# PARTIE I

**Q 1** a) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg F_k = k$ ; $(F_0,F_1,\dots,F_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés ; cette famille est donc une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ ; comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ : cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

b) $\mathcal{B}$ étant une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$, pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{B}_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Montrons à l'aide d'une récurrence finie que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k=0$.

→ $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{B}_k(0) = 0$ et $\mathcal{B}_k(0)=\begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{si } k\geq 1\end{cases}$ ; par conséquent $a_0=0$.

→ Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$, supposons $a_0=a_1=\dots=a_k=0$ et montrons que $a_{k+1}=0$.

$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \mathcal{B}_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $\sum_{i=k+1}^{n} a_i C_n^i X^i (1-X)^{n-i} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. En divisant par $X^{k+1}$ on obtient :

$\sum_{i=k+1}^{n} a_i C_n^i X^{i-(k+1)} (1-X)^{n-i} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ; en prenant la valeur de ce polynôme en 0 on obtient

$a_{k+1} C_n^{k+1} = 0$ soit $a_{k+1}=0$ ce qui achève la récurrence.

Notons $H$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$.

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\mathcal{B}_k(X) = C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k X^k C_{n-k}^i (-1)^i X^i = \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k C_{n-k}^i (-1)^i X^{i+k}$

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\mathcal{B}_k(X) = C_n^k \sum_{j=k}^{n} C_{n-k}^{j-k} (-1)^{j-k} X^j = C_n^k \sum_{j=k}^{n} C_{n-k}^{n-j} (-1)^{j-k} X^j$

Par conséquent
$$H = \begin{bmatrix} C_n^0(-1)^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_n^1(-1)^1 & C_n^1 C_{n-1}^{n-1}(-1)^0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_n^2(-1)^2 & C_n^1 C_{n-1}^{n-2}(-1)^1 & C_n^2 C_{n-2}^{n-2}(-1)^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_n^n(-1)^n & C_n^1 C_{n-1}^{n-n}(-1)^{n-1} & C_n^2 C_{n-2}^{n-n}(-1)^{n-2} & \cdots & C_n^n C_{0}^{n-n}(-1)^{n-n} \end{bmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$ n'est autre que $H^{-1}$ !

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $X^k = (X+(1-X))^{n-k} X^k = \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i X^i (1-X)^{n-k-i} X^k \underset{j=i+k}{=} \sum_{j=k}^{n} C_{n-k}^{j-k} X^j (1-X)^{n-j}$

$\forall \ell \in [\![0,n]\!],\ X^\ell = \sum_{j=\ell}^{n} C_{n-\ell}^{j-\ell} X^j(1-X)^{n-j} = \sum_{j=\ell}^{n} C_{n-\ell}^{j-\ell}/C_n^j\ \varphi_j(X) = \sum_{j=\ell}^{n} \left(C_{n-\ell}^{n-j}/C_n^j\right) \varphi_j(X)$

Pour tout $\ell \in [\![1,n+1]\!]$ la $\ell$ ième colonne de $A^{-1}$ est $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/C_n^{\ell+1} \\ C_{n-(\ell+1)}^{n-(\ell+2)}/C_n^{\ell+2} \\ C_{n-(\ell+1)}^{n-(\ell+3)}/C_n^{\ell+3} \\ \vdots \\ C_{n-(\ell+1)}^{n-n}/C_n^n \end{bmatrix}$

Q2.. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

B(P) est une combinaison linéaire de la base $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$; par conséquent : $B(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

B est donc une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Notons la linéarité de B.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X],\ B(\lambda P+Q) = \sum_{\ell=0}^{n} (\lambda P+Q)\left(\frac{\ell}{n}\right)\varphi_\ell = \lambda \sum_{\ell=0}^{n} P\left(\frac{\ell}{n}\right)\varphi_\ell + \sum_{\ell=0}^{n} Q\left(\frac{\ell}{n}\right)\varphi_\ell = \lambda B(P) + B(Q)$.

Finalement <u>B est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.</u>

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$.

$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = aX+b$.

$\forall x \in [0,1],\ B(P)(x) = \sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell\left(a\frac{\ell}{n}+b\right)x^\ell(1-x)^{n-\ell} = \frac{a}{n}\sum_{\ell=0}^{n} \ell\, C_n^\ell x^\ell(1-x)^{n-\ell} + b\sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell x^\ell (1-x)^{n-\ell}$

$= \frac{a}{n}\, nx + b\,(x+(1-x))^n = ax+b = P(x)$.

espérance d'une var binomiale de paramètres $n$ et $x$

B(P) et P coïncide sur [0,1] donc B(P)=P !

