PROBLÈME

Dans ce qui suit $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique que l'on note $< .,. >$. $\|.\|$ est la norme euclidienne associée.

u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ de matrice $M = (m_{ij})$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

On pose, pour tout élément $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $f(X) =< u(X), X >$.

On dira indifféremment que f est la fonction de n variables asssociée à la matrice M ou à l'endomorphisme u.

Partie I Etude des extremums de f.

Q1 Deux exemples λ est un réel et $M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) On considère la fonction f_1 associée à la matrice $M(1)$.

Montrer que : $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ f_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1\,x_2 + 2x_1\,x_3$.

Montrer que f_1 admet une infinité de points critiques.

Soit A un point critique de f_1. Calculer $f_1(A)$. f_1 admet-elle un extremum en A ? (On pourra étudier $f_1(X) - f_1(A)$ ou $f_1(A + H) - f_1(A)$).

b) On considère la fonction f_0 associée à la matrice $M(0)$. Etudier les extremums de f_0 sur $\mathbb{R}^3$ (O et rien...).

Q2 On revient au cas général. Soit $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; calculer $f(X)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Q3 a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (1)

b) $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $h : t \to f(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer h'.

c) Déduire de ce qui précède :

$$\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n} a_k\, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 2\, f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (2)$$

La relation (2) s'appelle la formule d'Euler.

Q4 Si X est dans $\mathbb{R}^n$, on notera $\nabla f(X)$ le gradient de f en X.

► **On fait a') et pas a) (a') n'est pas dans la correction mais on a déja fait...).**

a) Xest un élément de $\mathbb{R}^n$. Calculer, pour tout élément H de $\mathbb{R}^n$, $f(X+H)$ en fonction de $f(X)$, $f(H)$ et $< u(X), H >$.

Reconnaître le développement limité de f à l'ordre 2 en X $(P(H) = P(H) + \mathrm{o}(\|H\|^2)...)$.

En déduire l'égalité : $\nabla f(X) = 2u(X)$ et la Hessienne de f en X.

a') Xest un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\nabla f(X) = 2u(X)$ et calculer $\nabla^2 f(X)$.

b) Calculer, pour A dans $\mathbb{R}^n$, $< A, \nabla f(A) >$ en fonction de $f(A)$. Retrouver la formule d'Euler.

c) Soit A un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A est un point critique de f si et seulement si A appartient à $\mathrm{Ker}\, u$.

Calculer $f(A)$ lorsque A est un point critique de f.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice M pour que f admette un point critique et un seul.

Quel est-alors ce point critique ?

Q5 a) Justifier qu'il existe une base orthonormale $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de u respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n telles que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

b) Montrer que $f(V_i) = f(-V_i) = \lambda_i$ pour i élément de $[\![1, n]\!]$.

c) Montrer que pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$:

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} \big(< X, V_k > \big)^2 \lambda_k.$$

Q6 On étudie dans cette question la nature des points critiques de f sur $\mathbb{R}^n$.

a) A est un point critique de f sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $\forall H \in \mathbb{R}^n,\ f(A+H) - f(A) = f(H) = \sum\limits_{k=1}^{n} \big(< H, V_k > \big)^2 \lambda_k$.

Etudier alors la nature de ce point critique dans les trois cas suivants.

- $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ (mini.).
- $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant 0$ (maxi.).
- $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_n > 0$ (rien, $H_1 = \frac{r}{2} V_1$ et $H_2 = \cdots$).

b) Montrer que $\Big(\forall X \in \mathbb{R}^n,\ f(X) \geqslant 0 \Big) \Longleftrightarrow 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_n$ (deux étapes dont l'une est claire et l'autre utilise les V_i).

► **c) n'est pas à faire. Passer directement à c') ; dans la correction je corrige c)**

c) On suppose que $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. X, Y sont dans $\mathbb{R}^n$ et t dans $\mathbb{R}$.

Utiliser Q4 a) pour obtenir l'expression de $f(X + tY)$.

En déduire que : $\Big(< u(X), Y > \Big)^2 \leqslant f(X)\, f(Y)$ (on pourra s'inspirer de la démonstrartion de Cauchy-Schawrz).

c') On suppose que : $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ f(X) \geqslant 0$. Montrer que si Y est un élément de $\mathbb{R}^n$: $f(Y) = 0 \Longleftrightarrow u(Y) = 0$.

