PARTIE I

Q1 a) 1er Cas. $a=0$. $a_0=0$

Alors $a_1=\sqrt{a_0b_0}=0$ et $b_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{b_0}{2}=\dfrac{b}{2}$.

Montrons alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=0$ et $b_n=\dfrac{b}{2^n}$.

C'est vrai pour $n=0$. Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}=0$ car $a_n=0$. $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{b_n}{2}=\dfrac{b}{2^{n+1}}$. Ainsi s'achève la récurrence.

Si $a=0$: $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=0$ et $b_n=\dfrac{b}{2^n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$ dans ce cas.

2ème Cas. $b=0$. Alors $a_1=\sqrt{a_0b_0}=0$ et $b_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Nous sommes ramenés au cas précédent non ?

Ainsi une récurrence simple donne $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=0$ et $b_n=\dfrac{a}{2^n}$.

Si $b=0$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=0$ et $b_n=\dfrac{a}{2^n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$ dans ce cas.

3ème Cas. $a=b$. $a_1=\sqrt{a_0b_0}=\sqrt{a^2}=|a|=a$ et $b_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=a$.

Montrons alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=b_n=a$.

. C'est vrai pour $n=0$. Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{a^2}=|a|=a$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{a+a}{2}=a$. Ainsi s'achève la récurrence.

Si $a=b$: $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=b_n=a$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=a=b$ dans ce cas.

b) Notons qu'une récurrence simple montre que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

a_n est défini, b_n est défini, $a_n\geqslant 0$ et $b_n\geqslant 0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2\geqslant 0$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}-a_{n+1}\geqslant 0$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}\leqslant b_{n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n\leqslant b_n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geq 0$

$b_n \geq a_n \Rightarrow \sqrt{b_n} \geq \sqrt{a_n}$

$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0.$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$.

$(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $(b_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

d) D'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$.

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par b_1 donc convergente.

La suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par a_1 donc convergente.

Alors les deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent.

Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n\right]$.

Ainsi $2 \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

$(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent et ont même limite.

$(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $(b_n)_{n\geq 1}$ est décroissante ; comme ces deux suites convergent vers $\mathcal{L}(a,b)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \mathcal{L}(a,b) \leq b_n$; en particulier $a_1 \leq \mathcal{L}(a,b) \leq b_1$.

Alors $\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a,b) \leq \frac{a+b}{2}$.

Q2 * Considérons les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $(c_n)_{n\geq 0}$, $(d_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$a_0 = a$, $b_0 = b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. $c_0 = \lambda a$, $d_0 = \lambda b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sqrt{c_n d_n}$ et $d_{n+1} = \frac{c_n + d_n}{2}$.

$(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent vers $\mathcal{L}(a,b)$. $(c_n)_{n\geq 0}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ convergent vers $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b)$.

Montrons alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \lambda a_n$ et $d_n = \lambda b_n$.

C'est clair pour $n=0$. Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$c_{n+1}=\sqrt{c_n d_n}=\sqrt{\lambda a_n \lambda b_n}=|\lambda|\sqrt{a_n b_n}=\lambda a_{n+1}$ et $d_{n+1}=\dfrac{c_n+d_n}{2}=\dfrac{\lambda a_n+\lambda b_n}{2}=\lambda b_{n+1}$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n=\lambda a_n$ et $d_n=\lambda b_n$.

Alors $\mathcal{L}(\lambda a,\lambda b)=\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lambda\mathcal{L}(a,b)$

Donc $\underline{\underline{\mathcal{L}(\lambda a,\lambda b)=\lambda\mathcal{L}(a,b)}}$.

* Considérons les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $(a'_n)_{n\geq 0}$ et $(b'_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$a_0=a$, $b_0=b$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$. $a'_0=b$, $b'_0=a$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a'_{n+1}=\sqrt{a'_n b'_n}$ et $c'_{n+1}=\dfrac{a'_n+b'_n}{2}$.

Alors $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent vers $\mathcal{L}(a,b)$; $(a'_n)_{n\geq 0}$ et $(b'_n)_{n\geq 0}$ convergent vers $\mathcal{L}(b,a)$.

Notons que $a_1=\sqrt{ab}$, $b_1=\dfrac{a+b}{2}$, $a'_1=\sqrt{ba}=a_1$ et $b'_1=\dfrac{b+a}{2}=b_1$.

Une récurrence simple donne alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=a'_n$ et $b_n=b'_n$.