Finalement <u>$\forall P \in \mathbb{R}_1[X],\ B(P) = P$</u>

Q3.. $x \in \mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = (tx+(1-x))^n = \sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell x^\ell t^\ell (1-x)^{n-\ell}$

$\forall j \in [\![0,n]\!],\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi^{(j)}(t) = n(n-1)\cdots(n-j+1)\,x^j\,(tx+(1-x))^{n-j} = \sum_{\ell=j}^{n} C_n^\ell x^\ell\, \ell(\ell-1)\cdots(\ell-j+1)\, t^{\ell-j}(1-x)^{n-\ell}$

Pour $t=1$ on obtient : $\forall j \in [\![0,n]\!],\ \frac{n!}{(n-j)!}x^j = \sum_{\ell=j}^{n} C_n^\ell \frac{\ell!}{(\ell-j)!} x^\ell (1-x)^{n-\ell} = \varphi^{(j)}(1)$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Soit $j \in [\![0,n]\!]$

$F_j(n)X^j = \prod_{i=0}^{j-1}(n-i)\,X^j = \frac{n!}{(n-j)}X^j = \sum_{\ell=j}^{n} C_n^\ell \frac{\ell!}{(\ell-j)!}X^\ell(1-X)^{n-\ell} = \sum_{\ell=j}^{n} \frac{\ell!}{(\ell-j)!}\varphi_\ell(X)$

$F_j(n)X^j = \sum_{\ell=j}^{n}\left(\prod_{i=0}^{j-1}(\ell-i)\right)\varphi_\ell(X) = \sum_{\ell=j}^{n} F_j(\ell)\,\varphi_\ell(X)$

<u>$\forall j \in [\![0,n]\!],\ \sum_{\ell=j}^{n} F_j(\ell)\,\varphi_\ell(X) = F_j(n)X^j$</u>.

Soit $j \in [\![0,n]\!]$. Notons que $F_j(k)=0$ si $k\leq j-1$ $\left(F_j=\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)\right)$

Par conséquent : $\sum_{k=0}^{n} F_j(k)\, \varphi_k(X) = \sum_{k=j}^{n} F_j(k)\, \varphi_k(X)$.

Finalement : $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} F_j(k)\, \varphi_k(X) = F_j(n)\, X^j$.

Q4.. a) Soit $j\in[\![0,n]\!]$, $U_j(X)=\frac{1}{n^j}\prod_{i=0}^{j-1}(nX-i)$ ; $\deg U_j = j$

$(U_0,U_1,\dots,U_n)$ est une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ ($\dim \mathbb{R}_n[X]=n+1\dots$)

b) Soit $j\in[\![0,n]\!]$, $B(U_j)=\sum_{k=0}^{n} U_j\left(\frac{k}{n}\right)\varphi_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^j}F_j\left(n\times\frac{k}{n}\right)\varphi_k = \frac{1}{n^j}\sum_{k=0}^{n}F_j(k)\,\varphi_k$

$$B(U_j)\underset{\uparrow\, Q3\,b)}{=}\frac{1}{n^j}F_j(n)\,X^j$$

$\forall j\in[\![0,n]\!]$, $B(U_j)=\frac{F_j(n)}{n^j}X^j=\lambda_j X^j$ avec $\lambda_j=F_j(n)/n^j$

c) $B$ est linéaire et transforme la base $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en la base $(\lambda_0,\lambda_1X,\dots,\lambda_nX^n)$.
$B$ est donc un automorphisme de $E=\mathbb{R}_n[X]$.
$B$ est bijective de $E$ sur $E$ !

Q5.. a) Rappelons que : $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $B(U_j)=\frac{F_j(n)}{n^j}X^j=\lambda_j X^j$ avec $\lambda_j=F_j(n)/n^j$

Notons $S$ la matrice de passage de $\mathcal{E}=(1,X,\dots,X^n)$ à $\mathcal{U}=(U_0,U_1,\dots,U_n)$.
$\forall j\in[\![0,n]\!]$, $U_j=\frac{1}{n^j}F_j(nX)=\frac{1}{n^j}\prod_{i=0}^{j-1}(nX-i)=\prod_{i=0}^{j-1}\left(X-\frac{i}{n}\right)\in\mathbb{R}_j[X]=\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^j)$.

Pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, $U_j$ est combinaison linéaire de $(1,X,\dots,X^j)$ donc $S$ est triangulaire supérieure ; mieux $S$ est triangulaire supérieure à diagonale unité car "le coeff. de $U_j$ sur $X^j$ est 1"

$S^{-1}$ est donc triangulaire supérieure à diagonale unité ; ceci prouve que pour tout $j\in[\![0,n]\!]$ $X^j$ est combinaison linéaire de $U_0,U_1,\dots,U_j$ et la composante de $X^j$ sur $U_j$ est 1.
Comme $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $B(U_j)=\frac{F_j(n)}{n^j}X^j$ : pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, $B(U_j)$ est combinaison linéaire de $(U_0,U_1,\dots,U_j)$ et la composante de $B(U_j)$ sur $U_j$ est $F_j(n)/n^j$
La matrice de $B$ dans la base $\mathcal{U}$ est donc triangulaire supérieure et sa diagonale est :

$(F_0(n), F_1(n)/n, F_2(n)/n^2, \dots, F_n(n)/n^n)$ ; par conséquent le spectre de B est :

$\{F_0(n), F_1(n)/n, F_2(n)/n^2, \dots, F_n(n)/n^n\} = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Notons que $F_0(n) = 1$ et $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\frac{F_j(n)}{n^j} = \prod_{i=0}^{j-1}(1 - \frac{i}{n})$

$\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_j = \frac{F_j(n)}{n^j}$ ; donc :

$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = (1 - \frac{1}{n}), \lambda_3 = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}), \dots, \lambda_n = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$.

Donc $1 = \lambda_0 = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_{n-1}$

B a donc $\underline{\underline{n}}$ valeurs propres distinctes ... et $\dim E = \dim \mathbb{R}_n[X] = \underline{\underline{n+1}}$. $\mathrm{Spec}(B) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

Posons pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $G_{\lambda_j} = \{P \in E \mid B(P) = \lambda_j P\}$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\dim G_{\lambda_j} \geqslant 1$. mieux $G_{\lambda_1} = \{P \in E \mid B(P) = P\}$ contient $\mathbb{R}_1[X]$ (Q2) donc $\dim G_{\lambda_1} \geqslant 2$.

$\dim E \geqslant \dim \bigoplus_{j=1}^{n} G_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{n} \dim G_{\lambda_j} \geqslant 2 + \sum_{j=2}^{n} 1 = 2 + (n-1) = n+1 = \dim E$

Donc $\dim E = \dim \bigoplus_{j=1}^{n} G_{\lambda_j} < +\infty$. Par conséquent : $E = \bigoplus_{j=1}^{n} G_{\lambda_j}$

Finalement B est diagonalisable.

Nous avons vu que $\dim G_{\lambda_1} \geqslant 2$ ; notons que $\dim G_{\lambda_1} > 2$ donne $\dim E > \dim E$ !

Donc $\mathbb{R}_1[X] \subset G_{\lambda_1}$ et $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2 = \dim G_{\lambda_1}$.

Finalement $G_{\lambda_1} = \mathbb{R}_1[X]$.

Le sous-espace propre de B associé à la valeur propre 1 est $\mathbb{R}_1[X]$.

Notons encore que les autres sous-espaces propres sont des droites vectorielles ($\dim G_{\lambda_j} > 1$ pour $j \geqslant 2$ donne encore $\dim E > \dim E$).

Soit $k \in [\![2, n]\!]$. $\dim G_{\lambda_k} = 1$. $\exists L_k \in E$, $G_{\lambda_k} = \mathrm{Vect}(L_k)$.

$B(L_k) = \lambda_k L_k$. Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $L_k$ dans la base $(U_0, U_1, \dots, U_n)$.

Posons $p = \deg L_k$. $p \in [\![0, n]\!]$ car $L_k \in \mathbb{R}_n[X] - \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

$L_k \in \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^p) = \mathrm{Vect}(U_0, U_1, \dots, U_p)$ donc $x_{p+1} = x_{p+2} = \dots = x_n = 0$ et $x_p \neq 0$

$L_k = \sum_{i=0}^{p} x_i U_i$ ; $B(L_k) = \sum_{i=0}^{p} x_i \lambda_i X^i$ et $B(L_k) = \lambda_k L_k = \sum_{i=0}^{p} \lambda_k x_i U_i$

$\sum_{i=0}^{p} x_i \lambda_i X^i = \sum_{i=0}^{p} \lambda_k x_i U_i$. Identifions les coefficients de $X^p$, on obtient :

