$

b) $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, \nabla f(a) \rangle = \langle a, 2u(a) \rangle = 2 \langle u(a), a \rangle$.

$\forall a \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, \nabla f(a) \rangle = 2 f(a)$.

C'est exactement le résultat donné par la formule d'Euler.

c). Soit $a \in \mathbb{R}^n$. $\nabla f(a) = 0 \Leftrightarrow 2u(a) = 0 \Leftrightarrow u(a) = 0 \Leftrightarrow a \in \operatorname{Ker} u$.

Ker u est l'ensemble des points critiques de f.

Si a est un point critique de f : $f(a) = \langle u(a), a \rangle \overset{a \in \operatorname{Ker} u}{=} \langle 0, a \rangle = 0$.

- f admet un point critique et un seul

$\Updownarrow$

Ker u est réduit à un point

$\Updownarrow$

$\operatorname{Ker} u = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ ($0_{\mathbb{R}^n}$ appartient toujours à Ker u).

$\Updownarrow$

u est injective

$\Updownarrow$

u est bijective ($u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$)

$\Updownarrow$

M est inversible.

f admet un point critique et un seul si et seulement si M est inversible ; ce point critique de f est alors $0_{\mathbb{R}^n}$.

Q5 a) u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ donc il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres deux à deux respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

b) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(v_i) = \langle u(v_i), v_i \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_i \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2 = \lambda_i$

de même $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(-v_i) = \lambda_i$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(v_i) = f(-v_i) = \lambda_i$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$; $u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$.

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle \underset{(v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ est une BON}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle x, v_i \rangle = \langle \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_\ell, v_i \rangle = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \langle v_\ell, v_i \rangle = \alpha_i$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\underline{f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\langle x, v_i \rangle)^2}}$.

Q6 a) a est un point critique de f donc $f(a) = \langle u(a), a \rangle = \langle 0, a \rangle = 0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) - f(a) = f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\langle x, v_i \rangle)^2$.

* $\underline{0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) - f(a) \geq 0$; $\underline{\underline{f \text{ possède un minimum en } a}}$.

* $\underline{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq 0}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) - f(a) \leq 0$; $\underline{\underline{f \text{ possède un maximum en } a}}$.

* $\underline{\lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_n > 0}$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $x' = a + \frac{r}{2} v_1$ et $x'' = a + \frac{r}{2} v_n$.

$\|x' - a\| = \frac{r}{2} \|v_1\| = \frac{r}{2}$, $\|x'' - a\| = \frac{r}{2} \|v_n\| = \frac{r}{2}$; $f(x') = \underbrace{f(a)}_{=0} + 2 \langle \underbrace{u(a)}_{=0}, \frac{r}{2} v_1 \rangle + f(\frac{r}{2} v_1)$ donc

$f(x') = f(\frac{r}{2} v_1) = \frac{r^2}{4} f(v_1) = \frac{r^2}{4} \lambda_1 < 0$ de même $f(x'') = \frac{r^2}{4} \lambda_n > 0$.

Donc $x' \in B(a, r)$, $x'' \in B(a, r)$, $f(x') - f(a) < 0$ et $f(x'') - f(a) > 0$.

$\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists x' \in B(a, r)$, $\exists x'' \in B(a, r)$, $f(x') - f(a) < 0$ et $f(x'') - f(a) > 0$.

$\underline{\underline{f \text{ ne possède pas d'extremum local en } a.}}$

b) * montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq 0) \iff 0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

→ Supposons $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

d'après a) on peut déjà dire que si a est un point critique de f : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq f(a) = 0$

Or f possède au moins un point critique : $0_{\mathbb{R}^n}$; ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq 0$.

→ Supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq 0$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = f(v_i) \geq 0$ et ainsi $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Finalement : $(\forall x\in\mathbb{R}^n,\ f(x)\geqslant 0) \Leftrightarrow 0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$.

c) * Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^n$. Soit $t\in\mathbb{R}$. Posons $h=ty$.

$f(x+ty)=f(x+h)=f(x)+2\langle u(x),h\rangle+f(h)$.

$f(x+ty)=f(x)+2\langle u(x),ty\rangle+f(ty)=f(x)+2t\langle u(x),y\rangle+t^2f(y)$.