Ainsi $\mathcal{L}(a,b)=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} a'_n=\mathcal{L}(b,a)$. $\underline{\underline{\mathcal{L}(a,b)=\mathcal{L}(b,a)}}$.

* Encore le même principe.

Suites par $a_0=a$, $b_0=b$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et

$a'_0=\sqrt{ab}$, $b'_0=\dfrac{a+b}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a'_{n+1}=\sqrt{a'_n b'_n}$ et $b'_{n+1}=\dfrac{a'_n+b'_n}{2}$.

Une récurrence simple montre que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=a'_n$ et $b_{n+1}=b'_n$.

Ainsi $\mathcal{L}(a,b)=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}=\lim a'_n=\mathcal{L}(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2})$. $\underline{\underline{\mathcal{L}(a,b)=\mathcal{L}(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2})}}$.

Q3) a) $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante, $(b_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et ces deux suites convergent vers $\mathcal{L}(a,b)$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n\leq\mathcal{L}(a,b)\leq b_n$

$\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq\mathcal{L}(a,b)-a_n\leq b_n-a_n}}$.

b) Ce qui précède montre que a_n est une valeur approchée de $\ell(a,b)$ à ε près dès que : $b_n - a_n \leq \varepsilon$ ... au moins si $n \in \mathbb{N}^*$

On calcule donc a_n tant que $b_n - a_n > \varepsilon$! ou on calcule a_n jusqu'à ce que $b_n - a_n \leq \varepsilon$ pour obtenir une valeur approchée de $\ell(a,b)$ à epsilon près.

```
function L1(a,b,epsilon:real):real;

var z:real;

begin
z:=sqrt(a*b);b:=(a+b)/2;a:=z;

while (b-a>epsilon) do
      begin
      z:=sqrt(a*b);b:=(a+b)/2;a:=z;
      end;
L1:=a;
end;
```

<u>L'erreur à ne pas faire :</u>

a:=sqrt (a*b); b:=(a+b)/2;

Indispensable car $0 \leq \ell(a,b) - a_n \leq b_n - a_n$ vaut pour $n \geq 1$.

```
function L2(a,b,epsilon:real):real;

var z:real;

begin
repeat
z:=sqrt(a*b);b:=(a+b)/2;a:=z;
until(b-a<=epsilon);
L2:=a;
end;
```

Q4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_{n+1} \underset{\substack{a_n \leq a_{n+1} ;\ -a_{n+1} \leq -a_n \cdots \text{ pour } n \geq 1}}{\leq} \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$

Reste alors à prouver que : $b_1 - a_1 \leq \dfrac{|b_0 - a_0|}{2} = \dfrac{|b-a|}{2}$.

1er cas... $a \leq b$. $b_1 - a_1 = \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{a^2} = \dfrac{a+b}{2} - a = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{|b-a|}{2}$.

2e cas... $a > b$. $b_1 - a_1 = \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{b^2} = \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{|b-a|}{2}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^n}$.

PARTIE II

Q1) $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}$ est continue, positive sur $[0,+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t^4}} = \dfrac{1}{t^2}$

La convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ donne alors la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et donc celle de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}$ converge.

Q2) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}} \underset{t=\frac{\alpha\beta}{x}\quad dt=-\frac{\alpha\beta}{x^2}dx}{=} \int_{\alpha\beta/\varepsilon}^{\alpha\beta/\sqrt{\alpha\beta}} \frac{-\frac{\alpha\beta}{x^2}}{\sqrt{\left(\left(\frac{\alpha\beta}{x}\right)^2+\alpha^2\right)\left(\left(\frac{\alpha\beta}{x}\right)^2+\beta^2\right)}}\,dx$$

$$\int_\varepsilon^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}} = \alpha\beta \int_{\sqrt{\alpha\beta}}^{\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}} \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{\alpha^2(\beta^2+x^2)}{x^2}\right)\left(\frac{\beta^2(\alpha^2+x^2)}{x^2}\right)}} = \alpha\beta \int_{\sqrt{\alpha\beta}}^{\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}} \frac{dx}{x^2\frac{\alpha\beta}{x^2}\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}}$$

$$\int_\varepsilon^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}} = \int_{\sqrt{\alpha\beta}}^{\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}} = \int_0^{\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}} - \int_0^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}}$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \dfrac{\alpha\beta}{\varepsilon} = +\infty$; ainsi $J(\alpha,\beta) = I(\alpha,\beta) - J(\alpha,\beta)$.