$x_p \lambda_p = \lambda_k x_p$ ($\deg U_i = i$ et le coeff de $X^i$ dans $U_i$ est 1) ; par conséquent $\lambda_p = \lambda_k$ ($x_p \neq 0$)

Or $k \geq 2$ et $\lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > \lambda_n$ donc $p = k$. Finalement $\deg L_k = k$

Soit $a_k$ le coefficient de $X^k$ dans $L_k$ ;

Posons $H_k = \frac{1}{a_k} L_k$. $H_k$ est unitaire et, $H_k \in \mathrm{Vect}(L_k) = G_{\lambda_k}$ et $\deg H_k = k$

Donc $\deg H_k = k$, $H_k$ est unitaire et $B(H_k) = \lambda_k H_k$.

Ne reste plus qu'à prouver l'unicité de $H_k$. Supposons que $\hat{H}_k \in \mathbb{R}_n[X]$, avec $\deg \hat{H}_k = k$, $\hat{H}_k$ unitaire et $B(\hat{H}_k) = \lambda_k \hat{H}_k$.

$G_{\lambda_k} = \mathrm{Vect}(H_k) = \mathrm{Vect}(\hat{H}_k)$. $\exists R \in \mathbb{R}_n[X]$, $\hat{H}_k = R\, H_k$

$\deg H_k = \deg \hat{H}_k = k$ donc $R$ constant. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\hat{H}_k = \lambda H_k$

le coeff de $X^k$ dans $H_k$ (resp. $\hat{H}_k$) est $1$ donc $1 = \lambda$. $\hat{H}_k = H_k$.

Ceci achève de prouver l'existence et l'unicité d'une famille $(H_2, \dots, H_n)$ d'éléments de $E$ telle que : $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\deg H_k = k$, $H_k$ unitaire et $B(H_k) = \lambda_k H_k$.

c.. $H_0 = 1$ et $H_1 = X - \frac{1}{2}$

$G_{\lambda_1} = \mathbb{R}_1[X]$ ; • $(H_0, H_1)$ est une base de $G_{\lambda_1}$

• $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $(H_k)$ est une base de $G_{\lambda_k}$

• $E = \bigoplus_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}$

Par conséquent : $(H_0, H_1, H_2, \dots, H_n)$ est une base de $E$

Remarque.. On pouvait aussi utiliser le fait que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg H_k = k$ pour obtenir ce résultat.

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ (0) & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ avec $\lambda_j = \frac{F_j(n)}{n^j} = \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Q6.. a) Prouvons que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $H_k(1-X) = (-1)^k H_k(X)$ ou que :

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $H_k(X) = (-1)^k H_k(1-X)$.

→ $k=0$ $H_0 = 1$ et $(-1)^0 H_0(1-X) = 1$

L'égalité est vérifiée pour $k = 0$

→ $k=1$ $H_1 = X - \frac{1}{2}$ $(-1)^1 H_1(1-X) = -\left(1 - X - \frac{1}{2}\right) = X - \frac{1}{2} = H_1$

L'égalité est vérifiée pour $k=1$.

→ $k \in [\![2, n]\!]$. Posons $S_k = (-1)^k H_k(1-X)$.

$\deg S_k = k$ car $\deg H_k = k$

$H_k$ est unitaire donc le coeff. de $X^k$ dans $H_k(1-X)$ est $(-1)^k$ et 1 dans $S_k$ ; $S_k$ est unitaire.

$$B(S_k)=\sum_{i=0}^{n} S_k\left(\frac{i}{n}\right)Q_i(X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^k H_k\left(1-\frac{i}{n}\right)Q_i(X) \underset{j=n-i}{=} (-1)^k \sum_{j=0}^{n} H_k\left(\frac{j}{n}\right)Q_{n-j}(X)$$

Notons que : $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $Q_{n-j}(X)=C_n^{n-j}X^{n-j}(1-X)^j = C_n^j X^{n-j}(1-X)^j = Q_j(1-X)$

$$B(S_k)=(-1)^k\sum_{j=0}^{n}H_k\left(\frac{j}{n}\right)Q_j(1-X) = (-1)^k\left[\left(\sum_{j=0}^{n}H_k\left(\frac{j}{n}\right)Q_k\right)(1-X)\right]$$

$$=(-1)^k\,[B(H_k)](1-X)=(-1)^k(\lambda_k H_k)(1-X)=\lambda_k S_k(X).$$

$B(S_k)=\lambda_k S_k$

$S_k$ a donc les trois propriétés caractéristiques de $H_k$ ; donc $S_k=H_k$ ...cqfd.

b) Soit $k\in[\![0,n]\!]$ et $k$ impair.