$\underline{\underline{f(x+ty)=f(x)+2t\langle u(x),y\rangle+t^2f(y)}}$.

Supposons donc $0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$.

Alors $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(x)+2t\langle u(x),y\rangle+t^2f(y)=f(x+ty)\geqslant 0$.

- $f(y)\neq 0$. $t\mapsto f(x)+2t\langle u(x),y\rangle+t^2f(y)$ est une fonction polynôme de degré 2 toujours positive ou nulle ; elle a donc au plus un zéro ; ainsi son discriminant réduit est négatif ou nul.
  $0\geqslant\Delta'=\langle u(x),y\rangle^2-f(x)f(y)$; $\langle u(x),y\rangle^2\leqslant f(x)f(y)$

- $f(y)=0$. $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(x)+2t\langle u(x),y\rangle\geqslant 0$; nécessairement $\langle u(x),y\rangle=0$ (dans le cas contraire $t\mapsto f(x)+2t\langle u(x),y\rangle$ ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}$).
  Dans ces conditions on a encore $\langle u(x),y\rangle^2\leqslant f(x)f(y)$.

Donc $\underline{\underline{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{n\,2},\ (\langle u(x),y\rangle)^2\leqslant f(x)f(y)}}$.

* Supposons que : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(x)\geqslant 0$.

Alors $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$.

→ Soit $z\in\mathbb{R}^n$ tel que $f(z)=0$. $\forall y\in\mathbb{R}^n$, $0\leqslant(\langle u(z),y\rangle)^2\leqslant f(z)f(y)=0$.

$\forall y\in\mathbb{R}^n$, $\langle u(z),y\rangle=0$; $u(z)\in\mathbb{R}^{n\perp}$; $u(z)=0$.

→ Réciproquement soit $z\in\mathbb{R}^n$ tel que $u(z)=0$. $f(z)=\langle u(z),z\rangle=0$!

Donc $\underline{\underline{\forall z\in\mathbb{R}^n,\ f(z)=0\Leftrightarrow u(z)=0}}$.

Remarque.. Ce résultat est presque une évidence. En effet, supposons $0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $z \in \mathbb{R}^n$. $f(z)=0 \Leftrightarrow f$ est minimum en z $\Leftrightarrow$ z est un point critique de f $\Leftrightarrow u(z)=0$

$\Rightarrow$ C.N.
$\Leftarrow$ Q6a)

Q7 a) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Notons que $\overline{E}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \overline{E}$ et $\pi_E(x)$ sa projection orthogonale sur E. Posons $r = \dfrac{\|x-\pi_E(x)\|}{2}$.

Soit $y \in B(x,r)$; $\|x-y\| < r$.

Si $y \in E$: $\|x-y\| \geq \min\limits_{z \in E} \|x-z\| = \|x-\pi_E(x)\| = 2r$.

Si $y \in E$: $2r \leq \|x-y\| < r$! Ainsi $\forall y \in B(x,r)$, $y \notin E$. $B(x,r) \subset \overline{E}$.

$\forall x \in \overline{E}$, $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(x,r) \subset \overline{E}$; $\overline{E}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. E est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

$\alpha(E) = \{x \in E \mid \|x\|^2 = 1\} = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

$\alpha(E) = E \cap B'(0,1) \cap \overline{B(0,1)}$ $\quad (\|x\| = 1 \Leftrightarrow \|x\| \leq 1 \;\&\; \|x\| \geq 1)$

$\alpha(E)$ est alors fermé comme intersection de trois fermés.

$\alpha(E) \subset B'(0,1)$ donc $\alpha(E)$ est borné.

<u>$\alpha(E)$ est donc un fermé borné.</u>

f est continue sur le fermé borné $\alpha(E)$ donc <u>f admet un minimum et un maximum atteints sur $\alpha(E)$.</u>

b) Soit $x \in E_\ell$. $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, $x = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i$; $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i$.

$f(x) = \langle u(x), x \rangle = \sum\limits_{i=1}^{\ell} (\alpha_i \lambda_i) \alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i \alpha_i^2$. Notons que $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \alpha_i^2$.

$\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_k$.

$\forall i \in [\![1, \ell]\!]$, $\lambda_1 \alpha_i^2 \leq \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_\ell \alpha_i^2$.