Alors $\underline{I(\alpha,\beta) = 2J(\alpha,\beta)}$

Q3) a] φ est définie, continue et dérivable sur $]0,\sqrt{\alpha\beta}]$.

$\forall t \in]0,\sqrt{\alpha\beta}]$, $\varphi'(t) = \frac{1}{2}\left[\dfrac{-2t\times t - (\alpha\beta - t^2)}{t^2}\right] = \dfrac{1}{2t^2}(-\alpha\beta - t^2) < 0$

φ est continue et strictement décroissante sur $]0,\sqrt{\alpha\beta}]$, $\lim\limits_{t\to0^+}\varphi(t) = +\infty$ et $\varphi(\sqrt{\alpha\beta}) = 0$

Alors φ définit une bijection de $]0,\sqrt{\alpha\beta}]$ sur $[0,+\infty[$.

Soit $u \in [0,+\infty[$. Posons $t = \varphi^{-1}(u)$; $u = \varphi(t) = \frac{\alpha\beta - t^2}{2t}$; $t^2 + 2tu = \alpha\beta$.

$(t+u)^2 = \alpha\beta + u^2$; $t + u = \sqrt{\alpha\beta + u^2}$ ou $t + u = -\sqrt{\alpha\beta + u^2}$.

$t = \sqrt{u^2 + \alpha\beta} - u$ ou $t = -u - \sqrt{\alpha\beta + u^2}$. Or $t = \varphi^{-1}(u) \in]0, \sqrt{\alpha\beta}]$.

Alors $t = \sqrt{u^2 + \alpha\beta} - u$ car $-u - \sqrt{\alpha\beta + u^2} < 0$.

Ainsi $\forall u \in [0,+\infty[$, $\varphi^{-1}(u) = -u + \sqrt{u^2 + \alpha\beta}$.

$u \mapsto u^2 + \alpha\beta$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $u \mapsto \sqrt{u^2 + \alpha\beta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $(\varphi^{-1})'(u) = -1 + \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + \alpha\beta}} = -1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + \alpha\beta}}$ ... pour tout u dans $\mathbb{R}_+$.

$\forall u \in [0,+\infty[$, $(\varphi^{-1})'(u) = -1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + \alpha\beta}}$.

b) Soit $t \in]0, \sqrt{\alpha\beta}]$. Posons $u = \varphi(t)$. $u = \frac{\alpha\beta - t^2}{2t}$.

$u^2 + \delta^2 = \left(\frac{\alpha\beta - t^2}{2t}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4t^2}[\alpha^2\beta^2 - 2t^2\alpha\beta + t^4 + \alpha^2t^2 + \beta^2t^2 + 2\alpha\beta t^2]$

$u^2 + \delta^2 = \frac{1}{4t^2}[\alpha^2\beta^2 + t^4 + \alpha^2t^2 + \beta^2t^2] = \frac{1}{4t^2}(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)$.

$\sqrt{u^2 + \delta^2} = \frac{1}{2|t|}\sqrt{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)}$; $\sqrt{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)} = 2|t|\sqrt{u^2 + \delta^2} = 2t\sqrt{u^2 + \delta^2}$.

Si $t \in]0, \sqrt{\alpha\beta}]$ et si $u = \varphi(t)$: $\sqrt{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)} = 2t\sqrt{u^2 + \delta^2}$.

c) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)}} = \int_{\varphi(\varepsilon)}^{\varphi(\sqrt{\alpha\beta})} \left(-\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u^2 + \delta^2}\sqrt{u^2 + \delta^2}}\right).$$

- $u = \frac{\alpha\beta - t^2}{t} = \varphi(t)$.
- $t = \varphi^{-1}(u)$; $dt = \left(-1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + \alpha\beta}}\right)du = \frac{u - \sqrt{u^2 + \alpha\beta}}{\sqrt{u^2 + \alpha\beta}}\,du \underset{\ast}{=} -\frac{t}{\sqrt{u^2 + \alpha\beta}}\,du$.

$t = \varphi^{-1}(u) = -u + \sqrt{u^2 + \alpha\beta}$

- Alors $\frac{dt}{\sqrt{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)}} = \frac{-\frac{t}{\sqrt{u^2 + \alpha\beta}}\,du}{2t\sqrt{u^2 + \delta^2}} = -\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u^2 + \delta^2}\sqrt{u^2 + \delta^2}}$

$$\int_{\varepsilon}^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}} = \frac{1}{2}\int_{\varphi(\sqrt{\alpha\beta})}^{\varphi(\varepsilon)} \frac{du}{\sqrt{(u^2+\gamma^2)(u^2+\delta^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi(\varepsilon)} \frac{du}{\sqrt{(u^2+\gamma^2)(u^2+\delta^2)}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\alpha\beta-\varepsilon^2}{2\varepsilon} = +\infty.$$

Alors $J(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2+\gamma^2)(u^2+\delta^2)}} = \frac{1}{2} I(\gamma,\delta)$.