$H_k\left(1-\frac{1}{2}\right)=(-1)^k H_k(1/2)$ ; $H_k(1/2)=-1\,H_k(1/2)$ ; $H_k(1/2)=0$

c) $k\in[\![2,n]\!]$. $\qquad Q_i(0)=\begin{cases}0 \text{ si } i\in[\![1,n]\!]\\ 1 \text{ si } i=0\end{cases}$

$B(H_k)=\lambda_k H_k$ ; $\lambda_k H_k(0)=B(H_k)(0)=\sum_{i=0}^{n}H_k\left(\frac{i}{n}\right)Q_i(0)=H_k(0)$

Or $\lambda_k\neq 1$ donc $H_k(0)=0$

$H_k(1)=H_k(1-0)=(-1)^k H_k(0)=0$

$\forall k\in[\![2,n]\!]$, $H_k(0)=H_k(1)=0$

d) $H_2$ est unitaire, de degré 2 et admet 0 et 1 pour racine, $H_2=X(X-1)$

$H_3$ est unitaire, de degré 3 et admet 0, 1/2, 1 pour racine. $H_3=X(X-\frac{1}{2})(X-1)$.

Q7 -- a) Soit $P\in E=\mathbb{R}_n[X]$ ; $P(X+\frac{1}{n})\in\mathbb{R}_n[X]$ donc $\Delta P=P(X+\frac{1}{n})-P(X)\in\mathbb{R}_n[X]=E$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(P,Q)\in E$, $\Delta(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)(X+\frac{1}{n})-(\lambda P+Q)(X)=\lambda(P(X+\frac{1}{n})-P(X))+Q(X+\frac{1}{n})-Q(X)=\lambda\Delta P+\Delta Q$.

$\Delta$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]=E$.

b) Soit $j\in[\![0,n]\!]$.

$$\Delta U_j=U_j(X+\tfrac{1}{n})-U_j(X)=\frac{1}{n^j}\prod_{i=0}^{j-1}\left(n(X+\tfrac{1}{n})-i\right)+\frac{1}{n^j}\prod_{i=0}^{j-1}(nX-i)=\prod_{i=0}^{j-1}\left(X+\frac{1}{n}-\frac{i}{n}\right)-\prod_{i=0}^{j-1}\left(X-\frac{i}{n}\right)$$

$$\Delta U_j=\prod_{i=0}^{j-1}\left(X-\frac{i-1}{n}\right)-\prod_{i=0}^{j-1}\left(X-\frac{i}{n}\right)=\prod_{i=-1}^{j-2}\left(X-\frac{i}{n}\right)-\prod_{i=0}^{j-1}\left(X-\frac{i}{n}\right)=\left[\prod_{i=0}^{j-2}\left(X-\frac{i}{n}\right)\right]\left[X+\frac{1}{n}-X+\frac{j-1}{n}\right]$$

$$\Delta U_j=\left[\prod_{i=0}^{j-2}\left(X-\frac{i}{n}\right)\right]\frac{j}{n}=j/n\;U_{j-1}$$ . $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\Delta U_j=\frac{j}{n}U_{j-1}$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\Delta U_j = \frac{j}{n} U_{j-1}$

Montrons alors par récurrence que si $j \in [\![0,n]\!]$, $\forall k \in [\![0,j]\!]$, $\Delta^k U_j = \frac{j!}{(j-k)!} \frac{1}{n^k} U_{j-k}$

→ C'est clair pour $k=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0,j-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$$\Delta^{k+1} U_j = \Delta(\Delta^k U_j) \underset{H.R.}{=} \Delta\left(\frac{j!}{(j-k)!}\frac{1}{n^k}U_{j-k}\right) = \frac{j!}{(j-k)!}\frac{1}{n^k}\Delta U_{j-k} = \frac{j!}{(j-k)!}\frac{1}{n^k}\frac{j-k}{n}U_{j-k-1}$$

$$\Delta^{k+1}U_j = \frac{j!}{(j-k-1)!}\frac{1}{n^{k+1}}U_{j-(k+1)}$$ ; ceci achève la récurrence.

