INTRODUCTION

$A = (a_{ij})$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ a alors une solution et une seule X^*.

On se propose d'étudier quelques méthodes permettant non pas de calculer X^* mais d'en donner une approximation.

Le tout repose sur la construction d'une suite $(X_p)_{p\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui converge vers X^* en un sens que l'on peut déjà préciser.

DE LA CONVERGENCE D'UNE SUITE DE MATRICES COLONNES

Supposons que : $\forall p \in \mathbb{N},\ X_p = \begin{pmatrix} x_1^{(p)} \\ x_2^{(p)} \\ \vdots \\ x_n^{(p)} \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose : $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$.

On dit que la suite $(X_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers X^* si, pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$, la suite $(x_i^{(p)})_{p\geqslant 0}$ converge vers x_i^*.

Q1 Pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\| = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_i|$.

a) Soit X et Y deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et λ un élément de $\mathbb{R}$. Montrer que :

- $\|X\| = 0 \iff X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.
- $\|\lambda X\| = |\lambda|\ \|X\|$.
- $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$.

$X \to \|X\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que, pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \left[\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \left(\sum_{j=1}^{n} |aij| \right) \right] \|X\|$.

Trouver un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'inégalité précédente soit une égalité.

c) Soit $(X_p)_{p\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $(X_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers X^*.

ii) $(\|X_p - X^*\|)_{p\geqslant 0}$ converge vers 0.

iii) La suite de terme général $R_p = AX_p - B = \begin{pmatrix} r_1^{(p)} \\ r_2^{(p)} \\ \vdots \\ r_n^{(p)} \end{pmatrix}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

RELAXATION ET ITÉRATION

Le plus souvent la suite $(X_p)_{p\geqslant 0}$ est définie par récurrence. On se donne X_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On envisage la construction de X_{p+1} à partir de X_p de la manière suivante. On évalue le résidu d'indice p $R_p = AX_p - B$ et on cherche un moyen "d'améliorer" ce résidu (diminuer sa norme serait une bonne chose...) en modifiant X_p. Le résultat de la modification de X_p est alors X_{p+1} !

Si le passage de X_p à X_{p+1} ne modifie qu'une composante de X_p on parle de **relaxation** ; dans le cas contaire on parle **d'itération**.

En relaxation, l'une des idées classiques consiste à construire X_{p+1} à partir de X_p pour faire en sorte que l'une des composantes de R_{p+1} soit nulle. Reste à décider du rang de cette composante et du moyen de la rendre nulle. Commençons par traiter le second problème.

Q2 i est un élément de $[\![1,n]\!]$. p est dans $\mathbb{N}$.

a) Exprimer, pour i dans $[\![1,n]\!]$, $r_i^{(p+1)}$ en fonction des composantes de X_{p+1} et des coefficients de A.

b) Soit j un élément de $[\![1,n]\!]$. Peut-on construire X_{p+1} à partir de X_p de telle manière que :

$$r_i^{(p+1)} = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!],\ k \neq j \Rightarrow x_k^{(p+1)} = x_k^{(p)} \ ?$$

On a donc évoqué la possibilité d'annuler la composante d'indice i du résidu en modifiant uniquement la composante d'indice j de X_p. Le plus souvent on prend $j = i$.

c) On suppose $a_{ii} \neq 0$. Montrer que l'on peut construire X_{p+1}, à partir de X_p, de telle manière que :

$$r_i^{(p+1)} = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!],\ k \neq i \Rightarrow x_k^{(p+1)} = x_k^{(p)}.$$

Montrer alors que : $x_i^{(p+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{ik} x_k^{(p)} \right] = x_i^{(p)} - \dfrac{r_i^{(p)}}{a_{ii}}$

Montrer que si k est un élément de $[\![1,n]\!]$ distinct de i : $r_k^{(p+1)} = r_k^{(p)} - a_{ki}\, \dfrac{r_i^{(p)}}{a_{ii}}$.

Compter le nombre de multiplications/divisions et le nombre d'additions/soustractions pour passer de X_p et R_p à X_{p+1} et R_{p+1} (on ne calcule qu'une seule fois $\frac{r_i^{(p)}}{a_{ii}}$).