Ainsi $\underline{\underline{J(\alpha,\beta) = \frac{1}{2} I(\gamma,\delta)}}$. $I(\alpha,\beta) = 2J(\alpha,\beta) = I(\gamma,\delta)$.

Finalement : $\underline{\underline{I(\alpha,\beta) = I\left(\sqrt{\alpha\beta}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}$.

Q4 $I(\alpha,\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1} \underset{u=t/\alpha}{=} \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\, du}{u^2+1} = \frac{1}{\alpha}\Big[\operatorname{Arctan} u\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$.

$\underline{\underline{I(\alpha,\alpha) = \frac{\pi}{2\alpha}}}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $(t^2+\alpha^2)^2 \leq (t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2) \leq (t^2+\beta^2)^2$ car $\alpha^2 \leq \beta^2$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{t^2+\beta^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}} \leq \dfrac{1}{t^2+\alpha^2}$.

En intégrant on obtient $I(\beta,\beta) \leq I(\alpha,\beta) \leq I(\alpha,\alpha)$.

Ainsi $\underline{\underline{\frac{\pi}{2\beta} \leq I(\alpha,\beta) \leq \frac{\pi}{2\alpha}}}$.

Q5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons que $0 < a_n \leq b_n$ (récurrence simple...)

Alors $I(a_n,b_n) = I\left(\sqrt{a_n b_n}, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$ d'après Q3 c)

Alors $I(a_n,b_n) = I(a_{n+1},b_{n+1})$. La suite $\underline{\underline{(I(a_n,b_n))_{n\geq 0}}}$ est constante.

D'après Q4 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{2b_n} \leq I(a_n, b_n) \leq \frac{\pi}{2a_n}$ $(0 < a_n \leq b_n \ldots)$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{2b_n} \leq I(a_0, b_0) = I(a,b) \leq \frac{\pi}{2a_n}$ $((I(a_n,b_n))_{n\geq 0}$ est constante$)$.

En passant à la limite : $\frac{\pi}{2\mathcal{L}(a,b)} \leq I(a,b) \leq \frac{\pi}{2\mathcal{L}(a,b)}$ $\left(\mathcal{L}(a,b) \neq 0 \text{ car } \sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a,b) \leq \frac{a+b}{2}\right)$

Alors $\frac{\pi}{2\mathcal{L}(a,b)} = I(a,b)$. $\quad \mathcal{L}(a,b)\, I(a,b) = \frac{\pi}{2}$.

Remarque.- Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathcal{L}(a,b)$ on peut utiliser les suites (a_n) et (b_n) pour approximer $I(a,b)$.

Q6 a) Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \int_0^{b\tan\varepsilon} \frac{\frac{1}{b} \times \frac{dt}{1+(t/b)^2}}{\sqrt{b^2 \times \frac{a^2}{t^2+b^2} + \frac{b^2t^2}{t^2+b^2}}} = \int_0^{b\tan\varepsilon} \frac{b\,dt}{(t^2+b^2)\sqrt{\frac{b^2}{t^2+b^2}(t^2+a^2)}}$$

$t = b\tan\theta$; $\theta = \operatorname{Arctan}(t/b)$

$d\theta = \frac{1}{b} \times \frac{dt}{1+(t/b)^2}$; $\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$; $\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{1+\tan^2\theta}$; $\cos^2\theta = \frac{1}{1+t^2/b^2}$;

$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{1+(t/b)^2} = 1 - \frac{b^2}{t^2+b^2} = \frac{t^2}{t^2+b^2}$.