<u>Remarque</u>.. Nous venons de prouver que : $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\forall k \in [\![0,j]\!]$, $\Delta^k U_j = \frac{j!}{(j-k)!}\frac{1}{n^k}U_{j-k}$

En particulier $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\Delta^j U_j = \frac{j!}{n^j} U_0 = \frac{j!}{n^j}$

Donc $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\forall k \in [\![j+1,n[\![$, $\Delta^k U_j = \Delta^{k-j-1}(\Delta(\Delta^j U_j)) = \Delta^{k-j-1}\left(\Delta\left(\frac{j!}{n^j}\right)\right) = \Delta^{k-j-1}(0_{\mathbb{R}[X]}) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

polynôme constant

Donc $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\forall k \in [\![j+1,n[\![$, $\Delta^k U_j = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Soit $P \in E$. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ les coordonnées de $P$ dans $\mathcal{U} = (U_0, U_1, \dots, U_n)$.

$P = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j U_j$. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\Delta^k P = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j \Delta^k U_j = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j \frac{j!}{(j-k)!}\frac{1}{n^k}U_{j-k}$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

$$(\Delta^k P)(0) = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j \frac{j!}{(j-k)!}\frac{1}{n^k} U_{j-k}(0) = \alpha_k \frac{k!}{0!}\frac{1}{n^k} \quad ; \quad \alpha_k = \frac{n^k}{k!}(\Delta^k P)(0).$$

$U_\ell(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ell \in \mathbb{N}^* \\ 1 \text{ si } \ell = 0 \end{cases}$

Donc $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}(\Delta^k P)(0)\, U_k$

Tout cela est très classique.
Δ, Grégory et compagnie

Soit $$P = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\Delta^\ell P)(0)}{\ell!} n^\ell U_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\Delta^\ell P)(0)}{\ell!} F_\ell(nX)$$

c) Soit $P \in E$. $$B(P) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\Delta^\ell P)(0)}{\ell!} n^\ell B(U_\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\Delta^\ell P)(0)}{\ell!} n^\ell \lambda_\ell X^\ell$$

En particulier : $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $B(P)\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\Delta^\ell P)(0)}{\ell!} n^\ell \lambda_\ell \left(\frac{j}{n}\right)^\ell$

Donc $\forall P \in E$, $B(P) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\Delta^\ell P)(0)}{\ell!} n^\ell \lambda_\ell X^\ell$ et

$\forall P \in E$, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $B(P)\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\Delta^\ell P)(0)}{\ell!} \lambda_\ell j^\ell$

PARTIE II — Encore du classique ... Bernstein ...

Q1.. Soit $f \in \mathcal{D}$. $B_n(f)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n$ sur $[0,1]$ ; elle est donc de classe $C^1$ sur $[0,1]$ ; $B_n(f) \in \mathcal{D}$.

$B_n$ est donc une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Notons qu'elle n'est pas surjective car $\mathcal{D}$ n'est pas réduit aux fonctions polynomiales sur $[0,1]$ de degré $\leqslant n$.

Montrons la linéarité de $B_n$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in \mathcal{D}^2$, $B_n(\lambda f+g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\alpha f+g)(\frac{k}{n})\, x^k (1-x)^{n-k} = \alpha \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k g(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f,g) \in \mathcal{D}^2$, $B_n(\lambda f+g) = \lambda B_n(f) + B_n(g)$ ; $B_n \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$.

Q2.. Soit $x \in [0,1]$. Soit $W_x$ une var suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $x$.

$E(W_x) = nx$ et $V(W_x) = nx(1-x)$.

$nx(1-x) = V(W_x) = E\left((W_x - E(W_x))^2\right) = E\left((W_x - nx)^2\right) = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 p(W_x = k)$

$nx(1-x) = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

donc $\forall x \in [0,1]$, $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)}}$.

Q3.. $f \in \mathcal{D}$. a) $f$ est $C^1$ sur $[0,1]$. Posons $K = \max_{t \in [0,1]} |f'(t)|$.

$K \in \mathbb{R}_+$ et $\forall t \in [0,1]$, $|f'(t)| \leqslant K$

donc $\underline{\underline{\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|}}$ (Inégalité des A.F.).

b) $x \in [0,1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \underset{\substack{\uparrow}}{\leqslant} \sum_{k \in I} \frac{|k-nx|^2}{n^2\alpha^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \underset{\substack{\uparrow}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-nx)^2}{n^2\alpha^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$k \in I \Rightarrow \frac{|k-nx|}{n\alpha} \geqslant 1$ — positivité des termes sommés

donc $\sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n^2\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

Soit $f \in \mathcal{D}$.