Notons bien que le passage de X_p à X_{p+1} ne modifie que la composante d'indice i de X_p, mais qu'il n'en est pas de même pour le passage de R_p à R_{p+1}.

Le choix de l'indice i débouche sur plusieurs méthodes classiques. Nous allons exposer les deux principales.

LA MÉTHODE DE SOUTHWELL

On suppose ici que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$. Le choix de la composante de R_p à annuler souscrit au schéma suivant. On tape sur celui dont la tête dépasse le plus en espérant que les autres, impressionnés par une telle hardiesse, ne la ramèneront pas trop (... leur tête...) !

En clair on prend i tel que $|r_i^{(p)}| = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Max}} |r_k^{(p)}|$ (cet i n'étant pas unique on peut prendre le plus petit i ayant cette qualité).

On se propose d'écrire un programme en TP4 permettant de construire la suite $(X_p)_{p \geqslant 0}$.

Q3 Ecrire une fonction qui donne le plus petit rang où le maximum des valeurs absolues des composantes d'un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est atteint et qui donne aussi ce maximum.

La première phrase de la déclaration de cette fonction est :

Function Rang_et_Max(n : **integer** ; X : vecteur ; **var** max : **real**) : **integer** ;

Dans le programme principal figurent les déclarations suivantes.

Const DimMax=50 ; IterMax=100 ; MinCoef=1e-5 ; Epsilon=1e-6 ;
Type vecteur=**array**[1..DimMax] **of real** ;
matrice=**array**[1..DimMax,1..DimMax] **of real** ;

Q4 Plusieurs problèmes se posent.

1. La méthode est-elle convergente ? Autrement dit la suite $(X_p)_{p \geqslant 0}$ converge-t-elle vers X^* ?
2. En cas de convergence quand faut-il s'arrêter de calculer des termes de la suite ?
3. L'utilisateur aura-t-il le bon goût de proposer une matrice dont les coefficients diagonaux sont “non nuls ” ?

a) La suite $(X_p)_{p \geqslant 0}$ converge vers X^* si et seulement si la suite $(R_p)_{p \geqslant 0}$ (resp. $(\|R_p\|)_{p \geqslant 0}$) converge vers zéro. Il est normal d'arrêter les calculs lorsque $\|R_p\|$ est suffisamment petit.

Ecrire alors une procédure qui calcule X_p jusqu'à ce que : $\|R_p\| \leqslant$ epsilon.

La première phrase de la déclaration de cette procédure est :

Procedure Southwell_1 (n : **integer** ; A : matrice ; B : vecteur ; **var** X : vecteur) ;

On utilisera la fonction écrite plus haut et on pourra choisir X_0 nul.

b) La convergence n'étant pas assurée on limite le nombre d'itérations à IterMax.

De plus si la valeur absolue d'un a_{ii} est inférieure à MinCoef on peut la considérer comme nulle et on se refuse alors à diviser par a_{ii}. Le travail s'arrête.

Ecrire une fonction Sousthwell_2 qui effectue le même travail que la procédure Southwell_1 en tenant compte des deux contraintes précédentes.

Cette fonction devra :

- Renvoyer le nombre de termes de la suite calculés si la précision est atteinte... ainsi que le résultat obtenu.
- Renvoyer la valeur -1 si une division n'a pu avoir lieu.
- Renvoyer la valeur -2 si on a fait le nombre maximum d'itérations sans atteindre la précision

La première phrase de la déclaration de cette fonction est :

Function Southwell_2 (n : **integer** ; A : matrice ; B : vecteur ; **var** X : vecteur) : **integer** ;

LA MÉTHODE DE GAUSS-SEIDEL

On suppose encore que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{ii} \neq 0$. Ici on annule successivement chaque composante du résidu de la première à la dernière puis on recommence à partir de la première. Notons que les formules proposées dans ce qui précède sont encore vraies.

Q5 S'inspirer de la fonction Southwell_2 pour écrire une fonction Gauss_Seidel (on peut utiliser Rang_et_Max ou réécrire une fonction Max plus simple).

Q6 $(X_p)_{p\geqslant 0}$ est la suite construite en utilisant la méthode précédente.

On pose pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $Y_k = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \vdots \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix} = X_{kn}$ (cela revient à regrouper n pas succesifs de la méthode de Gauss-Seidel).