$\sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_1 \alpha_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i \alpha_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_\ell \alpha_i^2$; $\lambda_1 \|x\|^2 \leq f(x) \leq \lambda_\ell \|x\|^2$.

<u>$\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in E_\ell$, $\lambda_1 \leq \|x\|^2 \leq f(x) \leq \lambda_\ell \|x\|^2$.</u>

On montre de même que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \forall x\in F_k,\ \lambda_k\|x\|^2\leq f(x)\leq\lambda_n\|x\|^2$.

En faisant $k=n$ on obtient alors : $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \lambda_1\|x\|^2\leq f(x)\leq\lambda_n\|x\|^2$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $f(e_k)=\langle u(e_k),e_k\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}m_{ik}e_i,e_k\rangle\underset{\uparrow}{=}m_{kk}$

$(e_1,\dots,e_n)$ est une BON

Ainsi $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \lambda_1\leq m_{kk}\leq\lambda_n$.

c) Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

$\forall x\in E_k,\ \lambda_1\|x\|^2\leq f(x)\leq\lambda_k\|x\|^2$

$\forall x\in\alpha(E_k),\ \lambda_1\leq f(x)\leq\lambda_k\quad(\alpha(E_k)=E_k\cap\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x\|=1\})$

$\forall x\in\alpha(E_k),\ f(v_1)\leq f(x)\leq f(v_k)$, $v_1\in\alpha(E_k)$ et $v_k\in\alpha(E_k)$.

Ainsi $\max_{x\in\alpha(E_k)}f(x)=\lambda_k$ et $\min_{x\in\alpha(E_k)}f(x)=\lambda_1$.

Ces extremums ne sont pas stricts car $f(v_k)=f(-v_k)=\lambda_k$, $f(v_1)=f(-v_1)=\lambda_1$

$\max_{x\in\alpha(E_n)}f(x)=\lambda_n$ et $\min_{x\in\alpha(E_n)}f(x)=\lambda_1$. Notons que $\alpha(E_n)=\alpha(\mathbb{R}^n)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x\|=1\}$.

PARTIE II

Q1 φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t)=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}$.

t	0		1		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Retenons que $\max_{t\in\mathbb{R}^+}\varphi(t)=\varphi(1)=e^{-1}$ et que ce maximum est strict.

Q2 a) $(x_1,x_2)\to -x_1^2-x_2^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $t\mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc $(x_1,x_2)\to e^{-x_1^2-x_2^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. $(x_1,x_2)\to x_1x_2$ étant également $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynômiale, g apparaît alors comme le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathbb{R}^2$ étant un ouvert, il convient d'abord de trouver les points critiques de g.

$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\left[x_2+x_1x_2(-2x_1)\right]e^{-x_1^2-x_2^2}=x_2(1-2x_1^2)e^{-x_1^2-x_2^2}$.

De même $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)=x_1(1-2x_2^2)e^{-x_1^2-x_2^2}$.

Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(1-2x_1^2)=0 \\ x_1(1-2x_2^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=0 \\ x_1=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_2\neq 0 \\ x_1^2=\frac{1}{2} \\ x_2^2=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2)\in\left\{(0,0),\left(\tfrac{1}{\sqrt2},\tfrac{1}{\sqrt2}\right),\left(-\tfrac{1}{\sqrt2},\tfrac{1}{\sqrt2}\right),\left(\tfrac{1}{\sqrt2},-\tfrac{1}{\sqrt2}\right),\left(-\tfrac{1}{\sqrt2},-\tfrac{1}{\sqrt2}\right)\right\}$$

g possède cinq points critiques : $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$.

Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)=\left(-4x_1x_2+x_2(1-2x_1^2)(-2x_1)\right)e^{-x_1^2-x_2^2}=-2x_1x_2(3-2x_1^2)e^{-x_1^2-x_2^2}.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)=-2x_1x_2(3-2x_2^2)e^{-x_1^2-x_2^2}.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2)=\left(1-2x_1^2+(x_2-2x_1^2x_2)(-2x_2)\right)e^{-x_1^2-x_2^2}=(1-2x_1^2-2x_2^2+4x_1^2x_2^2)e^{-x_1^2-x_2^2}$$
$$=(1-2x_1^2)(1-2x_2^2)e^{-x_1^2-x_2^2}.$$

	$rt-s^2$	r	
$(0,0)$	<0		
$\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$	>0	<0	maximum local
$\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$	>0	>0	minimum local
$\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$	>0	>0	minimum local
$\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$	>0	<0	maximum local

c) $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $(x_1+x_2)^2\geq 0$ et $(x_1-x_2)^2\geq 0$

$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $2x_1x_2\geq -x_1^2-x_2^2$ et $x_1^2+x_2^2\geq 2x_1x_2$.