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \int_0^{b\tan\varepsilon} \frac{b\,dt}{b\sqrt{\frac{(t^2+b^2)^2}{t^2+b^2}(t^2+a^2)}} = \int_0^{b\tan\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}.$$

$\lim_{\varepsilon\to\frac{\pi}{2}^-} (b\tan\varepsilon) = +\infty$ $(b>0)$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = I(a,b)$.

b) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^A \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} = \int_0^{\operatorname{Arctan} A/\sqrt{ab}} \frac{\sqrt{ab}\,(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{\sqrt{(ab\tan^2\theta + a^2)(ab\tan^2\theta + b^2)}} = \int_0^{\operatorname{Arctan} A/\sqrt{ab}} \frac{(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{\sqrt{(b\tan^2\theta+a)(a\tan^2\theta+b)}}$

$\theta = \operatorname{Arctan}\frac{t}{\sqrt{ab}}$ / $\sqrt{ab}\tan\theta = t$

Soit $\theta \in [0, \operatorname{Arctan}(A/\sqrt{ab})]$.

$$\frac{1+\tan^2\theta}{\sqrt{(b\tan^2\theta+a)(a\tan^2\theta+b)}} = \frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+a\right)\left(\frac{a\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+b\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(b\sin^2\theta+a\cos^2\theta)(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)}_{g(\theta)}}}$$

$$g(\theta)=\left(b\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)+a\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right)\left(a\,\frac{1-\cos 2\theta}{2}+b\,\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$$

$$g(\theta)=\left(\frac{b+a}{2}-\frac{b-a}{2}\cos 2\theta\right)\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cos 2\theta\right)=\left(\frac{b+a}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cos^2 2\theta$$

$$g(\theta)=\left(\frac{b+a}{2}\right)^2(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cos^2 2\theta=\left(\left(\frac{b+a}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)\cos^2 2\theta+\left(\frac{b+a}{2}\right)^2\sin^2 2\theta$$

$$g(\theta)= ab\cos^2 2\theta+\left(\frac{b+a}{2}\right)^2\sin^2 2\theta .$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{c^2\cos^2 2\theta+d^2\sin^2 2\theta}}$

où $c=\sqrt{ab}$ et $d=\dfrac{a+b}{2}$.

Posons $\alpha=2\theta$. Alors $\displaystyle I(a,b)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{c^2\cos^2\alpha+d^2\sin^2\alpha}}=\frac{1}{2}\Delta(c,d)+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{c^2\cos^2\alpha+d^2\sin^2\alpha}}$

Il ne reste plus qu'à poser $\xi=\alpha-\frac{\pi}{2}$ pour obtenir :

$$I(a,b)=\frac{1}{2}\Delta(c,d)+\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{c^2\sin^2\xi+d^2\cos^2\xi}}=\frac{1}{2}\Delta(c,d)+\frac{1}{2}\Delta(d,c).$$

Alors $I(a,b)=\frac{1}{2}I(c,d)+\frac{1}{2}I(d,c)=I(c,d)=I\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$.

On retrouve donc tranquillement : $\underline{\underline{I(a,b)=I\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)}}$

Q7 (*) Soit $(x,y)\in\,]a,b[^2$ tel que $x<y$.

$$\int_x^y\frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}\underset{u=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}{\overset{\uparrow}{=}}\int_{\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{b^2-x^2}{b^2-a^2}}}^{\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{b^2-y^2}{b^2-a^2}}}\frac{\dfrac{-2a^2\cos\theta\sin\theta+2b^2\cos\theta\sin\theta}{2\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}}{\sqrt{(b^2-a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-a^2)}}\,d\theta$$

$u^2=a^2\cos^2\theta+b^2(1-\cos^2\theta)$; $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{b^2-u^2}{b^2-a^2}}$; $\theta=\operatorname{Arccos}\sqrt{\dfrac{b^2-u^2}{b^2-a^2}}$

(*) $u\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}$ est continue sur $]a,b[$!

Soit $\theta \in \left[\operatorname{Arc\,cos}\sqrt{\frac{b^2-x^2}{b^2-a^2}}, \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{\frac{b^2-y^2}{b^2-a^2}}\right] \subset [0,\frac{\pi}{2}]$!

$$\sqrt{(b^2-a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-a^2)} = \sqrt{(b^2-a^2)\cos^2\theta\ (b^2-a^2)\sin^2\theta} = (b^2-a^2)\,|\cos\theta|\,|\sin\theta|$$
$$= (b^2-a^2)\cos\theta\sin\theta$$

Alors
$$\int_x^y \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}} = \int_{\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{b^2-x^2}{b^2-a^2}}}^{\sqrt{\frac{b^2-y^2}{b^2-a^2}}} \frac{(b^2-a^2)\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\ (b^2-a^2)\cos\theta\sin\theta}\,d\theta = \int_{\operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{b^2-x^2}{b^2-a^2}}}^{\operatorname{Arc\,cos}\sqrt{\frac{b^2-y^2}{b^2-a^2}}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

Ne reste plus qu'à remarquer que : $\lim\limits_{x\to a^+} \operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{b^2-x^2}{b^2-a^2}} = 0$, $\lim\limits_{y\to b^-} \operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{b^2-y^2}{b^2-a^2}} = \frac{\pi}{2}$ et

$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$ existe.