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \Big|\big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}_{=1}\big) f(x) - \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\tfrac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \big(f(x) - f(\tfrac{k}{n})\big) x^k (1-x)^{n-k}\Big|$$

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| x^k (1-x)^{n-k} \leqslant K \sum_{k=0}^{n} C_n^k |x - \tfrac{k}{n}| x^k (1-x)^{n-k}$$

$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant K \sum_{k\in I} C_n^k |x-\frac{k}{n}| x^k(1-x)^{n-k} + K \sum_{k\in J} C_n^k |x-\frac{k}{n}| x^k (1-x)^{n-k}$

$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant K \sum_{k\in I} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + K \sum_{k\in J} C_n^k \alpha\, x^k(1-x)^{n-k}$

- $|x-\frac{k}{n}| \leqslant 1$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ en particulier pour $k \in I$
- $k\in J \Rightarrow |k-nx| < n\alpha \Rightarrow |\frac{k}{n}-x| < \alpha \Rightarrow |x-\frac{k}{n}| < \alpha$

Donc $|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \frac{K}{n^2\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + K\alpha \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$

$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \frac{K}{n^2\alpha^2}\, n x(1-x) + K\alpha \times 1 \leqslant \frac{K}{n\alpha^2} \max_{x\in[0,1]} x(1-x) + K\alpha = \frac{K}{n\alpha^2} \times \frac{1}{4} + K\alpha$

$|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant K\left[\alpha + \frac{1}{4\alpha^2 n}\right]$ ... pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$

Remarque.. Notons que si $I=\emptyset$ ou $J=\emptyset$ ce qui précède vaut si l'on admet qu'une somme sur l'ensemble vide est nulle. Dans le cas contraire il faut envisager les cas $I=\emptyset$ et $J=\emptyset$.

e) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $K\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Choisissons un tel $\alpha$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{K}{4\alpha^2 n^2} = 0$ ;

donc $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\geqslant N \Rightarrow \frac{K}{4\alpha^2 n} \leqslant \varepsilon/2$

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant N \Rightarrow \forall x\in[0,1]$, $|f(x)-B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Par conséquent : $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n \in\mathbb{N}^*, (n\geqslant N \Rightarrow (\forall x\in[0,1], |f(x)-B_n(f)(x)|\leqslant\varepsilon))$ (1)

Ceci prouve que pour tout $x\in[0,1]$, $(B_n(f)(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers $f(x)$.

Mieux $(B_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f$ ; en effet (1) indique que : $\lim_{n\to+\infty}\left[\max_{t\in[0,1]} |f(t)-B_n(f)(t)|\right] = 0$

Remarque.. Ce résultat vaut encore si l'on suppose simplement $f$ continue sur $[0,1]$ ; il utilise dans sa démonstration le fait qu'une fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Les $B_n(f)$ sont les polynômes de BERSTEIN. Voir aussi ESSEC 88.

Q4.. a.. $f\in\mathcal{C}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$

Soit $n\in\mathbb{N}$ ; $B_n(f)$ est polynomiale de degré $\leqslant n$. $\exists (a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\forall x\in[0,1]$, $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

donc $\int_0^1 f(t)[f(t)-B_n(f)(t)]\,dt = \int_0^1 (f(t))^2\,dt - \int_0^1 f(t)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)dt = \int_0^1 (f(t))^2\,dt - \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 t^k f(t)\,dt$

Par conséquent : $\int_0^1 f(t)[f(t)-B_n(f)(t)]\,dt = \int_0^1 (f(t))^2\,dt$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$

notons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)[f(t)-B_n(f)(t)]dt = 0$ , on aura ainsi $\int_0^1 f^2(t)dt = 0$ donc $f^2$ nulle car $f^2$ est positive et continue sur $[0,1]$ et donc $f$ nulle sur $[0,1]$.

Posons $M = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ ; $\left|\int_0^1 f(t)[f(t)-B_n(f)(t)]dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,|f(t)-B_n(f)(t)|dt \leq M \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)-B_n(f)(t)|$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} [\max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)-B_n(f)(t)|] = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)[f(t)-B_n(f)(t)]dt = 0$. Par conséquent $f$ est nulle sur $[0,1]$.

b.. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t)dt \underset{\substack{u=e^{-t}\\ du=-e^{-t}dt}}{=} \int_1^0 u^x g(-\ln u)(-\frac{1}{u})du = \int_0^1 u^{x-1} g(-\ln u)du$

Posons $\forall u \in ]0,1]$, $\hat{h}(u) = g(-\ln u)$ et $\hat{h}(0) = 0$.

