VERSION COURTE

PARTIE I

Dans cette partie on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, prenant leurs valeurs dans $[0,+\infty[$, indépendantes et de même loi.

On pose : $Y_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, F_n est la fonction de répartition de Y_n $(\forall x\in\mathbb{R},\ F_n(x)=P(Y_n\leqslant x))$.

Pour tout réel a positif ou nul, on note $N(a)$ la variable aléatoire (? ?) égale au cardinal de l'ensemble des variables de la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ qui prennent une valeur appartenant à l'intervalle $[0,a]$ lorsque cet ensemble est fini et qui prend la valeur $+\infty$ dans le cas contraire.

On se propose d'étudier cette variable aléatoire $N(a)$.

Il convient dans toute la suite du problème de bien remarquer la singularité du cas n = 0.

Q1 a est un élément de $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que $\big(F_n(a)\big)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels positifs ou nuls et de premier terme 1.

En déduire que cette suite converge vers un réel ℓ_a appartenant à $[0,1]$.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer avec beaucoup de soin que $\{N(a)=n\}=\{0\leqslant Y_{n-1}\leqslant a\}\cap\{Y_n>a\}$ (on pourra sans doute raisonner avec des ω...).

En déduire que :

$$P\big(N(a)=n\big)=F_{n-1}(a)-F_n(a)$$

Montrer que : $P(N(a)<+\infty)=1$ si et seulement si $\ell_a=0$.

Q2 a est un élément de $\mathbb{R}^+$. On pose, pour faciliter les écritures : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=F_n(a)$.

On suppose que la série de terme général $n\,u_n=n\,F_n(a)$ converge.

a) Montrer très simplement que les séries de termes généraux $u_n=F_n(a)$ et $n\,(u_{n-1}-u_n)=n\,\big(F_{n-1}(a)-F_n(a)\big)$ convergent.

b) Montrer que $P(N(a)<+\infty)=1$. La variable aléatoire $N(a)$ peut alors être considérée à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

c) Montrer que $N(a)$ possède une espérance et que $E(N(a))=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}F_n(a)$.

Q3 **Le modèle de Bernoulli**.

Ici p est un élément de $]0,1[$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

a) Quelle est la loi de Y_n lorsque n est dans $\mathbb{N}^*$?

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in\mathbb{N},\ F_n(k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{Min}(k,n)}\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}$. Montrer que ceci vaut encore pour $n=0$.

Préciser $F_n(k)$ pour k dans $\mathbb{N}$ et n dans $[\![0,k]\!]$.

b) Soit α un réel et x un élément de $]-1,1[$. Montrer que la série de terme général $n^\alpha\,x^n$ est absolument convergente.

En déduire que pour tout élément i de $\mathbb{N}$, la série de terme général $n\displaystyle\binom{n}{i}x^n$ converge.

c) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que la série de terme général $n\,F_n(k)$ converge. Qu'en déduire pour $N(k)$?

d) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que : $E\big(N(k)\big) = k + \sum_{n=k}^{+\infty} F_n(k)$.

Montrer que $E\big(N(0)\big) = \frac{1}{p}\cdot$ Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ E\big(N(k+1)\big) - E\big(N(k)\big) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} P(Y_n = k+1)$.

e) On rappelle que si x est un réel appartenant à $]-1,1[$ et si r est un élément de $\mathbb{N}$ alors :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ E\big(N(k+1)\big) = E\big(N(k)\big) + \frac{1}{p}\cdot$

En déduire la valeur de $E\big(N(k)\big)$ pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

Q4 **Le modèle exponentiel**.

On considère maintenant le cas particulier où la loi de X_n est, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$). a est un réel strictement positif.

a) n est élément de $\mathbb{N}^*$. Préciser la loi de Y_n et en donner une densité.

b) n est élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $F_{n-1}(a) - F_n(a) = \frac{(\lambda\,a)^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\lambda\,a}$. En déduire la valeur de $P(N(a) = n)$.

Montrer alors que $N(a) - 1$ suit une loi classique que l'on précisera. Déterminer l'espérance et la variance de $N(a)$.

PARTIE II

Soit $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$. Soit a un réel de l'intervalle $]0,1]$.

Q1 Soit n un entier strictement positif. On pose : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ Y_k = X_k$ et $\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ Y_k = 2$.