$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{-x_1^2-x_2^2}{2}\leq x_1x_2\leq \dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}$.

$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $-\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}e^{-x_1^2-x_2^2}\leq g(x_1,x_2)\leq \dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}e^{x_1^2+x_2^2}$.

d) D'après Q1 on a alors :

$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ -\frac{1}{2}\varphi(x_1^2+x_2^2)\leq g(x_1,x_2)\leq \frac{1}{2}\varphi(x_1^2+x_2^2)$.

$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ -\frac{1}{2}e^{-1}\leq g(x_1,x_2)\leq \frac{1}{2}e^{-1}$ (car $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ \varphi(t)\leq e^{-1}$ et $-\varphi(t)\geq -e^{-1}$)

Notons alors que $g(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})=\frac{1}{2}e^{-1}=g(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})$ et

$g(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})=-\frac{1}{2}e^{-1}=g(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})$.

Ainsi g admet un maximum (resp. minimum) global ou absolu en $(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$ et $(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})$ (resp. $(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}),(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})$).

Q3 a) $(x_1,\dots,x_n)\to -(x_1^2+\dots+x_n^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, car c'est une fonction polynômiale, et $t\mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc $(x_1,\dots,x_n)\to e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
f étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ (encore une fonction polynômiale), g est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ comme produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$... g est également C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,e^{-\|x\|^2}+f(x)(-2x_i)e^{-\|x\|^2}\ \overset{\nabla f(x)=2u(x)}{=}\ e^{-\|x\|^2}\left[2\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j-2x_if(x)\right]$.

$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)=2e^{-\|x\|^2}\left[\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j-x_if(x)\right]$.

Notons h la fonction $(x_1,\dots,x_n)\to e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)}$.

$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \nabla g(x)=h(x)\nabla f(x)+f(x)\nabla h(x)=2h(x)u(x)+f(x)(-2h(x)x)$

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \nabla g(x)=2h(x)[u(x)-f(x)x]$. $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \nabla g(x)=2e^{-\|x\|^2}[u(x)-f(x)x]$.

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \langle x,\nabla g(x)\rangle=2h(x)[\langle u(x),x\rangle-f(x)\langle x,x\rangle]=2h(x)f(x)(1-\|x\|^2)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \langle x,\nabla g(x)\rangle=2h(x)f(x)(1-\|x\|^2)$.

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \langle x,\nabla g(x)\rangle=2e^{-\|x\|^2}f(x)(1-\|x\|^2)$.

b) Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\nabla g(a) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-\|a\|^2}[u(a) - f(a)a] = 0 \Leftrightarrow u(a) = f(a)a$.

$$\nabla g(a) = 0 \Leftrightarrow u(a) = f(a)a.$$

→ Supposons que $\nabla g(a) = 0$. $u(a) = f(a)a$

ou $u(a) = 0$!

ou $u(a) \neq 0$. Alors $a \neq 0_{\mathbb{R}^n}$; a est alors un vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle ($u(a) \neq 0$!)

De plus $2e^{-\|a\|^2} f(a)(1 - \|a\|^2) = \langle a, \nabla g(a) \rangle = \langle a, 0 \rangle = 0$; ainsi $\|a\|^2 = 1$; $\|a\| = 1$.

Donc a est un vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle et $\|a\| = 1$.

→ Réciproquement :

* si $u(a) = 0$, $\nabla g(a) = 2e^{-\|a\|^2}[u(a) - \langle u(a), a \rangle] = 0$; a est un point critique de g.

* Supposons que a soit un vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle λ et que $\|a\| = 1$.

$u(a) = \lambda a$ et $f(a) = \langle u(a), a \rangle = \lambda \|a\|^2 = \lambda$.

Alors $u(a) = \lambda a = f(a) a$ donc $\nabla g(a) = 0$; a est un point critique de g.