Ainsi $\int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}$ existe et vaut $\Delta(a,b)$.

$$\boxed{\int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}} = \Delta(a,b) = I(a,b)}$$

Exercice ! Retrouver directement $\int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}} = I(a,b)$!

PARTIE III

Q1 a) Supposons $a \neq 0$. $\mathcal{L}(a,b) = \mathcal{L}(a\times 1, a \times \frac{b}{a}) = a\,\mathcal{L}(1, \frac{b}{a}) = aF(\frac{b}{a})$.

Supposons $b \neq 0$. $\mathcal{L}(a,b) = \mathcal{L}(b,a) = \mathcal{L}(b\times 1, b\times \frac{a}{b}) = b\,\mathcal{L}(1,\frac{a}{b}) = bF(\frac{a}{b})$.

$\forall (a,b) \in [0,+\infty[^2,\ a\neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(a,b) = aF(\frac{b}{a})$.

$\forall (a,b) \in [0,+\infty[^2,\ b\neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(a,b) = bF(\frac{a}{b})$.

b) $F(0) = \mathcal{L}(1,0)$. D'après I Q1 a) : $\mathcal{L}(1,0)=0$ donc $F(0)=0$.

$F(1) = \mathcal{L}(1,1)$. D'après I Q1 a) : $\mathcal{L}(1,1) = 1$ donc $F(1)=1$.

Q2 a) Nous avons vu que : $\forall (a,b) \in [0,+\infty[,\ \mathcal{L}(a,b) \geq \sqrt{ab} \geq 0$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \mathcal{L}(1,x) \geq 0$.
F est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(x,y) \in [0,+\infty[^2$ tel que $x \leq y$.
Posons $a_0 = 1$, $b_0 = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.
Posons encore $\hat{a}_0 = 1$, $\hat{b}_0 = y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\hat{a}_{n+1} = \sqrt{\hat{a}_n \hat{b}_n}$ et $\hat{b}_{n+1} = \frac{\hat{a}_n + \hat{b}_n}{2}$.

Une récurrence simple prouve que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \hat{a}_n$ et $b_n \leq \hat{b}_n$.
En passant à la limite on obtient : $\mathcal{L}(1,x) \leq \mathcal{L}(1,y)$ donc $F(x) \leq F(y)$.

$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ x\leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$. F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) F est croissante sur $]0,+\infty[$ et F est minorée par $F(0)=0$ sur cet intervalle. Le théorème de la limite monotone montre alors que la restriction de F à $]0,+\infty[$ admet une limite finie en 0.

Ainsi F admet une limite finie à droite en 0.

Q3 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- $F(x) = \mathcal{L}(1,x)$; d'après I Q1 d) : $\sqrt{1 \times x} \leq \mathcal{L}(1,x) = F(x) \leq \frac{1+x}{2}$.
  Alors $\underline{\underline{\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1+x}{2}}}$. ceci vaut également pour $x=0$.

- $F(x) = \mathcal{L}(1,x) = \mathcal{L}(x \times \frac{1}{x}, x \times 1) \underset{\text{I Q2}}{=} x\,\mathcal{L}(\frac{1}{x}, 1) = x\,\mathcal{L}(1, \frac{1}{x}) = x F(\frac{1}{x})$.

  $\underline{\underline{F(x) = x F(\frac{1}{x})}}$ ⊛

- $F(x) = \mathcal{L}(1,x) \underset{\text{I Q2}}{=} \mathcal{L}(\sqrt{1 \times x}, \frac{1+x}{2}) = \mathcal{L}(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}) = \mathcal{L}(\sqrt{x} \times 1, \sqrt{x} \times \frac{1+x}{2\sqrt{x}})$

  $F(x) = \sqrt{x}\,\mathcal{L}(1, \frac{1+x}{2\sqrt{x}})$. $\underline{\underline{F(x) = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)}}$.

- Appliquons ⊛ pour $\frac{1+x}{2\sqrt{x}}$; nous obtenons : $F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} F\left(\frac{1}{\frac{1+x}{2\sqrt{x}}}\right)$.