Q7 a) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que E est un sous-ensemble femé de $\mathbb{R}^n$ (pour X n'appartenant pas à E, utiliser la boule ouverte de centre X et de rayon : $r = \|X - X'\|$ où X' est la projection orthogonale de X sur E ; déjà fait en classe).

b) On pose $S(E) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \mid \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1\}$. Montrer que f possède sur $S(E)$ un maximum global et un minimum global (cours).

c) Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, on pose : $E_k = \mathrm{Vect}(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ et $F_k = \mathrm{Vect}(V_k, V_{k+1}, \ldots, V_n)$.

Montrer les quatre propriétés suivantes.

i) $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in E_k, \lambda_1 \|X\|^2 \leqslant f(X) \leqslant \lambda_k \|X\|^2$.

ii) $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall X \in F_k, \lambda_k \|X\|^2 \leqslant f(X) \leqslant \lambda_n \|X\|^2$.

iii) $\forall X \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 \|X\|^2 \leqslant f(X) \leqslant \lambda_n \|X\|^2$.

iv) $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_1 \leqslant m_{kk} \leqslant \lambda_n$.

d) k est un élément de $[\![1, n]\!]$. Déduire de ce qui précède, la valeur des extremums globaux de f sur $S(E_k)$ et sur $S(F_k)$.

Ces extremums sont-ils stricts ? Que donne le cas particulier $S(E_n)$?

Partie II Etude de $g : X \to f(X)\, e^{-\|X\|^2}$.

On pose : $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ g(X) = f(X)\ e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)} = f(X)\, e^{-\|X\|^2}$.

Q1 On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = t\, e^{-t}$.

Etudier les variations de φ sur $[0, +\infty[$.

Q2 **Etude d'un exemple**. Ici : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ g(x_1, x_2) = x_1 x_2\, e^{-x_1^2 - x_2^2}$.

a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les extremums locaux de g sur $\mathbb{R}^2$ (5 points ; utiliser la C.S.).

c) Montrer que : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ -\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}\ e^{-x_1^2 - x_2^2} \leqslant g(x_1, x_2) \leqslant \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}\ e^{-x_1^2 - x_2^2}$.

d) En déduire, en utilisant la fonction φ définie dans Q1, que les extremums locaux de g sur $\mathbb{R}^2$ sont en fait des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$.

Q3 On revient au cas général.

a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles premières en fonction de celles de f.

Soit X un élément de $\mathbb{R}^n$. Exprimer le gradient $\nabla g(X)$ de g en X en fonction de X, $u(X)$, $f(X)$ et $e^{-\|X\|^2}$ $(2e^{-\|X\|^2}(u(X) - f(X)\, X))$.

Calculer le produit scalaire $< X, \nabla g(X) >$ en fonction de $f(X)$ et de $\|X\|$ $(2e^{-\|X\|^2} f(X)(1 - \|X\|^2))$.

b) Soit A un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que A est un point critique de g si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $u(A) = 0$
- A est un vecteur propre unitaire de u associé à une valeur propre non nulle.

Faire deux étapes...

c) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_1\, \varphi(\|X\|^2) \leqslant g(X) \leqslant \lambda_n\, \varphi(\|X\|^2)$.

d) Dans les trois cas suivants, prouver que la fonction g admet des extremums globaux sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer tous les points pour lesquels ces extremums sont obtenus.

d1) On suppose $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_n > 0$.
d2) On suppose $\lambda_1 > 0$.
d3) On suppose $\lambda_n < 0$.

Q4 Applications.

a) Soit la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la fonction f de deux variables x_1, x_2 associée à cette matrice ?

Retrouver les résultats de la question 2 d), en appliquant ceux de la question 3 d).

b) Soit la matrice $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Quelle est la fonction f de trois variables x_1, x_2, x_3 associée à cette matrice ?

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u, représenté par la matrice M_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et une base orthonormale de vecteurs propres de u.

En utilisant les résultats de la question 3 d), déterminer les extremums globaux de g sur $\mathbb{R}^3$ et les points pour lesquels ils ont obtenus.