$N_n(a)$ est la variable aléatoire égale au nombre de variables de la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ qui prennent une valeur appartenant à l'intervalle $[0,a]$.

Quelle est la loi de $N_n(a)$? Donner la valeur de $E\big(N_n(a)\big)$.

Q2 Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$.

On définit alors, pour tout élément k de $\mathbb{N}$, la variable aléatoire $\widetilde{Y}_k$ par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \widetilde{Y}_k(\omega) = \begin{cases} X_k(\omega) & \text{si } Z(\omega) > k \\ 2 & \text{si } Z(\omega) \leqslant k \end{cases}.$$

$\widetilde{N}(a)$ est la variable aléatoire égale au nombre de variables de la suite $(\widetilde{Y}_k)_{k\geqslant 0}$ qui prennent une valeur appartenant à l'intervalle $[0,a]$.

a) Montrer que :

$$P(\widetilde{N}(a) = 0) = P(Z = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N_n(a) = 0)P(Z = n).$$

Montrer encore que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\widetilde{N}(a) = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N_n(a) = k)P(Z = n).$$

En déduire que $\widetilde{N}(a)$ suit une loi de Poisson de paramètre λa.

b) Pour tout élément ω de Ω, $\big(T_m(\omega)\big)_{m \geqslant 1}$ est la suite obtenue à partir de la suite $\big(\widetilde{Y}_k(\omega)\big)_{k \geqslant 0}$ en ordonnant cette suite de manière croissante.

Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$ et G_m la fonction de répartition de T_m.

Montrer que $P(T_m \leqslant a) = P(\widetilde{N}(a) \geqslant m)$. En déduire que $P(T_m \leqslant a) = \displaystyle\int_0^{\lambda a} \frac{t^{m-1}\,e^{-t}}{(m-1)!}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer G_m (on pourra faire intervenir dans le résultat des $\int_0^{\lambda x} \frac{t^{m-1}\,e^{-t}}{(m-1)!}\,\mathrm{d}t$ sans chercher à calculer ces intégrales).

VERSION COURTE

PRÉLIMINAIRE

Les deux questions sont indépendantes.

Q1 α et x sont deux réels et r est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Etudier l'absolue convergence et la convergence de la série de terme général $n^\alpha\, x^n$ (pour $x = -1$ on pourra penser aux séries alternées).

b) On suppose que x appartient à $]-1,1[$. Montrer que la série de terme général $n^\alpha \binom{n}{r} x^{n-r}$ converge.

Montrer que :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

(on pourra dériver r fois $\sum_{n=0}^{s-1} x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x}\, x^s$).

Q2 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite **décroissante** de réels **positifs ou nuls** telle que $a_0 = 1$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[0,1]$.

Montrer que la série de terme général $a_{n-1} - a_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n-1} - a_n) = 1 - \ell$.

b) On suppose que la série de terme général $n\, a_n$ converge. Montrer que les séries de termes généraux a_n et $n\,(a_{n-1} - a_n)$ convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_{n-1} - a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

PARTIE I

Dans cette partie on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prenant leurs valeurs dans $[0, +\infty[$, indépendantes et de même loi.

On pose : $Y_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, F_n est la fonction de répartition de Y_n ($\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = P(Y_n \leqslant x)$).

Pour tout réel a positif ou nul, on note $N(a)$ la variable aléatoire (? ?) égale au cardinal de l'ensemble des variables de la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ qui prennent une valeur appartenant à l'intervalle $[0, a]$ lorsque cet ensemble est fini et qui prend la valeur $+\infty$ dans le cas contraire.

On se propose d'étudier cette variable aléatoire $N(a)$.

Il convient dans toute la suite du problème de bien remarquer la singularité du cas n = 0.

Q1 a) a est un élément de $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\big(F_n(a)\big)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels positifs ou nuls et de premier terme 1.

b) Montrer avec beaucoup de soin que l'on a, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$:

$$P\big(N(a) = n\big) = F_{n-1}(a) - F_n(a)$$

Montrer que : $P(N(a) < +\infty) = 1$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} F_n(a) = 0$.

c) On suppose que la série de terme général $nF_n(a)$ converge.