Alors $F(x) = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} \times \frac{1+x}{2\sqrt{x}} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{1+x}{2} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Ainsi $\underline{\underline{F(x) = \frac{1+x}{2} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}}$.

Q4 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

$$\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{F(x)-1}{x-1}$$

$\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1+x}{2}$; $\sqrt{x} - 1 \leq F(x) - 1 \leq \frac{1+x}{2} - 1 = \frac{x-1}{2}$.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \leq F(x) - F(1) \leq \frac{x-1}{2}.$$

Ainsi $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{1}{2}$. Or $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$.

On obtient alors par encadrement $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$

$\forall x \in]0,1[,\ \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \leqslant F(x)-F(1) \leqslant \frac{x-1}{2}$; $\forall x \in]0,1[,\ \frac{1}{\sqrt{x}+1} \geqslant \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \geqslant \frac{1}{2}$.

Il vient toujours par encadrement : $\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$.

Finalement : $\lim_{x\to 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$; F est dérivable en 1 et $F'(1) = \frac{1}{2}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{x} \leqslant F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

c) Nous avons vu que $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe et est finie.

Notons ℓ cette limite. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \frac{1+x}{2} F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 0^+$. Alors $\ell = \frac{1}{2}\ell$; $\ell = 0 = F(0)$.

Ainsi F est continue en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{F(x)}{x} = F\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = +\infty$.

Alors $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = +\infty$ $(F(0)=0)$.

F n'est pas dérivable en 0.

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} F(t) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Q5 Soit $c \in]0,+\infty[$. F est croissante sur $]0,c[$ et majorée par $F(c)$, ainsi la restriction de F à $]0,c[$ admet une limite finie en c inférieure à $F(c)$.
Ainsi $\lim_{\substack{x\to c \\ x<c}} F(x)$ existe, est finie et est majorée par $F(c)$.

F est croissante sur $]c,+\infty[$ et minorée par $F(c)$; ainsi la restriction de F à $]c,+\infty[$ admet une limite finie en c supérieure à $F(c)$.

Alors $\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} F(x)$ existe, et finie et est minorée par $F(c)$.

Alors $\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} F(x) \leq F(c) \leq \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} F(x)$ ▲

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\frac{F(x)}{x} = F(\frac{1}{x})$. Or F est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\frac{1}{x} \in [0, +\infty[$! Par composition $x \mapsto F(\frac{1}{x})$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$. $x \mapsto \frac{F(x)}{x}$ également.

Alors un raisonnement analogue à celui fait pour F prouve que

$\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} \frac{F(x)}{x}$ existe et est finie, $\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} \frac{F(x)}{x}$ existe et est finie et

$\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} \frac{F(x)}{x} \geqslant \frac{F(c)}{c} \geqslant \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} \frac{F(x)}{x}$ (... décroissance)

$\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} \left(x \frac{F(x)}{x}\right) = c \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} \frac{F(x)}{x}$; de même $\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} F(x) = c \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} \frac{F(x)}{x}$

Comme : $c \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} \frac{F(x)}{x} \geqslant F(c) \geqslant \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} \frac{F(x)}{x}$ on obtient :

$$\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} F(x) \geqslant F(c) \geqslant \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} F(x) \quad ▼$$

▲ et ▼ donnent : $\lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} F(x) = F(c) = \lim\limits_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} F(x)$. F est continue en c.

F est continue en tout point de $\mathbb{R}^*_+$.

PARTIE IV

Q1

```
function produit(n:integer;x:real):real;

var k:integer;u,p:real;

begin
u:=x;p:=u;

for k:=1 to n do
    begin
    u:=(1+u)/2/sqrt(u);p:=p*u;
    end;

produit:=p;
```

Q2 Montrons par une récurrence simple que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est défini et $u_n \geqslant 1$.

- $u_0 = x$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\frac{1+x}{2\sqrt{x}}$ est défini donc $u_1=\frac{1+u_0}{2\sqrt{u_0}}$ également.

$u_1 - 1 = \frac{1+u_0-2\sqrt{u_0}}{2\sqrt{u_0}} = \frac{(1-\sqrt{u_0})^2}{2\sqrt{u_0}} \geqslant 0$; $u_1 \geqslant 1$.

La propriété est donc vraie pour $n=1$.

- Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$u_n \geqslant 1$ donc $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}$ a un sens. $u_{n+1}-1 = \frac{1+u_n-2\sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}} = \frac{(1-\sqrt{u_n})^2}{2\sqrt{u_n}} \geqslant 0$

Ainsi s'achève la récurrence.