Finalement a est un point critique de g si et seulement si :

→ $u(a) = 0$ ou → a est un vecteur propre unitaire de u associé à une valeur propre non nulle.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $g(x) = f(x) e^{-\|x\|^2}$. $\lambda_1 \|x\|^2 \leq f(x) \leq \lambda_n \|x\|^2$.

Donc $\lambda_1 \|x\|^2 e^{-\|x\|^2} \leq g(x) \leq \lambda_n \|x\|^2 e^{-\|x\|^2}$.

Alors $\lambda_1 \varphi(\|x\|^2) \leq g(x) \leq \lambda_n \varphi(\|x\|^2)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda_1 \varphi(\|x\|^2) \leq g(x) \leq \lambda_n \varphi(\|x\|^2).$$

d1) $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_n > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \leq \lambda_n \varphi(\|x\|^2) \leq \lambda_n e^{-1} = f(v_n)\, e^{-\|v_n\|^2} = g(v_n)$.

g admet un maximum absolu qui vaut : $\lambda_n e^{-1}$.

Soit a un point où g atteint son maximum. a est un point critique de g ($\mathbb{R}^n$ est ouvert !) et $g(a) = \lambda_n e^{-1}$.

si $u(a) = 0$ alors $f(a) = 0$ et $g(a) = 0$; $\lambda_n = 0$!

Donc a est un vecteur propre unitaire de u associé à une valeur propre λ non nulle.

$g(a) = f(a)\, e^{-\|a\|^2} = f(a) e^{-1} = \langle u(a), a \rangle e^{-1} = \lambda \|a\|^2 e^{-1} = \lambda e^{-1}$

Ainsi $\lambda e^{-1} = \lambda_n e^{-1}$; $\lambda = \lambda_n$. a est un vecteur propre unitaire de u associé à la valeur propre λ_n.

Ainsi les points où g atteint son maximum sont les éléments de $\overbrace{SEP(u, \lambda_n) \cap \alpha(\mathbb{R}^n)}^{\alpha(SEP(u,\lambda_n))}$!

On montre de la même manière que

- g admet un minimum absolu qui vaut : $\lambda_1 e^{-1}$.
- les points où g atteint son minimum sont les éléments de $\alpha(SEP(u, \lambda_1))$.

d2) $\lambda_1 > 0$. Alors $\lambda_n > 0$.

Le raisonnement précédent vaut encore ; $\max_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) = \lambda_n e^{-1}$ et g atteint son maximum en les points de $SEP(u, \lambda_n) \cap \alpha(\mathbb{R}^n)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \geq \lambda_1 \varphi(\|x\|^2) \geq 0 = g(0)$. $\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $g(x) = 0$; $f(x)\, e^{-\|x\|^2} = 0$; $f(x) = 0$.

Comme $0 \leq \lambda_1 \|x\|^2 \leq f(x) = 0$: $\|x\|^2 = 0$ ($\lambda_1 > 0$) et : $x = 0_{\mathbb{R}^n}$

Le seul point qui réalise le minimum de g est $0_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice .. Traiter le cas $\lambda_1 = 0$!

d3) $\lambda_n < 0$. Alors $\lambda_1 < 0$.

On montre de la même manière que :

$\min_{x\in\mathbb{R}^n} g(x) = \lambda_1 e^{-1}$ et $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $g(a) = \lambda_1 e^{-1} \Leftrightarrow \|a\| = 1$ et $a \in SEP(u, \lambda_1)$.

$\max_{x\in\mathbb{R}^n} g(x) = 0$ et $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Exercice. Traiter le cas $\lambda_n \leq 0$.

Q4 a) $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2$.

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$; le monde est petit.

Vous avez déjà vu que : $Sp(u) = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $SEP(u, \frac{1}{2}) = Vect(e_1 + e_2)$ et $SEP(u, -\frac{1}{2}) = Vect(e_1 - e_2)$

Ainsi $\lambda_1 = -\frac{1}{2} < 0$ et $\lambda_n = \lambda_2 = \frac{1}{2} > 0$.

Alors d'après Q3 d) $\max_{x\in\mathbb{R}^2} g(x) = \frac{1}{2} e^{-1}$ et $\min_{x\in\mathbb{R}^2} g(x) = -\frac{1}{2} e^{-1}$.

