
PARTIE I

n est un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. $E = \mathbb{R}_n[X]$. $\mathcal{E} = (1, X, \dots, X^n)$ est la base canonique de E .

$\forall k \in \llbracket 0, n \llbracket$, $Q_k = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = C_n^k X^k (1-X)^{n-k}$. On note \mathcal{Q} la famille (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) .

$F_0 = 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \llbracket$, $F_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$. On note \mathcal{F} la famille (F_0, F_1, \dots, F_n) .

Q1 a) Montrer que \mathcal{F} est une base de E .

b) Montrer que \mathcal{Q} est une base de E et préciser la matrice de passage de la base \mathcal{E} à la base \mathcal{Q} ainsi que la matrice de passage de la base \mathcal{Q} à la base \mathcal{E} (on pourra remarquer que $X^j = [X + (1-X)]^{n-j} X^j$).

Q2 On considère l'application B définie sur E par :

$$\forall P \in E, B(P) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) Q_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k P\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}$$

a) Montrer que B est un endomorphisme de E .

b) Calculer $B(P)$ lorsque P est un élément de $\mathbb{R}_1[X]$.

Q3 j est un élément de $\llbracket 0, n \llbracket$.

a) Pour x dans \mathbb{R} on considère la fonction $\varphi : t \rightarrow (tx + (1-x))^n$. Calculer de deux façons différentes : $\varphi^{(j)}(1)$.

b) En déduire que : $\sum_{k=0}^n F_j(k) Q_k(X) = F_j(n) X^j$.

Q4 Pour tout élément j de $\llbracket 0, n \llbracket$, on pose : $U_j(X) = \frac{1}{n^j} F_j(nX)$ et $\lambda_j = \frac{1}{n^j} F_j(n)$.

a) Montrer que $\mathcal{U} = (U_0, U_1, \dots, U_n)$ est une base de E .

b) Montrer que pour tout j dans $\llbracket 0, n \llbracket$: $B(U_j) = \lambda_j X^j$.

c) Prouver que B est un automorphisme de E .

Q5 a) Montrer que B est diagonalisable et préciser ses valeurs propres. On précisera notamment que 1 est valeur propre de B et on déterminera le sous-espace propre associé.

b) Justifier l'existence d'une unique famille (H_2, H_3, \dots, H_n) de vecteurs de E telle que, pour tout k dans $\llbracket 2, n \llbracket$: H_k est de degré k , de coefficient dominant égal à 1 et vérifie : $B(H_k) = \lambda_k H_k$.

c) On pose $H_0 = 1$ et $H_1 = X - 1/2$. Montrer que $\mathcal{H} = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de E et préciser la matrice de B dans cette base.

Q6 a) Prouver que pour tout k dans $\llbracket 0, n \llbracket$ on a : $H_k(1-X) = (-1)^k H_k$.

b) Que vaut $H_k(1/2)$ pour k impair appartenant à $\llbracket 0, n \llbracket$?

c) Calculer $H_k(0)$ et $H_k(1)$ pour k dans $\llbracket 2, n \llbracket$.

d) En déduire l'expression de H_2 , ainsi que l'expression de H_3 si l'on suppose $n \geq 3$.

Q7 On note Δ l'application définie sur E par : $\forall P \in E, \Delta(P) = P(X + 1/n) - P(X)$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme de E .

b) Pour k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ on note Δ^k la composée de k applications égales à Δ . $\Delta^0 = Id_E$. Justifier la formule :

$$\forall P \in E, P = \sum_{k=0}^n \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} F_k(nX) = \sum_{k=0}^n \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} n^k U_k$$

c) En déduire que : $\forall P \in E, B(P) = \sum_{k=0}^n \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} n^k \lambda_k X^k$, puis que :

$$\forall P \in E, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, B(P)\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} \lambda_k j^k$$

PARTIE II

On note \mathcal{D} l'espace vectoriel réel des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 .

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application B_n sur \mathcal{D} par :

$$\forall f \in \mathcal{D}, \forall x \in [0, 1], B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Q1 n appartient à \mathbb{N}^* . Montrer que B_n est un endomorphisme de \mathcal{D} . Est-il surjectif ?

Q2 En utilisant un résultat de probabilité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^n C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Q3 Soit f un élément de \mathcal{D} .

a) Justifier l'existence d'un réel K positif tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

b) Soient n un élément de \mathbb{N}^* , x un élément de $[0, 1]$ et α un réel strictement positif.

On pose $I = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid |k - nx| \geq n\alpha\}$ et $J = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid |k - nx| < n\alpha\}$.

Montrer que si I n'est pas vide, on a :

$$\sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n^2 \alpha^2} \sum_{k=0}^n C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

En déduire que : $|f(x) - B_n(f)(x)| \leq K \left[\alpha + \frac{1}{4\alpha^2 n} \right]$.

c) Conclure que l'on a le résultat :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}) (\exists N \in \mathbb{N}^*) (\forall n \in \mathbb{N}^*) (n \geq N \Rightarrow (\forall x \in [0, 1], |f(x) - B_n(f)| \leq \varepsilon))$$

Qu'en déduire ?

Q4 a) Soit f un élément de \mathcal{D} tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$. Montrer que f est nulle (on pourra considérer $\int_0^1 f(t)[f(t) - B_n(f)(t)] dt$ et II Q3).

Soit g une application de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 et telle que :

- $\lim_{+\infty} g = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t g'(t))$ existe et est finie.
- Pour tout réel x strictement positif : $\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt$ existe et vaut 0.

Utiliser ce qui précède pour montrer que g est nulle.

Q5 Soient f un élément de \mathcal{D} et n un élément de \mathbb{N}^* .

a) On considère $h : x \rightarrow xf(x)$. Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], B_n(h)(x) = \frac{x(1-x)}{n} (B_n(f))'(x) + xB_n(f)(x).$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], (B_n(f))'(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}$$

En déduire que si f est croissante sur $[0, 1]$, il en est de même de $B_n(f)$.