$g$ est de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$ donc $\hat{h}$ est de classe $C^1$ sur $]0,1]$.

$\lim\limits_{u\to 0^+} \hat{h}(u) = \lim\limits_{u\to 0^+} g(-\ln u) = \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0 = \hat{h}(0)$ ; $\hat{h}$ est continue sur $[0,1]$.

Pour prouver que $\hat{h}$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$ il suffit de prouver que $\hat{h}'$ admet une limite finie en 0.

$\forall u \in ]0,1]$, $\hat{h}'(u) = -\frac{1}{u} g'(-\ln u)$

$\lim\limits_{t\to+\infty} (e^t g'(t))$ existe dans $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{u\to 0^+} (e^{-\ln u} g'(-\ln u))$ existe dans $\mathbb{R}$ ; $\lim\limits_{u\to 0^+} (\frac{1}{u} g'(-\ln u))$ existe dans $\mathbb{R}$, par conséquent $\hat{h}'$ admet une limite finie en 0 ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

$\hat{h}$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^1 u^{x-1}\hat{h}(u)du = 0$.

Donc $\hat{h}$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n \hat{h}(u)du = 0$ ; d'après a) $\hat{h}$ est nulle sur $[0,1]$.

Donc $\forall u \in ]0,1]$, $g(-\ln u) = 0$

Par conséquent $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = 0$. $g$ est nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Q5.. $f \in \mathcal{E}$ et $h : x \mapsto x f(x)$

Soit $x \in [0,1]$.

$B_n(h)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\, h(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$

$B_n(f)'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n})\, k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_n^k f(\frac{k}{n})(n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}$

$\frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))'(x) = \sum\limits_{k=1\text{ ou }0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n})\frac{k}{n}(1-x) x^k (1-x)^{n-k} - \sum\limits_{k=0}^{n-1\text{ ou }n} C_n^k f(\frac{k}{n})\frac{(n-k)}{n} x\,(x^k(1-x)^{n-k})$.

donc $\frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\left[\frac{k}{n} - x\frac{k}{n} - x + \frac{k}{n}x\right]$

$$\frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n} - x\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - x\, B_n(f)(x)$$

Finalement : $\forall x \in [0,1]$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))'(x) + x\, B_n(f)(x)$

ou : $\forall x \in [0,1]$, $B_n(h)(x) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))'(x) + x\, B_n(f)(x)$

b) Soit $x \in [0,1]$

$$(B_n(f))'(x) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)(n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$(B_n(f))'(x) = \sum_{k=1}^{n} n C_{n-1}^{k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$k \mapsto k+1$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^{k} f\left(\frac{k+1}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k-1}$$

donc $\forall x \in [0,1]$, $(B_n(f))'(x) = n\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] C_{n-1}^{k} x^k (1-x)^{n-k-1}$

Supposons $f$ croissante sur $[0,1]$ alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\forall x \in [0,1]$, $\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] C_{n-1}^{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \geqslant 0$

donc $\forall x \in [0,1]$, $(B_n(f))'(x) \geqslant 0$

Par conséquent $B_n(f)$ est croissante sur $[0,1]$.

## PARTIE III

Q1.. a) Soient $(a,b) \in S^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_\lambda(\alpha a + b)(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\alpha a_k + b_k)\lambda^k (1-\lambda)^{n-k} = \alpha \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_\lambda(\alpha a + b)(n) = \alpha \varphi_\lambda(a)(n) + \varphi_\lambda(b)(n)$

donc $\varphi_\lambda(\alpha a + b) = \alpha \varphi_\lambda(a) + \varphi_\lambda(b)$ ; $\varphi_\lambda$ est linéaire.

$\varphi_\lambda$ est donc un endomorphisme de $S$ (par définition $\varphi_\lambda$ est une application de $S$ dans $S$).

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$ $\qquad n^k(1-\lambda)^n = e^{n\left[\ln(1-\lambda) + k\frac{\ln n}{n}\right]}$

donc $C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \sim \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k \times \frac{1}{k!} \times n^k (1-\lambda)^n$. Or $\lim_{n \to +\infty}\left(n^k(1-\lambda)^n\right) \overset{\downarrow}{=} 0$

donc $\lim_{n \to +\infty}\left[C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}\right] = 0$.

la preuve dès qu'on me le demande très gentiment.