Soit $a \in \mathbb{R}^2$: $a = (a_1, a_2)$.

$g(a) = \max_{x\in\mathbb{R}^2} g(x) \Leftrightarrow \|a\| = 1$ et $a \in SEP(u, \frac{1}{2}) \Leftrightarrow \|a\| = 1$ et $a \in Vect(e_1 + e_2)$.

$g(a) = \max_{x\in\mathbb{R}^2} g(x) \Leftrightarrow \|a\| = 1$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}, a = \lambda(e_1 + e_2) \overset{\|e_1 + e_2\| = \sqrt{2}}{\Leftrightarrow} a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$.

$g(a) = \max_{x\in\mathbb{R}^2} g(x) \Leftrightarrow a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ou $a = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; on retrouve les résultats de Q2 d)

On montre de même que

$g(a) = \min_{x\in\mathbb{R}^2} g(x) \Leftrightarrow a = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ou $a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

b) Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$f(x) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1(2x_2 + x_3) + x_2(2x_1 + x_3) + x_3(x_1 + x_2 + 3x_3)$

$f(x) = 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

b) Soit $u = xe_1+ye_2+ze_3 \in \mathbb{R}^3$.

$$u(x)=\lambda x \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_2+x_3=\lambda x_1\\2x_1+x_3=\lambda x_2\\x_1+x_2+3x_3=\lambda x_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\lambda x_1+2x_2+x_3=0\\(2+\lambda)(x_1-x_2)=0\\x_1+x_2+(3-\lambda)x_3=0\end{cases} \quad L_2\leftarrow L_2-L_1$$

1er Cas : $\lambda=-2$. $u(x)=\lambda x \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+x_2+5x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$.

Alors $-2\in Sp(u)$ et $SEP(u,-2)=Vect(e_1-e_2)=Vect\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)\right)$.

$v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$ est un vecteur unitaire de $SEP(u,-2)$

2ème Cas : $\lambda\neq-2$ $u(x)=\lambda x \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=x_1\\(2-\lambda)x_1+x_3=0\\2x_1+(3-\lambda)x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=x_1\\x_3=(\lambda-2)x_1\\0=x_1[2+(3-\lambda)(\lambda-2)]=x_1(-\lambda^2+5\lambda-4)\end{cases}$

Notons que $-\lambda^2+5\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ou $\lambda=4$.

- $\lambda\neq1$ et $\lambda\neq4$ $u(x)=\lambda x \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=x_1\\x_3=(\lambda-2)x_1\\x_1=0\end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=0$; λ n'est pas valeur propre de u
- $\lambda=1$ $u(x)=\lambda x \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=x_1\\x_3=-x_1\end{cases}$; $1\in Sp(u)$ et $SEP(u,1)=Vect(e_1+e_2-e_3)$
  $v_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2-e_3)$ est un vecteur unitaire de $SEP(u,1)$.
- $\lambda=4$ $u(x)=4x \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=x_1\\x_3=+2x_1\end{cases}$; $4\in Sp(u)$ et $SEP(u,4)=Vect(e_1+e_2+2e_3)$
  $v_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1+e_2+2e_3)$ est un vecteur unitaire de $SEP(u,4)$.

u est un endomorphisme symétrique. u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

$Sp(u)=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ avec "$\lambda_1=-2\leq\lambda_2=1\leq\lambda_3=4$".

v_1,v_2,v_3 sont des vecteurs unitaires de $SEP(u,-2)$, $SEP(u,1)$ et $SEP(u,4)$.

$\mathbb{R}^3=SEP(u,-2)\overset{\perp}{\oplus}SEP(u,1)\overset{\perp}{\oplus}SEP(u,4)$ donc (v_1,v_2,v_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

D'après Q3 a1) ($\lambda_1<0$ et $\lambda_3>0$), g admet pour maximum absolu $4e^{-1}$ et pour minimum absolu $-e^{-1}$. $SEP(u,4)\cap\alpha(\mathbb{R}^3)=\{v_3,-v_3\}$ et $SEP(u,-1)\cap\alpha(\mathbb{R}^3)=\{v_1,-v_1\}$

Or $v_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1+e_2+2e_3)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ et $v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$

g atteint donc son maximum (resp. minimum) en : $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

(resp. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$).