SUJET 3

PARTIE I

Q1 a et b sont deux réels positifs ou nuls. On considère les deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$a_0 = a\ ,\ b_0 = b,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\cdot$$

a) Examiner rapidement les trois cas particuliers $a = 0$, $b = 0$ et $a = b$ (on pourra calculer a_n et b_n pour tout n dans $\mathbb{N}$, donner $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$; ne rédiger la récurrence que dans le premier cas...).

b) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$.

c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont monotones.

d) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent et ont la même limite. Dans la suite nous noterons $\mathcal{L}(a,b)$ cette limite. Etablir que :

$$\boxed{\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant \frac{a+b}{2}}$$

Q2 a, b et λ sont trois réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$\boxed{\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda\ \mathcal{L}(a,b)} \quad \boxed{\mathcal{L}(a,b) = \mathcal{L}(b,a)} \quad \boxed{\mathcal{L}(a,b) = \mathcal{L}\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)}$$

(faire des démonstrations courtes mais sérieuses ; on ne rédigera la récurrence que dans le premier cas).

Q3 a et b sont deux réels positifs ou nuls.

a) Justifier rapidement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \mathcal{L}(a,b) - a_n \leqslant b_n - a_n$.

b) Ecrire en TP4 une fonction qui donne une valeur approchée de $\mathcal{L}(a,b)$ à epsilon près (on fournit a, b et epsilon).

Q4 **Facultatif**. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^n}$

PARTIE II

Dans cette partie α et β sont deux réels tels que : $0 < \alpha \leqslant \beta$.

Q1 Montrer que l'intégrale $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2 Montrer que $I(\alpha,\beta)$ vaut $2J(\alpha,\beta)$ où $J(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{1}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}\,\mathrm{d}t$ (on pourra faire dans cette dernière intégrale, le changement de variable : $x = \frac{\alpha\beta}{t}$).

Q3 On pose $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$ et $\delta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot$

a) Pour tout élément t de $]0, \sqrt{\alpha\beta}]$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{\alpha\beta - t^2}{2t}\cdot$ Montrer que φ définit une bijection de $]0, \sqrt{\alpha\beta}]$ sur $[0, +\infty[$.

Montrer que $\forall u \in [0,+\infty[,\ \varphi^{-1}(u) = -u + \sqrt{u^2+\alpha\beta}$ et calculer la dérivée de cette fonction.

b) Soit t un élément de $]0, \sqrt{\alpha\beta}]$. Montrer que si $u = \varphi(t)$ alors : $\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)} = 2t\sqrt{u^2+\delta^2}$.

c) Prouver que $J(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{2}\ I(\gamma,\delta)$ (poser $u = \varphi(t) = \frac{\alpha\beta - t^2}{2t}$; $t = \varphi^{-1}(u)$... il faut réussir ce changement de variable).

En déduire que :

$$\boxed{I(\alpha,\beta) = I\left(\sqrt{\alpha\beta}, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Q4 Montrer que $I(\alpha,\alpha) = \dfrac{\pi}{2\alpha}$ ($x = \frac{t}{\alpha}$...) et que $\dfrac{\pi}{2\beta} \leqslant I(\alpha,\beta) \leqslant \dfrac{\pi}{2\alpha}\cdot$

Q5 a et b sont deux réels tels que $0 < a \leqslant b$. $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont les deux suites définies par :

$$a_0 = a\ ,\ b_0 = b,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}\cdot$$

Montrer que la suite de terme général $I(a_n, b_n)$ est constante. Utiliser alors Q4 pour en déduire que :

$$\boxed{\mathcal{L}(a,b)\ I(a,b) = \frac{\pi}{2}}$$

Q6 a et b sont deux réels tels que $0 < a \leqslant b$.

a) Montrer que $\Delta(a,b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$ est égale à $I(a,b)$ (on pourra faire le changement de variable $t = b\tan\theta$).

b) **Facultatif** Retrouver $I(a,b) = I\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$ (on pourra commencer par faire le changement de variable $t = \sqrt{ab}\tan\theta$ dans $I(a,b)$).

Q7 **Facultatif** a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\Delta(a,b)$ ($u = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$...).

PARTIE III

On pose : $\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) = \mathcal{L}(1,x)$.

Q1 a) Soit a et b deux éléments de $[0,+\infty[$ non simultanément nuls. Exprimer $\mathcal{L}(a,b)$ à l'aide de F, a et b (deux cas).

b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

Q2 a) Montrer que F est positive et croissante.

b) En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$ existe et est finie.

Q3 Soit x un réel strictement positif. Montrer que :

- $\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1+x}{2}$;
- $F(x) = x\ F\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

- $F(x) = \sqrt{x}\, F\left(\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$;
- $F(x) = \dfrac{1+x}{2}\, F\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Q4 a) Montrer que F est dérivable en 1 et calculer $F'(1)$ (on pourra procéder par encadrement).

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

c) Montrer que F est continue en 0. F est-elle dérivable en ce point ?

d) Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{\sqrt{x}}\cdot$

Q5 **Facultatif**. Soit c un élément de $]0+\infty,[$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x>c}} F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x<c}} F(x)$ existent et sont finies.

Montrer que F est continue en c (on pourra étudier la monotonie de $x \to \frac{F(x)}{x}$).

PARTIE IV

---

x est un nombre réel strictement positif. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = x \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}\cdot$$

Q1 $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$. Ecrire en TP4 une fonction qui donne la valeur de P_n à partir de n et x.

Q2 Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 1.

Q3 x est ici différent de 1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 1$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot$ En déduire que la série de terme général v_n converge.

c) Montrer que la suite de terme général $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$ converge. Montrer que ceci vaut encore pour $x = 1$.

Q4 Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Exprimer P_n en fonction de $F(x)$ et de $F(u_{n+1})$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \Big(F(x)\Big)^2$.