<u>Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est défini et $u_n \geqslant 1$.</u>

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - u_n = \frac{1+u_n-2u_n\sqrt{u_n}}{2\sqrt{u_n}}$

$\forall t\in\mathbb{R}$, $1+t^2-2t^3 = (1-t)(2t^2+t+1)$; $\forall y\in\mathbb{R}_+$, $1+y-2y\sqrt{y} = (1-y)(2y+\sqrt{y}+1)$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n = \underbrace{(1-u_n)}_{\leqslant 0}\ \underbrace{\frac{2u_n+\sqrt{u_n}+1}{2\sqrt{u_n}}}_{\geqslant 0} \leqslant 0$. <u>$(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.</u>

$(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 1 ; $(u_n)_{n\geq 1}$ converge ; $(u_n)_{n\geq 0}$ également.

Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. $\ell \geq 1$ car $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}$; à la limite $\ell = \dfrac{1+\ell}{2\sqrt{\ell}}$; $1+\ell-2\ell\sqrt{\ell} = 0$.

Alors $(1-\sqrt{\ell})(\underbrace{2\ell+\sqrt{\ell}+1}_{>0}) = 0$; $\sqrt{\ell} = 1$; $\ell = 1$.

<u>$(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.</u>

Q3 a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n > 1$.

- $u_1 - 1 = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} > 0$ car $x\in\mathbb{R}_+^* - \{1\}$; $u_1 > 1$.
- Supposons que, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n > 1$. $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} - 1 = \dfrac{(1-\sqrt{u_n})^2}{2\sqrt{u_n}} > 0$;

 ainsi $u_{n+1} > 1$ et la récurrence est terminée.

<u>$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n > 1$.</u>

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1} = \dfrac{\frac{(1-\sqrt{u_n})^2}{2\sqrt{u_n}}}{u_n-1} = \dfrac{1}{(\sqrt{u_n}-1)(\sqrt{u_n}+1)} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{u_n}} \times (\sqrt{u_n}-1)(\sqrt{u_n}-1)$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2\sqrt{u_n}}\,\frac{\sqrt{u_n}-1}{\sqrt{u_n}+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{u_n}}\,\frac{\sqrt{u_n}+1}{\sqrt{u_n}+1} = \frac{1}{2\sqrt{u_n}} \leq \frac{1}{2} \text{ car } u_n \geq 1.$$

<u>$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.</u>

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$.

Une récurrence simple donne : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (2v_1)$

La convergence de la série de terme général $(2v_1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et la positivité de la série de terme général v_n donnent la convergence de la série de terme général v_n

<u>La série de terme général v_n converge.</u>

c) $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k>0$; $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n=\prod_{k=0}^{n}u_k>0$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \ln P_n=\sum_{k=0}^{n}\ln u_k$..

$\lim_{k\to+\infty}u_k=1$; $\ln u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} u_k-1=v_k$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ v_k\geq 0$ et la série de terme général v_k converge. Alors la série de terme général $\ln u_k$ converge. Ainsi la suite de terme général $\ln P_n$ converge. La continuité de $x\mapsto e^x$ montre alors que :

la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge.

Supposons $x=1$. $u_0=1$. Une récurrence simple montre alors que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=1$. Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n=1$. $(P_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1 si $x=1$.

Q4 $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$; $\forall n\in\mathbb{N},\ F(u_n)>0$

Notons encore que : $\forall k\in\mathbb{N},\ F(u_k)=\sqrt{u_k}\,F\left(\frac{1+u_k}{2\sqrt{u_k}}\right)=\sqrt{u_k}\,F(u_{k+1})$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ u_k=\left(\frac{F(u_k)}{F(u_{k+1})}\right)^2$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ P_n=\prod_{k=1}^{n}u_k=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{F(u_k)}{F(u_{k+1})}\right)^2=\left(\frac{F(u_0)}{F(u_{n+1})}\right)^2=\left(\frac{F(x)}{F(u_{n+1})}\right)^2$. $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n=\frac{(F(x))^2}{(F(u_{n+1}))^2}$.

F est dérivable en 1 donc F est continue en 1. Comme $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=1$: $\lim_{n\to+\infty}F(u_{n+1})=F(1)=1$

Alors $\lim_{n\to+\infty}P_n=(F(x))^2$.

Remarque : Ceci permet d'approximer $(F(x))^2$ donc $F(x)$ donc $\mathcal{L}(1,x)$ donc $\mathcal{L}(a,b)$ donc $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ donc ...