Montrer que $P(N(a) < +\infty) = 1$. La variable aléatoire $N(a)$ peut alors être considérée à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $N(a)$ possède une espérance et que $E(N(a)) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(a)$.

Q2 **Le modèle de Bernoulli**.

Dans cette question p est un élément de $]0,1[$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

a) n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de Y_n ? Préciser $F_n(k)$ pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

Calculer $F_0(k)$ pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que la série de terme général $nF_n(k)$ converge. Qu'en déduire pour $N(k)$?

c) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que : $E\big(N(k)\big) = k + \sum_{n=k}^{+\infty} F_n(k)$.

Calculer $E\big(N(0)\big)$ et $E\big(N(1)\big)$.

d) En utilisant le préliminaire, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ E\big(N(k+1)\big) = E\big(N(k)\big) + \dfrac{1}{p}\cdot$

En déduire la valeur de $E\big(N(k)\big)$ pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

Q3 **Le modèle géométrique**.

Dans cette question b est un élément de $]0,1[$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $X_n + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - b$.

Autrement dit, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_n = k) = (1-b)\,b^k$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_n = k) = \binom{n-1+k}{n-1}(1-b)^n\,b^k$$

b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que la série de terme général $nF_n(k)$ converge. Qu'en déduire pour $N(k)$?

c) $E\big(N(0)\big)$.

Exprimer $E\big(N(k+1)\big)$ en fonction de $E\big(N(k)\big)$ pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

En déduire la valeur de $E\big(N(k)\big)$ pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

Q4 **Le modèle exponentiel**.

On considère maintenant le cas particulier où la loi de X_n est, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$). a est un réel strictement positif.

a) n est élément de $\mathbb{N}^*$. Préciser la loi de Y_n et en donner une densité.

b) n est élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $F_{n-1}(a) - F_n(a) = \dfrac{(\lambda\,a)^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\lambda\,a}$. En déduire la valeur de $P(N(a) = n)$.

Montrer alors que $N(a) - 1$ suit une loi classique que l'on précisera. Déterminer l'espérance et la variance de $N(a)$.

PARTIE II

Soit $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$. Soit a un réel de l'intervalle $]0,1]$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Soit n un entier strictement positif. On pose : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ Y_k = X_k$ et $\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ Y_k = 2$.

$N_n(a)$ est la variable aléatoire égale au nombre de variables de la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ qui prennent une valeur appartenant à l'intervalle $[0, a]$.

Quelle est la loi de $N_n(a)$? Donner la valeur de $E\big(N_n(a)\big)$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$.

On définit alors, pour tout élément k de $\mathbb{N}$, la variable aléatoire $\widetilde{Y}_k$ par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \widetilde{Y}_k(\omega) = \begin{cases} X_k(\omega) & \text{si } Z(\omega) > k \\ \quad 2 & \text{si } Z(\omega) \leqslant k \end{cases}.$$

$\widetilde{N}(a)$ est la variable aléatoire égale au nombre de variables de la suite $(\widetilde{Y}_k)_{k\geqslant 0}$ qui prennent une valeur appartenant à l'intervalle $[0, a]$.

a) Montrer que :

$$P(\widetilde{N}(a) = 0) = P(Z = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N_n(a) = 0)P(Z = n).$$

Montrer encore que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\widetilde{N}(a) = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N_n(a) = k)P(Z = n).$$

En déduire que $\widetilde{N}(a)$ suit une loi de Poisson de paramètre λa.

b) Pour tout élément ω de Ω, $\big(T_m(\omega)\big)_{m\geqslant 1}$ est la suite obtenue à partir de la suite $\big(\widetilde{Y}_k(\omega)\big)_{k\geqslant 0}$ en ordonnant cette suite de manière croissante.

Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$ et G_m la fonction de répartition de T_m.

Montrer que $P(T_m \leqslant a) = P(\widetilde{N}(a) \geqslant m)$. En déduire que $P(T_m \leqslant a) = \displaystyle\int_0^{\lambda a} \frac{t^{m-1}\, e^{-t}}{(m-1)!}\, \mathrm{d}t$.

Déterminer G_m (on pourra faire intervenir dans le résultat des $\int_0^{\lambda x} \frac{t^{m-1}\, e^{-t}}{(m-1)!}\, \mathrm{d}t$ sans chercher à calculer ces intégrales).