Justifier le résultat suivant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j^{(k)} - b_i \right]$$

Q7 On pose $E = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. $A = E + F$.

a) Montrer que E est inversible. On pose encore : $M = -E^{-1}F$ et $C = E^{-1}B$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ Y_{k+1} = MY_k + C$$

b) Montrer que si X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $MX + C = X \Leftrightarrow X = X^*$.

c) Montrer que $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers X^* si et seulement si $(X_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers X^*.

d) $M = (m_{ij})$. On pose $\lambda = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} \left(\sum_{j=1}^{n} |m_{ij}| \right)$ et on suppose $\lambda < 1$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \|Y_k - X^*\| \leqslant \lambda^k\ \|Y_0 - X^*\|$. En déduire que $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ et $(X_p)_{p\geqslant 0}$ convergent vers X^*.

Montrer encore que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \|Y_k - X^*\| \leqslant \dfrac{\lambda^k}{1-\lambda}\ \|Y_1 - Y_0\|$.

Q8 a) On se propose de trouver une condition suffisante portant sur A pour que $\lambda < 1$.

On pose $\mu = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} \left(\dfrac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right)$ et on suppose $\mu < 1$.

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $MU = V$. Exprimer, pour i dans $[\![1, n]\!]$, v_i en fonction de v_1, v_2, ..., v_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n.

Montrer par récurrence que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |v_i| \leqslant \mu\ \|U\|$. En déduire que : $\lambda \leqslant \mu < 1$.

b) Montrer que si A vérifie uniquement :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (1)$$

alors A est inversible et on peut construire avec la méthode de Gauss-Seidel une suite qui converge vers X^*.

Si A vérifie (1) on dit que A est à diagonale strictement dominante.

c) Montrer dans ce cas que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \|Y_k - X^*\| \leqslant \mu^k\ \|Y_0 - X^*\|$ et $\|Y_k - X^*\| \leqslant \dfrac{\mu^k}{1-\mu}\ \|Y_1 - Y_0\|$.

Q9 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A vérifie les bonnes hypothèses et calculer X^*.

b) $Y_0 = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ Y_{k+1} = MY_k + C$. Calculer Y_k pour tout élément k de $\mathbb{N}$. Vérifier que la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers X^*

• On peut démontrer que pour une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives l'algorithme de Gauss-Seidel converge toujours.

• La relaxation c'est bien mais la sur-relaxation c'est encore mieux ! On se donne un réel ω non nul. Pour passer de X_p à X_{p+1} on procède de la manière suivante. On passe de X_p à X'_{p+1} en utilisant Gauss-Seidel et on pose alors : $X_{p+1} = \omega\, X'_{p+1} + (1-\omega)\, X'_{p+1}$. Ne reste plus qu'à bien choisir le ω pour obtenir une convergence "optimale".

• Revenons sur des idées entrevues dans la méthode précédente.
On est passé de l'équation $AX = B$ à l'équation $MX + C = X$ en partionnant A ($A = E + F$...) et on a vu que, sous de bonnes hypothèses, la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ Y_{k+1} = MY_k + C$ convergeait vers X^*. On parle alors **d'itération linéaire**. Nous allons dans ce qui suit exposer une méthode d'itération linéaire reposant sur une autre partition de A : la méthode de Jacobi.

LA MÉTHODE DE JACOBI

On suppose dans la suite que A est à diagonale strictement dominante. On pose : $E = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, $F = A - E$, $M = -E^{-1}F$ et $C = E^{-1}B$.

On choisit Y_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on pose : $\forall k \in \mathbb{N},\ Y_{k+1} = MY_k + C$.

Q10 a) Montrer que X^* est l'unique solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $MX = X$.

b) Exprimer, pour k dans $\mathbb{N}$, les composantes de Y_{k+1} en fonction de celles de Y_k.

c) Reprendre Q9 b).

Q11 $\mu = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \left(\dfrac{1}{|a_{ii}|} \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right)$. $\mu < 1$.

a) Montrer que si U et V sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $MU = V$ alors $\|V\| \leqslant \mu\ \|U\|$.

b) En déduire que la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers X^*.

Q12 Ecrire une fonction Jacobi, sur le modèle de Southwell_2 permettant d'obtenir une approximation de X^*.
