PRELIMINAIRE

Q1 $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ u(x)=\tan x$. Montrer que u est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On note arctan la bijection réciproque.

Q2 Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

(n'auront des points, sur cette question, que les gens qui énonceront avec précision le théorème utilisé).

Q3 a est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\frac{\pi}{a}\cdot$

PARTIE I

Dans cette partie a est un réel strictement positif.

Q1 On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x)=\dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}\cdot$ Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Dans toute cette partie X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ admettant f_a pour densité.

On dit alors que X suit une **loi de Cauchy de paramètre** a et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

Q2 Donner la fonction de répartition de X. X possède-elle une espérance ?

Q3 Soit λ un réel strictement positif. Prouver que $T=\lambda X \hookrightarrow \mathcal{C}(\lambda a)$. Et pour λ strictement négatif ?

Q4 Y est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ suivant une loi de Cauchy de paramètre b ($b \in \mathbb{R}^{+*}$).

On suppose que X et Y sont indépendantes et on se popose d'étudier $X+Y$.

a) x et t sont deux réels. On pose $c=[x^2+(b+1)^2][x^2+(b-1)^2]$. Montrer que :

$$\frac{c}{[(t-x)^2+1][t^2+b^2]} = x\left[\frac{2t}{t^2+b^2}-\frac{2(t-x)}{(t-x)^2+1}\right]+\frac{x^2+b^2-1}{(t-x)^2+1}+\frac{x^2-b^2+1}{t^2+b^2}$$

(partir du membre de droite et réduire au même dénominateur ; grugeurs pofessionnels s'abstenir...).

b) Montrer que si $a=1 : X+Y \hookrightarrow \mathcal{C}(1+b)$ (poser le problème, intégrer la formule précédente entre A et B et passer à la limite ; on pourra commencer par écrire le résultat que l'on souhaite obtenir).

c) En utilisant Q3 et Q4 b) montrer dans le cas général que : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{C}(a+b)$.

PARTIE II

Q1 Dans cette partie a est un réel strictement positif et X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui suit une loi de Cauchy de paramètre a. On pose $Z=\ln|X|$.

a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité admettant pour densité h_a définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_a(x)=\frac{2a}{\pi}\ \frac{e^x}{e^{2x}+a^2}$$

b) Montrer que Z possède une espérance.

Montrer que $E(Z) = \dfrac{2a}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = e^x$)

c) Montrer à l'aide d'un changement de variable que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln v}{v^2+1}\,\mathrm{d}v = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln w}{w^2+1}\,\mathrm{d}w$.

En déduire que $E(Z) = \ln a$ ($t = ua$)

Q2 X et Y sont deux variable aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi de Cauchy de paramètre 1. On pose $L = \ln|XY|$ et $h = h_1$.

a) Montrer à l'aide de Q1 que L est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction K définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ K(x) = \frac{4x}{\pi^2(e^x - e^{-x})} \quad \text{et} \quad K(0) = \frac{2}{\pi^2}$$

(pour x différent de 0, faire le changement de variable $y = e^{2t}$ et remarquer que $\frac{1}{(y+1)(y+e^{2x})} = \frac{1}{e^{2x}-1}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+e^{2x}}\right)$)

b) Utiliser $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$.

Q3 a) On pose, pour tout élément x de $]0,1[$, $\Phi(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}\cdot$

Montrer que Φ est prolongeable en une fonction continue $\widehat{\Phi}$ sur $[0,1]$.

Prouver que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{2n+1}\ \widehat{\Phi}(t)\ \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 0$.

b) n est élément de $\mathbb{N}$ et t est élément de $]0,1[$. Vérifier que :

$$\frac{\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} (t^{2k}\ln t) + \frac{\widehat{\Phi}(t)\ t^{2n+1}}{t+1}\cdot$$

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\cdot$ Prouver que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (regrouper les pairs et les impairs).

c) S'inspirer de ce qui précède pour prouver que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$ et en déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t$

Q4 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

a) Etablir l'existence de I_n et J_n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

b) n est élément de $\mathbb{N}^*$. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n. Calculer I_n.

c) Etablir une relation entre J_{n+1}, J_n et I_n pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

d) Préciser les valeurs de J_2 et J_3.